

3. Übungsblatt für die Übungen vom 2.11. bis 8.11.2010

Injektive und surjektive Abbildungen

Hausaufgaben bitte zum Beginn der Vorlesung am 8. November abgeben. Bitte Namen, Matrikelnummer, und Übungsgruppe angeben.

Ü1. Beschreiben Sie die folgenden Funktionen in einer geeigneten Weise (Wertetabelle, Aufzeichnen im Koordinatensystem, ...). Untersuchen Sie, ob die Funktionen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

(a) $f_a : \{0, 1, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$, $f_a(m) = n : \iff n$ ist die letzte Ziffer von $a \cdot m$ (für $a = 2$, $a = 3$ und $a = 4$),

(b) $g_a : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}$, $g_a(z) := a^z$ (für beliebiges $a \in \mathbb{N}$),

(c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sin(x)$,

(d) $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = x^3 + x$,

(e) $m_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m_{a,b}(x) = x^2 + ax + b$. (für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$)

Ü2. Seien A und B die folgenden Mengen:

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{0, 1, 2\}$$

(a) Wieviele verschiedene Funktionen $f : A \rightarrow B$ gibt es?

(b) Wieviele verschiedene Funktionen $f : B \rightarrow A$ gibt es?

(c) Wieviele dieser Funktionen sind jeweils injektiv bzw. surjektiv?

H3. Sei A eine Menge mit 5 Elementen, und B eine Menge mit 3 Elementen.

(a) Wieviele injektive Funktionen $f : B \rightarrow A$ gibt es?

(b) Wieviele surjektive Funktionen $g : A \rightarrow B$ gibt es?

(c) Wieviele solcher Funktionen gibt es jeweils, wenn $|A| = n$ und $|B| = m$?

H4. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x + 1$ zwar injektiv, aber nicht surjektiv ist. Gibt es auch ein Beispiel für eine Abbildung $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die zwar surjektiv, aber nicht injektiv ist?