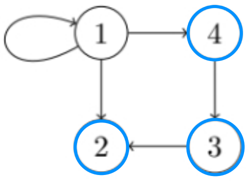
Aufgabe 1 (AGS 13.6⋆)



Gegeben sei der links abgebildete Graph.

(a) Bilden Sie die Kantenrelation von G durch ein zweistelliges Prädikat **edge** in Prolog ab.

```
1 edge(1,1).
2 edge(1,4).
3 edge(1,2).
4 edge(3,2).
5 edge(4,3).
```

$G = (V, E)$

$V = \ldots$

$E = \{ (1,1), (1,4), (1,2), (4,3), (3,2) \}$

(b) Seien u und w Knoten in G. Es gibt einen *Pfad von u nach w*, wenn (i) $u = w$ gilt, oder (ii) es einen Knoten v gibt, sodass eine Kante von u nach v und ein Pfad von v nach w existieren. Bilden Sie das Konzept Pfad von u nach w mit einem zweistelligen Prädikat **path** in Prolog ab. Nutzen Sie dazu das Prädikat **edge** aus Aufgabe (a).

```
6 path(U,U).                                  (i)
7 path(U,W) :- edge(U,V), path(V,W).          (ii)
```

(c) Geben Sie alle SLD-Refutationen für `?- path(4, X).` an. Geben Sie dabei die Belegungen für alle Variablen an. Geben Sie die Menge der möglichen Belegungen für `X` an!

```
            ?- path(4,X).
{X=4}       ?- .                              % 6
```

```
            ?- path(4,X).
            ?- edge(4,A), path(A,X).          % 7
{A=3}       ?- path(3,X).                     % 5
{X=3}       ?- .                              % 6
```

```
            ?- path(4,X).
            ?- edge(4,A), path(A,X).          % 7
{A=3}       ?- path(3,X).                     % 5
            ?- edge(3,B), path(B,X).          % 7
{B=2}       ?- path(2,X).                     % 4
{X=2}       ?- .                              % 6
```

$\Rightarrow X \in \{2, 3, 4\}$

Aufgabe 2 (AGS 13.8)

Natürliche Zahlen stellen wir in Prolog⁻ als Terme über dem einstelligen Funktionssymbol `s` und dem nullstelligen Funktionssymbol `0` dar:

```
nat(0).
nat(s(X)) :- nat(X).
```

0
1 = I = s(0)
2 = II = s(s(0))
3 = III = s(s(s(0)))

Dabei kürzen wir wie in der Vorlesung den Term für die natürliche Zahl `n` mit `<n>` ab, z.B. `s(s(s(0)))` = `<3>`. Weiterhin wurde das Prädikat `sum` besprochen:

```
sum(0, Y, Y) :- nat(Y).
sum(s(X), Y, s(S)) :- sum(X, Y, S).
```

$x + y = z \iff (x, y, z) \in sum$

$sum = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x + y = z\}$

(a) Geben Sie ein Prädikat `even` an, das für alle geraden natürlichen Zahlen gilt und für alle ungeraden natürlichen Zahlen nicht.

```
even(0).
even( s(s(X)) ) :- even(X).
```

$4-2=2, \quad 2-2=0$

$5-2=3, \quad 3-2=1$

(b) Geben Sie eine zweistellige Relation `div2` an, die für jede natürliche Zahl `n` das Paar (`<n>`, `<`$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$`>`) enthält und sonst nichts.

$\frac{N}{2} = Q \Rightarrow \frac{N+2}{2} = Q+1$

```
1 div2(0, 0).
2 div2( s(0), 0 ).
3 div2( s(s(N)), s(Q) ) :- div2( N, Q ).
```

$\frac{5}{2} = 2 \leadsto \frac{3}{2} = 1 \leadsto \frac{1}{2} = 0$

$\frac{4}{2} = 2 \leadsto \frac{2}{2} = 1 \leadsto \frac{0}{2} = 0$

(c) Geben Sie eine SDL-Refutation für `?- div2(<3>, <1>).` an.

```
?- div2( <3>, <1> ).
?- div2( <1>, 0 ).      % 3
?- .                    % 2
```

(d) *(Zusatzaufgabe)* Geben Sie eine dreistellige Relation `div` an, die für jedes Paar von natürlichen Zahlen `n` und `m`, wobei $\mathtt{m} \neq 0$, das Tripel (<n>, <m>, <$\lfloor \frac{\mathtt{n}}{\mathtt{m}} \rfloor$>) enthält und sonst nichts. Nutzen Sie dafür die dreistellige Relation `sum` aus der Vorlesung.
Hinweis: Nutzen Sie die Relation `lt` aus Zusatzaufgabe 1.

Prüfe korrekte Kodierung

lt(0, s(M)) :- nat(M).
lt(s(N), s(M)) :- lt(N,M).

$3 < 5 \rightsquigarrow 2 < 4 \rightsquigarrow 1 < 3 \rightsquigarrow 0 < 2$

$N+1 < M+1 \Leftarrow N < M$

div2 : $\frac{N+2}{2} = \boxed{Q+1}$ $\quad \frac{N}{2} = \boxed{Q}$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ div : $\frac{N}{M} = \boxed{Q+1}$ $\quad \frac{V}{M} := \frac{N-M}{M} = \boxed{Q}$

$V := N - M$
$\Leftrightarrow M + V = N$

div(0, M, 0) :- lt(0,M). Division durch Null nicht definiert
div(N, M, 0) := lt(N,M). $\frac{N}{M} = 0$ falls $N < M$, z.B. $\frac{1}{2} = 0$ (Abrundung)
div(N,M,s(Q)) :- lt(0,M), sum(M,V,N), div(V,M,Q).

(e) *(Zusatzaufgabe)* Geben Sie eine SDL-Refutation für `?- div(<3>, <2>, <1>).` an.

```
         ?- div(⟨3⟩, ⟨2⟩, ⟨1⟩)
         ?- lt(⟨0⟩, ⟨2⟩) , sum(⟨2⟩, V1, ⟨3⟩) , div(V1, ⟨2⟩, ⟨0⟩)     % 19
         ?- nat(⟨1⟩) , sum(⟨2⟩, V1, ⟨3⟩) , div(V1, ⟨2⟩, ⟨0⟩)        % 14
         ?- nat(⟨0⟩) , sum(⟨2⟩, V1, ⟨3⟩) , div(V1, ⟨2⟩, ⟨0⟩)        % 2
         ?- sum(⟨2⟩, V1, ⟨3⟩) , div(V1, ⟨2⟩, ⟨0⟩).                  % 1
         ?-* sum(⟨0⟩, V1, ⟨1⟩) , div(V1, ⟨2⟩, ⟨0⟩).                 % 4
{V1=⟨1⟩} ?- nat(⟨1⟩) , div(⟨1⟩, ⟨2⟩, ⟨0⟩).                          % 3
         ?- nat(⟨0⟩) , div(⟨1⟩, ⟨2⟩, ⟨0⟩).                          % 2
         ?- div(⟨1⟩, ⟨2⟩, ⟨0⟩).                                      % 1
         ?- lt(⟨1⟩, ⟨2⟩).                                            % 18
         ?- lt(⟨0⟩, ⟨1⟩).                                            % 15
         ?- nat(⟨0⟩).                                                % 14
         ?- .                                                        % 1
```