ÜBUNGSBLATT 12 — MITTWOCH

Aufgabe 1 (AGS 16.31 ⋆)
Für die Verifikationsformel

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{k} \geq 0) \wedge (\mathrm{u} \geq \mathrm{k}) \\ \wedge(\mathrm{j}=\mathrm{k}) \wedge (\mathrm{s}=0)\end{array}\right\} \quad \texttt{while(j<u)\{j=j+1; s=j+s;\}} \quad \left\{\left(s=\frac{\mathrm{u}^2+\mathrm{u}-\mathrm{k}^2-\mathrm{k}}{2}\right)\right\}$$

wurden die ersten vier (korrekten) Regelanwendungen des Hoare-Kalküls in Form eines Beweisbaumes aufgeschrieben (siehe unten). Dabei sind die Ausdrücke A bis K noch unbekannt. Es gelten die Abkürzungen SV = stärkere Vorbedingung, IR = Iterationsregel und CR = Compregel.

(a) Geben Sie eine geeignete Schleifeninvariante an.

$SI = A \wedge B$

Ⓐ

#	j	s
0	k	0
1	k+1	k+1
2	k+2	(k+2) + (k+1)
N	k+N	(k+N) + ⋯ + (k+1)

$j = k+N$

$s = (k+N) + \dots + (k+1) = \sum_{i=k+1}^{k+N} i$

$\Rightarrow A := \left(s = \sum_{i=k+1}^{j} i\right)$

Ⓑ

Schleifenbedingung: $\pi = (j < u)$

letzte wahre Schleifenbed.: $j = u-1$

Wert nach letztem Schleifendurchlauf: $(j = u) =: \pi'$

$\Rightarrow B := (j \leq u)$

$$\Longrightarrow \quad SI = \left(s = \sum_{i=k+1}^{j} i\right) \wedge (j \leq u)$$

(b) Geben Sie die Ausdrücke A bis K an. Sie können die Schleifeninvariante mit SI abkürzen.

$A = D = SI \wedge (j<u)$ $\qquad \{A\}\ B\ \{C\}$ $\qquad B = j=j+1;\ s=j+s;$

$C = F = SI$

(CR)

$D = SI \wedge (j<u)$ $\qquad \{D\}\ E\ \{F\}$ $\qquad E = \{j=j+1;\ s=j+s;\}$

$F = SI$

(IR)

$G \Rightarrow H$ $\qquad H = SI$ $\qquad \{H\}$ `while(j<u){j=j+1; s=j+s;}` $\{I\}$ $\qquad I = SI \wedge \neg(j<u)$

(SV)

$J = I = SI \wedge \neg(j<u)$

$\{G\}$ `while(j<u){j=j+1; s=j+s;}` $\{J\}$ $\qquad K = SN$ $\qquad J \Rightarrow \left(s = \frac{\mathrm{u}^2+\mathrm{u}-\mathrm{k}^2-\mathrm{k}}{2}\right)$

$G = (k \geq 0) \wedge (u \geq k) \wedge (j=k) \wedge (s=0)$

(K)

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{k} \geq 0) \wedge (\mathrm{u} \geq \mathrm{k}) \\ \wedge(\mathrm{j}=\mathrm{k}) \wedge (\mathrm{s}=0)\end{array}\right\} \quad \texttt{while(j<u)\{j=j+1; s=j+s;\}} \quad \left\{\left(s=\frac{\mathrm{u}^2+\mathrm{u}-\mathrm{k}^2-\mathrm{k}}{2}\right)\right\}$$

Aufgabe 2 (AGS 16.2 c)

Zeigen Sie die Gültigkeit der Verifikationsformel

$$\{(z = (x - x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0)\} \quad x1=x1-1; \quad \{(z + y = (x - x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0)\}.$$

Konsequenzregeln

- stärkere Vorbedingung:

$$\frac{\boxed{R \Rightarrow P} \qquad \boxed{\{P\}\ \mathbf{A}\ \{Q\}}}{\boxed{\{R\}\ \mathbf{A}\ \{Q\}}}\ \text{(SV)}$$

Zuweisungsaxiom

$P\ \{(z+y = (x-(x1-1))\cdot y) \land (x1-1 \geq 0)\}$

$x1 = x1 - 1;$

$\{(z+y = (x-x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0)\}$

$(z = (x-x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0)$ R

$\Longrightarrow$

$(z+y = (x-(x1-1))\cdot y) \land (x1-1 \geq 0)$ P

(SV)

$R\ \{(z = (x-x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0)\}$

$x1 = x1 - 1;$ $\quad x = x1, \ \tau = x1-1$

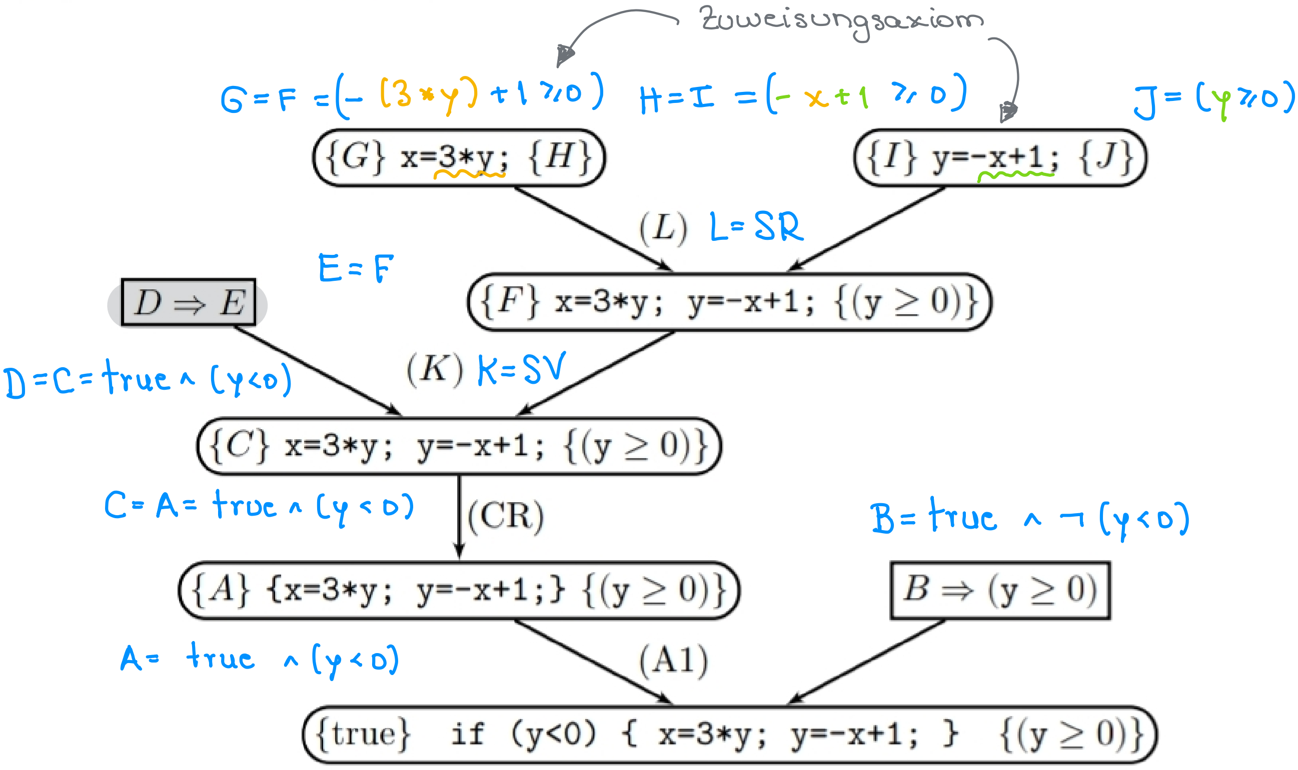
$\{(z+y = (x-x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0)\}$ $\quad = P$

$$\begin{aligned}
& (z = (x-x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0) \\
\Rightarrow\ & (z+y = (x-x1)\cdot y + y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0) \\
\Rightarrow\ & (z+y = (x-x1+1)\cdot y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0) \\
\Rightarrow\ & (z+y = (x-(x1-1))\cdot y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0) \\
\Rightarrow\ & (z+y = (x-(x1-1))\cdot y) \land (x1 > 0) \\
\Rightarrow\ & (z+y = (x-(x1-1))\cdot y) \land (x1 \geq 1) \\
\Rightarrow\ & (z+y = (x-(x1-1))\cdot y) \land (x1-1 \geq 0)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (AGS 16.29)

Die Verifikationsformel `{true} if (y<0) { x=3*y; y=-x+1; } {(y ≥ 0)}` soll mit dem Hoare-Kalkül bewiesen werden. Ein Teil eines Beweisbaums wurde unten bereits aufgeschrieben, die Ausdrücke A bis L sind jedoch noch unbekannt. Der Ausdruck true bezeichnet eine beliebige tautologische Formel, wie z. B. $(1 = 1)$. Es gelten die Abkürzungen: A1 = erste Alternativregel, CR = Compregel.

(a) Geben Sie die Ausdrücke A bis L an.



(b) Zeigen Sie schrittweise, dass $\text{true} \land (y < 0) \implies (-3 \cdot y + 1 \geq 0)$ gilt.

$$\begin{aligned}
\text{true} \land (y<0) &\implies y < 0 \\
&\implies -3 \cdot y > 0 \\
&\implies -3 \cdot y + 1 > 1 \geq 0 \\
&\implies -3 \cdot y + 1 \geq 0
\end{aligned}$$