1. Übungsblatt für die Übungen vom 18.10. bis 24.10.2010

Mengen

Hausaufgaben bitte zum Beginn der Vorlesung am 24. Oktober abgeben.

Ü1. Gegeben seien die Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 5\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \{0,1,2\} :\ x = 2^k\}, \quad D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ein Teiler von } 30\}.$$

(a) Schreiben Sie die Mengen elementweise auf.

(b) Geben Sie alle Teilmengenbeziehungen zwischen A, B, C und D an. Visualisieren Sie die Mengen mit einem Venn-Diagramm.

Ü2. Unter welchen Bedingungen (… genau dann, wenn …) gelten die folgenden Mengengleichungen für die Elemente a, b, c, d?

(i)	$\{b,c\} = \{c,b,d\}$	(ii)	$\{\{a,b\},c\} = \{\{a\},\{d\}\}$	(iii)	$\{a,b,a\} = \{a,b\}$
(iv)	$\{\{a\},b\} = \{\{c\},d\}$	(v)	$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$	(vi)	$\{a,b\} = \{c,d\}$
(vii)	$\{\{a,\emptyset\},b\} = \{\{\emptyset\}\}$				

Eine der Bedingungen (iv), (v) und (vi) ist äquivalent zu $(a,b) = (c,d)$. Welche?

Ü3. Die *Differenz* der Mengen X und Y ist definiert durch $X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$. Beweisen Sie (für beliebige Mengen A, B und C) oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$,

(b) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$,

(c) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B \iff B \cap C = \emptyset$.

Ü4. (a) Geben Sie Beispiele von Mengen A, B, C, D an, für welche die Gleichung $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \cup C) \setminus (B \cup D)$ verletzt ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Inklusion $(A \cup C) \setminus (B \cup D) \subseteq (A \setminus B) \cup (C \setminus D)$ stets richtig ist. Argumentieren Sie sorgfältig!

H5. **Hausaufgabe**
Durch $X \,\Delta\, Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ ist die *symmetrische Differenz* zwischen Mengen X und Y definiert.

(a) Ermitteln Sie $A \,\Delta\, B$ für die Mengen $A = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 < x + y < 5\}$ und $B = \{(x,y) \mid x, y \in \{0,1,2,3,4\}$ und 2 ist ein Teiler von $x + y\}$.

(b) Zeigen Sie $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Beweisen Sie, dass $X \,\Delta\, Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ für beliebige Mengen X, Y gilt.

bitte wenden

H6. **Hausaufgabe**
Gegeben seien die Mengen $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x-5| \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 5 \leq 9\}$ und $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 > 3x^2\}$. Berechnen Sie

$$A \cup B, \quad A \cap C, \quad C \setminus A, \quad A \,\Delta\, B, \quad (A \setminus B) \setminus C \text{ und } A \setminus (B \setminus C).$$

H7. **Hausaufgabe**
Für eine Menge M bezeichnet $\mathfrak{P}(M)$ die *Potenzmenge* von M, also die Menge aller Teilmengen von M.

Beweisen Sie, dass die Beziehung $\mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B) \subseteq \mathfrak{P}(A \cap B)$ für beliebige Mengen A und B gilt. Gilt sogar die Gleichheit? Begründen Sie!

Zum Kennenlernen bzw. zur Wiederholung: Die griechischen Buchstaben (z.T. Klein- und Großbuchstabe):

α	Alpha	β	Beta	γ, Γ	Gamma
δ, Δ	Delta	ε	Epsilon	ζ	Zeta
η	Eta	$\theta(\vartheta), \Theta$	Theta	ι	Jota
$\varkappa(\kappa)$	Kappa	λ, Λ	Lambda	μ	My
ν	Ny	ξ, Ξ	Xi	o	Omikron
π, Π	Pi	$\varrho(\rho)$	Rho	σ	Sigma
τ	Tau	υ	Ypsilon	$\varphi(\phi), \Phi$	Phi
χ	Chi	ψ, Ψ	Psi	ω, Ω	Omega

Das deutsche Alphabet in gedruckten Frakturbuchstaben (groß und klein):

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{I}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{O}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{o}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$