TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Stefan Schmidt

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

erreichte Punktzahl:

Teil 1: Teil 2:

Note:

Klausur zur Vorlesung:

"Lineare Algebra und Analytische Geometrie"

Hinweise:

- Erlaubtes Hilfsmittel ist ein computer- oder handgeschriebenes A4-Blatt.
- In der Klausur gibt es insgesamt 200 Punkte zu erreichen, 100 davon gibt es auf Teil I (Praxis), die anderen 100 auf Teil II (Theorie). Die Prüfung gilt als bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. 100 erreichte Punkte ergeben die Note 1.0. Durch 2 Zusatzaufgaben können zusätzlich 10 Punkte erreicht werden.
- Die Lösungswege sind ohne Lücken anzugeben. Jede Aussage ist zu begründen.

Name, Vorname: Punktzahl Teil 1:

Matrikelnummer: Punktzahl Seite:

Teil I

Praxis

Aufgabe 1 (20 Punkte):

Betrachten Sie Teilmengen $A,\ B,\ C$ einer Grundmenge U und setze $X^c := \{u \in U \mid u \notin X\}$ für jede Teilmenge X von U. Seien dann folgende Mengen ausgezeichnet:

$M_1 = A^c \cap B^c \cap C^c$

$M_2 = (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c)$

$M_3 = ((A \cap B)^c \cup C)^c$

$M_4 = ((A^c \cup B^c)^c \cup C^c)^c$

$M_5 = (A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) \cup (C \cap A^c)$

(a) Vereinfachen Sie jede der Mengen und schraffieren Sie sie dann im VENN-Diagramm (siehe nächste Seite).

(b) Überprüfen Sie anhand der VENN-Diagramme die obigen Mengen auf Gleichheit.

(c) Vergleichen Sie M_2 und M_4.

(d) Was lässt sich über M_3 sagen, falls $A \cap B \subseteq C$ ist?

(e) Bestimmen Sie obige Mengen M_1 und M_3 im Fall von $U = \mathbb{N}$ und

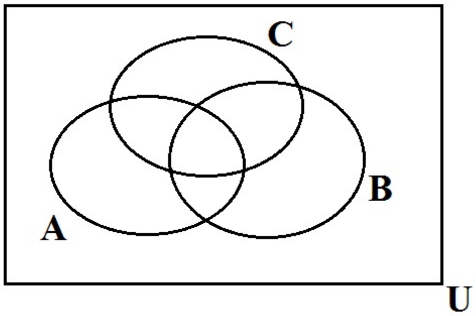
$A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\},\ B = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\},\ C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 10\}.$

Name, Vorname: Punktzahl Seite:

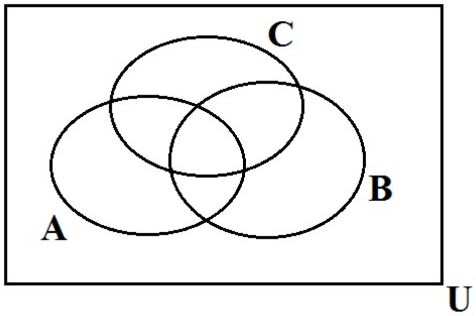
Matrikelnummer:

Zu schraffierende VENN-Diagramme (Aufgabe 1.(a)):

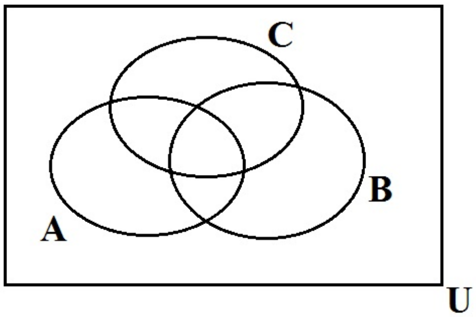
$M_{1:}$



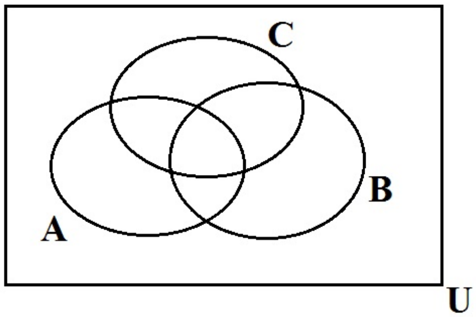
M_2 :



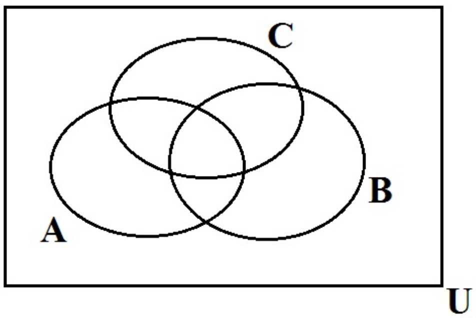
$M_{3:}$



M_4 :



M_5 :



Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (6 Punkte):

a) Sei P die Eckenmenge und B die Menge der 12 regulären 5-Ecke eines Dodekaeders. Die zugehörige Inzidenzstruktur $J = (P,\ B,\ I)$ mit $I\ := \{(p,b) \in P \times B \mid p\ \mathit{ist\ Ecke\ von}\ b\}$ bildet dann eine taktische Konfiguration mit dem Parameterquadrupel $(v, 3; 12, 5)$. Bestimmen Sie v.

b) Sei folgende Inzidenzstruktur $J = (P,\ B,\ I)$ mit $P = \{p1,\ p2,\ p3,\ p4\}$ und $B = [6]$ tabellarisch gegeben:

I	1	2	3	4	5	6
p1	x	x	x			
p2				x	x	x
p3	x		x		x	
p4		x		x		x

Zeigen Sie durch Angabe des Parameterquadrupels $(v,\ r\ ;\ b,\ k)$ von J, dass J taktische Konfiguration ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte):

Sei $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, \widetilde{0}, \widetilde{1})$ Semiring mit $\mathbb{R} \subseteq S$ und für $P = [3]$ sei $\lambda = 2\delta_1^P + 3\delta_2^P + 4\delta_3^P$, sowie $\gamma \in (S^P)^P$ mit $\gamma 1 = 3\delta_1^P + \delta_2^P,\ \gamma 2 = \delta_2^P + \delta_3^P$ und $\gamma 3 = \delta_3^P$. Bestimmen Sie $f_\gamma \lambda = \lambda 1 \cdot \gamma 1 + \lambda 2 \cdot \gamma 2 + \lambda 3 \cdot \gamma 3$ für

(a) $\mathbb{S} = \mathbb{R}$

(b) $\mathbb{S} = \mathbb{R}_{trop}$

(c) $\mathbb{S} = \mathbb{R}_{arc}$

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Gegeben sei die Daten-Matrix:

$$\alpha:\ [3] \times [4] \to \mathbb{Z}$$
$$(i,\ j) \mapsto j - i$$

(a) Stellen Sie α und α^T als Tabelle dar.

(b) Bestimmen Sie $r_\alpha 1 = \alpha(1, \cdot)$ und $c_\alpha 1 = \alpha(\cdot, 1)$

Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

Aufgabe 5 (10 Punkte):

Für $P := \{Quarter,\ Dollar\}$ und $Q := \{Nickel,\ Dime\}$ sei $\mu \in \mathbb{N}^{P \times Q}$ tabellarisch gegeben:

	Nickel	Dime
Quarter	1	2
Dollar	4	8

Seien $\gamma := r_\mu$ die ROW-MAP zu μ und $f := f_\gamma$ die Linearkombinationsabbildung bezüglich $\mathbb{N}^Q_{add}$ über $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$. Außerdem sei $\beta \in \mathbb{N}^Q$ gegeben durch:

y	Nickel	Dime
βy	10	20

Bestimmen Sie f und finden Sie zur Gleichung $fx = \beta$ die Lösungsmenge $f^{-1}\{\beta\}$.

Aufgabe 6 (8 Punkte):

Sei M ={Apfel, Birne, Zitrone, Banane} und $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^M$ seien gegeben durch:

x	Apfel	Birne	Zitrone	Banane
αx	4	2	0	2
βx	0	1	2	3

(a) Vervollständigen Sie die Tabelle:

x	Apfel	Birne	Zitrone	Banane
$(\alpha + \beta)x$				
$(\alpha \wedge \beta)x$				
$(\alpha \vee \beta)x$				

(b) Geben Sie *supp* α und *supp* β an.

Aufgabe 7 (14 Punkte):

(a) Ausgehend vom Rechenbereich $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ überführen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

und verifizieren Sie :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Wenden Sie (a) an, um folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 8 (10 Punkte):

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv definiert durch $f1 = 1 = f2$ und $f(n+2) = 3 \cdot f(n+1) - 2 \cdot fn$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie f durch vollständige Induktion.

(b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f1 = 1$ und $f2 = 2$ sowie $f(n+2) = 3 \cdot f(n+1) + 2 \cdot fn$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass fn gerade ist für alle $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n > 1$ und bestimmen Sie $f5$.

Aufgabe 9 (10 Punkte):

Bestimmen Sie $Part\,[3]$ und $Part\,[4]$.

Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

Aufgabe 10 (6 Punkte):

(a) Auf [6] sei eine Äquivalenzrelation tabellarisch gegeben:

	1	2	3	4	5	6
1	x			x	x	
2		x	x			
3		x	x			
4	x			x	x	
5	x			x	x	
6						x

Bestimmen Sie die zugehörige Partition von [6].

(b) Geben Sie die zugehörige Kreuztabelle zur Partition $\varphi = \{\{1,2,3\},\{4,6\},\{5,7\}\}$ von [7] an.

Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

Zusatzaufgabe 1 (4 Punkte):

(a) Stellen Sie folgendes Netzwerk als Kreuztabelle dar:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r] \arrow[dr] & w \arrow[r] \arrow[d] & t \\ & v \arrow[ur] \arrow[loop below] & \end{tikzcd}$$

(b) Stellen Sie folgende Kreuztabelle als Netzwerk dar:

	p	v	w	q
p		x	x	
v				x
w	x			x
q				x

Zusatzaufgabe 2 (6 Punkte):

Sei P={Dime, Quarter, Dollar} und sei $\gamma \in \mathbb{N}^P$ gegeben durch

x	Dime	Quarter	Dollar
γx	10	25	100

Bestimmen Sie $f_\gamma \lambda = \lambda \star \gamma = \sum_{p \in P} \lambda_p \gamma p$ und $f_\gamma \upsilon$ für $\lambda, \upsilon \in \mathbb{N}^P$ mit

x	Dime	Quarter	Dollar
λx	2	1	2
υx	7	3	1

und zeigen Sie: $(\lambda, \upsilon) \in ker(f_\gamma)$.

Name, Vorname: Punktzahl Teil 2:

Matrikelnummer: Punktzahl Seite:

Teil II

Theorie

Aufgabe 1 (10 Punkte):

Sei $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ ein Semiring und P eine endliche Menge. Begründen Sie in $Mod\ (\mathbb{S}, P)$ folgende Gleichungen $\forall s_1, s_2 \in S$ und $\lambda \in S^P$:

$$(a)\ (s_1 + s_2) \cdot \lambda = s_1 \cdot \lambda + s_2 \cdot \lambda$$

$$(b)\ (s_1 \cdot s_2) \cdot \lambda = s_1 \cdot (s_2 \cdot \lambda)$$

Aufgabe 2 (10 Punkte):

Sei $\mathbb{M} = (M, \star, 0)$ Monoid und sei Map $M\ := (M^M, \circ, id_M)$ das (kontravariante) volle Abbildungsmonoid zu M. Dann sei $\star :\ M \times M \to M$ als Daten-Matrix aufgefasst mit $r_\star :\ M \to M^M,\ x \mapsto \star(x, \cdot)$ als zugehöriger ROW MAP, d.h. $(r_\star x)y\ := x \star y$ für alle $x, y \in M$.

Zeigen Sie:

1. $r_\star$ ist injektiv
2. $r_\star 0 = id_M$
3. $r_\star(x \star y) = r_\star x\ \circ\ r_\star y\ (\forall x,\ y \in M)$

Aufgabe 3 (10 Punkte):

Seien $P,\ Q,\ S$ Mengen und sei $\alpha \in S^{P \times Q}$. Zeigen Sie: $r_{\alpha^T} = c_\alpha$ und $m(r_\alpha) = \alpha$.

Erläuterung:

r_β bezeichnet die ROW-MAP zu $\beta \in S^{P \times Q}$ (d.h. $(r_\beta p)q\ := \beta(p, q)$ für alle $(p, q) \in P \times Q$) und m_γ ist der MATRIX-MAKER zu $\gamma \in (S^Q)^P$ (d.h. $(m\gamma)(p, q)\ := (\gamma p)q$ für alle $(p, q) \in P \times Q$).

Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (10 Punkte):

Beweisen Sie:

Wenn M Menge und $\varphi :\ S \to T$ injektive Abbildung , dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} &\phi :\ S^M \to T^M \\ &\alpha \mapsto \varphi \circ \alpha = \phi\alpha \end{aligned}$$

ebenfalls injektiv.

Aufgabe 5 (30 Punkte):

Sei φ Morphismus von einem Monoid $\mathbb{M} = (M, +, 0)$ in ein Monoid $\mathbb{M}'$. Außerdem sei $U \subseteq M$ eine Transversale von φ, d.h. U bildet ein Untermonoid von $\mathbb{M}$ derart, dass zu jedem $x \in \mathbb{M}$ genau ein $u_x \in U$ mit $\varphi x = \varphi(u_x)$ existiert. Bezeichne weiter $\mathbb{U}$ das durch U induzierte Untermonoid von $\mathbb{M}$. Für die Abbildungen $\epsilon :\ M \to U,\ x \mapsto u_x$ und $\iota :\ U \to M,\ u \mapsto u$ sowie $\pi := \iota \circ \epsilon$ und $\psi := \varphi \circ \iota$ ist folgendes zu zeigen:

(a) Es sind $\epsilon,\ \iota,\ \pi$ und ψ Morphismen von $\mathbb{M}$ nach $\mathbb{U}$ bzw. $\mathbb{U}$ nach $\mathbb{M}$ bzw. $\mathbb{M}$ nach $\mathbb{M}$ bzw. $\mathbb{U}$ nach $\mathbb{M}'$ mit

$\epsilon \circ \iota = id_U,\ \epsilon = \epsilon \circ \pi,\ \pi \circ \pi = \pi$ und $\varphi = \psi \circ \epsilon$, insbesondere erhält man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{M} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, shift right, "\epsilon"'] & \mathbb{M}' \\
\mathbb{M} \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\epsilon"'] & \mathbb{U} \arrow[u, "\psi"'] \arrow[ul, shift right, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

(b) Es ist ψ injektiv mit $Im\psi = Im\varphi$; außerdem gilt $ker\pi = ker\epsilon = ker\varphi$.

(c) Bildet $\mathbb{M}$ eine Gruppe, so bildet $\mathbb{U}$ ebenfalls eine Gruppe. In diesem Fall ist π Projektion von $\mathbb{M}$ mit

$Ker\pi = Ker\varphi$ und $Im\pi = U$; insbesondere ist $U \oplus Ker\varphi = M$ und $\mathbb{U} \simeq Im\varphi$.

Aufgabe 6 (5 Punkte):

Zeigen Sie für beliebige $m, n \in \mathbb{N}_+$, dass $m \cdot \mathbb{N} \simeq n \cdot \mathbb{N}$ (d. h. $m \cdot \mathbb{N}$ und $n \cdot \mathbb{N}$ sind gleichmächtig).

Name, Vorname: Punktzahl Seite:

Matrikelnummer:

Aufgabe 7 (15 Punkte):

Seien $P,\ Q$ endliche Mengen mit $Q \subseteq P$. Zeigen Sie für einen beliebigen Ring $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$, dass die Abbildung $\varphi:\ S^P \to S^P,\ \lambda \mapsto \sum_{q \in Q} \lambda_q \cdot \delta_q^P$ eine Projektion von $Mod(\mathbb{S}, P)$ ist. Bestimmen Sie außerdem $Im\varphi$ und $Ker\varphi$, und überprüfen Sie $Im\varphi \oplus Ker\varphi = S^P$.

Aufgabe 8 (10 Punkte):

Sei $P = [2]$ und $\mathbb{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ sei ein Ring. Zeigen Sie: f_γ ist für $s \in S$ und $\gamma \in (S^P)^P$ mit $\gamma 1 = \delta_1^P + s \cdot \delta_2^P$ sowie $\gamma 2 = -\delta_2^P$ stets <u>involutorisch</u>, d.h. $f_\gamma \circ f_\gamma = id_{S^P}$.