1 Formale Implikationen und Hüllensysteme

1.1 Einleitung

Seien $A := \{1,3\}$ und $B := \{2\}$ Teilmengen einer Grundmenge $M := \{1,2,3\}$ von „formalen Merkmalen“. Das Paar (A,B) betrachten wir als „formale Implikation“und schreiben dafür auch $A \to B$ oder in Worten „A impliziert B“.
Interpretation: Wir beschreiben eine Situation, in der die Merkmale 1 & 3 zusammen das Merkmal 2 implizieren, d.h. wann immer 1 & 3 in einem gewissen Kontext auftreten, ist auch das Merkmal 2 enthalten.

Beispiel 1. 1=hoher Blutdruck, 2=hohes Schlaganfallrisiko und 3=hohes Alter

Wir sagen, dass eine Teilmenge T von M die formale Implikation $A \to B$ **respektiert**, falls $A \subseteq T \Rightarrow B \subseteq T$ gilt.

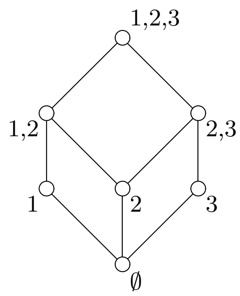
Aufgabe: Bestimmung von $\mathfrak{H}(A \to B) := \{T \subseteq M \mid T \text{ respektiert } A \to B\}$
Lösung:

(a) Vorüberlegung: T respektiert $A \to B$ gdw. $A \nsubseteq T$ oder $B \subseteq T$

(b)
- $A \nsubseteq T$ gdw. $1 \notin T$ oder $3 \notin T$
- $B \subseteq T$ gdw. $2 \in T$

D.h. T respektiert $A \to B$ gdw. $T \neq \{1,3\}$.

$\mathfrak{H}(A \to B)$:



In unserem obigen Anwendungsbeispiel ist $\mathfrak{H}(A \to B)$ gerade die Menge aller möglichen Kombinationen der Merkmale 1=hoher Blutdruck, 2=hohes Schlaganfallrisiko und 3=hohes Alter, welche Menschen haben können, wenn man annimmt, dass hoher Blutdruck bei hohem Alter stets hohes Schlaganfallrisiko impliziert.

1.2 Grundlegende Begriffe und Eigenschaften

Definition 1. Sei M eine Menge „formaler Merkmale“und sei $\mathfrak{L} \subset 2^M \times 2^M$ eine Liste „formaler Implikationen“auf M; für $(A,B) \in \mathfrak{L}$ schreiben wir auch $A \to B$ und sagen „A impliziert B“. A ist die **Prämisse** und B ist die **Konklusion** der **formalen Implikation**. Eine Teilmenge T von M **respektiert** $\mathfrak{L}$, falls $A \subseteq T \Rightarrow B \subseteq T$ für alle $(A,B) \in \mathfrak{L}$ gilt. $\mathfrak{H}(\mathfrak{L}) := \{T \in 2^M \mid T \text{ respektiert } \mathfrak{L}\}$ ist die Menge der **„unter $\mathfrak{L}$ möglichen Merkmalkombinationen“**.

Definition 2. Sei M eine Menge; ein **Hüllensystem** auf M ist eine Teilmenge $\mathfrak{H}$ von 2^M, die unter beliebigen Durchschnitten abgeschlossen ist, d.h. es gilt: $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H} \Rightarrow \bigcap \mathfrak{X} \in \mathfrak{H}$ bzw. $X_i \in \mathfrak{X}$ (für alle $i \in I$) $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} X_i \in \mathfrak{H}$ und $M \in \mathfrak{H}$ (da $\emptyset \subseteq \mathfrak{H} \Rightarrow M = \bigcap_M \emptyset \in \mathfrak{H}$).
Dual ist ein **Kernsystem** auf M einer Teilmenge $\mathfrak{K}$ von 2^M, die unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist, d.h. es gilt $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{K} \Rightarrow \bigcup \mathfrak{X} \in \mathfrak{K}$ bzw. $X_i \in \mathfrak{X}$ (für alle $i \in I$) $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \in \mathfrak{K}$ und $M \in \mathfrak{K}$ (da $\emptyset \subseteq \mathfrak{K} \Rightarrow \emptyset = \bigcup_M \emptyset \in \mathfrak{K}$).

Proposition 1. Sei M eine Menge „formaler Merkmale“und sei $\mathfrak{L}$ eine „Liste formaler Implikationen “auf M. Dann gilt:

(a) $\mathfrak{H}(\mathfrak{L})$ ist ein Hüllensystem auf M.

(b) Hat jede Implikation aus $\mathfrak{L}$ eine einelementige Prämisse, so ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{L})$ auch ein Kernsystem auf M.

Beweis: Übung

Beispiel 2 (zu Proposition 1(b)). Es sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $\mathfrak{L} = \{\{4\} \to \{1, 2, 3\}, \{5\} \to \{2\}\}$.

$\mathfrak{H}(\mathfrak{L})$: