ÜBUNGSBLATT 12 DIENSTAG

Aufgabe 1 (AGS 16.31 ⋆)

Für die Verifikationsformel

$$\left\{\begin{matrix} (\mathrm{k} \geq 0) \wedge (\mathrm{u} \geq \mathrm{k}) \\ \wedge(\mathrm{j} = \mathrm{k}) \wedge (\mathrm{s} = 0) \end{matrix}\right\} \quad \texttt{while(j<u)\{j=j+1; s=j+s;\}} \quad \left\{\left(s = \frac{\mathrm{u}^2 + \mathrm{u} - \mathrm{k}^2 - \mathrm{k}}{2}\right)\right\}$$

wurden die ersten vier (korrekten) Regelanwendungen des Hoare-Kalküls in Form eines Beweisbaumes aufgeschrieben (siehe unten). Dabei sind die Ausdrücke A bis K noch unbekannt. Es gelten die Abkürzungen SV = stärkere Vorbedingung, IR = Iterationsregel und CR = Compregel.

(a) Geben Sie eine geeignete Schleifeninvariante an.

$SI = A \wedge B$

Ⓐ

#	j	s
0	k	0
1	k+1	k+1
2	k+2	(k+2)+(k+1)
3	k+3	(k+3)+(k+2)+(k+1)
N	k+N	$\sum_{i=k+1}^{k+N} i$

$$\left.\begin{matrix} j = k+N \\ s = \sum_{i=k+1}^{k+N} i \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(s = \sum_{i=k+1}^{j} i \right) =: A$$

Ⓑ

Schleifenbedingung: $\pi = (j < u)$

letzte wahre Schleifenbed.: $j = u-1$

Wert nach letztem Schleifendurchlauf: $\pi' = (j = u)$

$\Rightarrow B = (j \leq u)$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{SI = \left(s = \sum_{i=k+1}^{j} i \wedge j \leq u \right)}}$$

(b) Geben Sie die Ausdrücke A bis K an. Sie können die Schleifeninvariante mit SI abkürzen.

$A = SI \wedge (j<u)$ $\quad \{A\}\ B\ \{C\}$ $\quad C = SI$

$B =$ j=j+1; s=j+s;

(CR)

$D = SI \wedge (j<u)$ $\quad \{D\}\ E\ \{F\}$ $\quad F = SI$

$E = \{$ j=j+1; s=j+s; $\}$

$H = SI$ $\quad$ (IR)

$G \Rightarrow H$ $\quad \{H\}$ `while(j<u){j=j+1; s=j+s;}` $\{I\}$ $\quad I = SI \wedge \neg(j<u)$

(SV) $\quad J = I = SI \wedge \neg(j<u)$

$\{G\}$ `while(j<u){j=j+1; s=j+s;}` $\{J\}$ $\quad K = SN$ $\quad J \Rightarrow \left(s = \frac{u^2+u-k^2-k}{2}\right)$

$G = (k \geq 0) \wedge (u \geq k) \wedge (j=k) \wedge (s=0)$ $\quad$ (K)

$$\left\{\begin{matrix} (\mathrm{k} \geq 0) \wedge (\mathrm{u} \geq \mathrm{k}) \\ \wedge(\mathrm{j} = \mathrm{k}) \wedge (\mathrm{s} = 0) \end{matrix}\right\} \quad \texttt{while(j<u)\{j=j+1; s=j+s;\}} \quad \left\{\left(s = \frac{\mathrm{u}^2+\mathrm{u}-\mathrm{k}^2-\mathrm{k}}{2}\right)\right\}$$

Aufgabe 2 (AGS 16.2 c)

Zeigen Sie die Gültigkeit der Verifikationsformel

$$\{(z = (x - x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0)\} \quad \texttt{x1=x1-1;} \quad \{(z + y = (x - x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0)\}.$$

$$(z = (x - x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0)$$
$$\Longrightarrow$$
$$z + y = (x - (x1 - 1))\cdot y) \land (x1 - 1 \geq 0)$$

Zuweisungsaxiom

$$\{z + y = (x - (x1 - 1))\cdot y) \land (x1 - 1 \geq 0)\}$$
$$x1 = x1 - 1;$$
$$\{(z + y = (x - x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0)\}$$

(SV)

$$\{(z = (x - x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0)\}$$
$$x1 = x1 - 1;$$
$$\{(z + y = (x - x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0)\}$$

$$(z = (x - x1)\cdot y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0)$$

$$\Rightarrow (z + y = (x - x1)\cdot y + y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0)$$

$$\Rightarrow (z + y = (x - x1 + 1)\cdot y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0)$$

$$\Rightarrow (z + y = (x - (x1 - 1))\cdot y) \land (x1 \geq 0) \land (x1 > 0)$$

$$\Rightarrow (z + y = (x - (x1 - 1)\cdot y) \land (x1 > 0)$$

$$\Rightarrow (z + y = (x - (x1 - 1)\cdot y) \land x1 \geq 1$$

$$\Rightarrow (z + y = (x - (x1 - 1)\cdot y) \land x1 - 1 \geq 0$$

Aufgabe 3 (AGS 16.29)

Die Verifikationsformel {true} `if (y<0) { x=3*y; y=-x+1; }` $\{(y \geq 0)\}$ soll mit dem Hoare-Kalkül bewiesen werden. Ein Teil eines Beweisbaums wurde unten bereits aufgeschrieben, die Ausdrücke A bis L sind jedoch noch unbekannt. Der Ausdruck true bezeichnet eine beliebige tautologische Formel, wie z. B. $(1 = 1)$. Es gelten die Abkürzungen: A1 = erste Alternativregel, CR = Compregel.

(a) Geben Sie die Ausdrücke A bis L an.

Zuweisungsaxiom

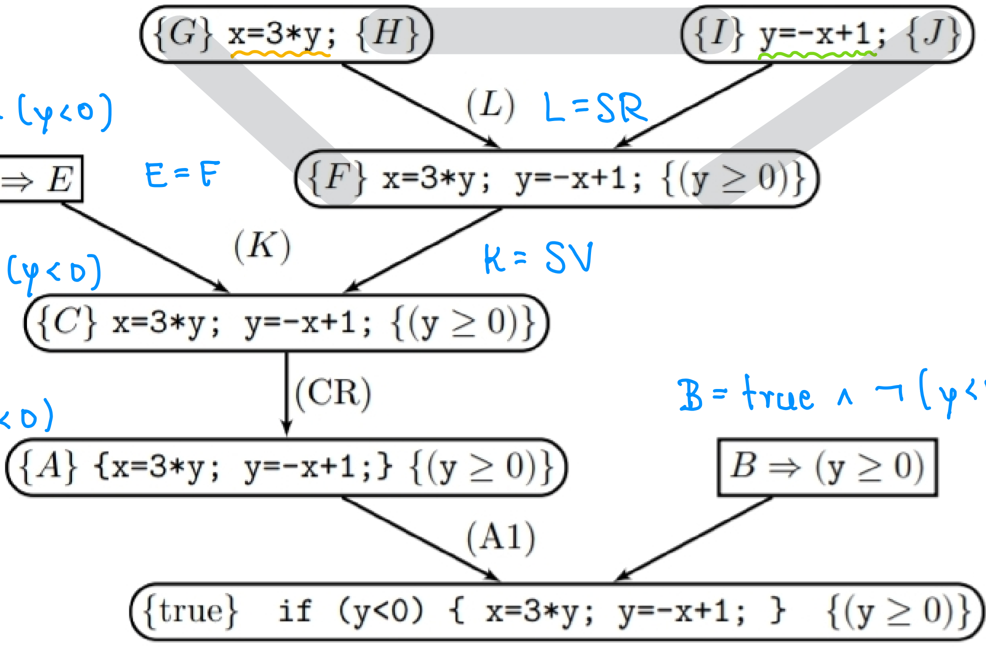
$G = F = (-(3*y) + 1 \geq 0)$ $\quad H = I = (-x+1 \geq 0)$ $\quad J = (y \geq 0)$

$D = C = \text{true} \wedge (y<0)$ $\quad L = SR$ $\quad E = F$

$C = A = \text{true} \wedge (y<0)$ $\quad K = SV$

$B = \text{true} \wedge \neg(y<0)$

$A = \text{true} \wedge (y<0)$



(b) Zeigen Sie schrittweise, dass $\text{true} \wedge (y < 0) \implies (-3 \cdot y + 1 \geq 0)$ gilt.

$$
\begin{aligned}
\text{true} \wedge (y<0) &\Rightarrow y < 0 \\
&\Rightarrow -3 \cdot y > 0 \\
&\Rightarrow -3 \cdot y + 1 > 1 \\
&\Rightarrow -3 \cdot y + 1 \geq 0
\end{aligned}
$$