PROGRAMMIERUNG

ÜBUNG 7: λ-KALKÜL (TEIL 2)

Eric Kunze
eric.kunze@tu-dresden.de

INHALT

Der λ–Kalkül

Programmieren mit λ's

DER λ-KALKÜL

Atome	x, y	
Abstraktion	$(\lambda x.t)$	$(f(x) = t$, anonyme Funktion)
Applikation	$(t_1 \;\; t_2)$	

Verabredungen:

- Applikation ist *linksassoziativ*: $((t_1 \; t_2) \; t_3) = t_1 \; t_2 \; t_3$
- mehrfache Abstraktion: $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\lambda x_3.t))) = (\lambda x_1 x_2 x_3.t)$

  f(x₁, x₂, x₃) = t
- Applikation vor Abstraktion

Rechenregeln:

- β-Reduktion:

$$\mathrm{GV}(t) \cap \mathrm{FV}(s) = \emptyset \quad \rightsquigarrow (\lambda x.t)\; s \;\; \Rightarrow_\beta \;\; t[x/s]$$

- α-Konversion:

$$z \notin \mathrm{GV}(t) \cup \mathrm{FV}(t) \quad \rightsquigarrow \quad (\lambda x.t) \;\; \Rightarrow_\alpha \;\; \lambda z.t[x/z]$$

CHURCH-NUMERALS

± a $\boxed{2}$

Dadurch, dass wir im Folgenden keine Symbole mehr zulassen (d.h. $\Sigma = \emptyset$), benötigen wir eine alternative Charakterisierung dieser. Zuerst beschäftigen uns die natürlichen Zahlen.

Darstellung der natürlichen Zahlen: *Church-Numerals*

$$
\begin{aligned}
\langle 0 \rangle &= (\lambda xy \,.\, y) \\
\langle 1 \rangle &= (\lambda xy \,.\, xy) \\
\langle 2 \rangle &= (\lambda xy \,.\, x(xy)) \\
&\vdots \\
\langle n \rangle &= (\lambda xy \,.\, \underbrace{x(x \ldots (x}_{n} y) \ldots))
\end{aligned}
$$

PROGRAMMIEREN IM λ-KALKÜL

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$. Ein geschlossender Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator:** $\boxed{\langle Y \rangle = \Big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\Big)} \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.

PROGRAMMIEREN IM λ-KALKÜL

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$. Ein geschlossender Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator:** $\boxed{\langle Y \rangle = \left(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\right)} \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.
- weitere definierte λ-Terme (siehe Skript S. 198f.):

$$\langle true \rangle = (\lambda xy.x) \qquad \langle false \rangle = (\lambda xy.y)$$

$$\langle succ \rangle = (\lambda z.(\lambda xy.x(zxy))) \qquad \langle pred \rangle \langle 0 \rangle \Rightarrow^* \langle 0 \rangle$$

$$\langle succ \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n+1 \rangle \qquad \langle pred \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n-1 \rangle$$

$$\langle ite \rangle\ s\ s_1\ s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle false \rangle \end{cases}$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

AUFGABE 1 – TEIL (A)

$$
\begin{aligned}
& (\lambda f\, \underbrace{x.f\,f\,x}_{\mathrm{GV}=\{x\}})\,(\underbrace{\lambda y.x}_{\mathrm{FV}=\{x\}})\,z \\
\Rightarrow_\alpha\ & (\lambda f\, \underbrace{x_1.f\,f\,x_1}_{\mathrm{GV}=\{x_1\}})\,(\underbrace{\lambda y.x}_{\mathrm{FV}=\{x\}})\,z \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda x_1.(\lambda y.\underbrace{x}_{\mathrm{GV}=\emptyset})\,(\underbrace{\lambda y.x}_{\mathrm{FV}=\{x\}})\,x_1)\,z \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda x_1.\underbrace{x x_1}_{\mathrm{GV}=\emptyset})\,\underbrace{z}_{\mathrm{FV}=\{z\}} \\
\Rightarrow_\beta\ & xz
\end{aligned}
$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\langle F\rangle = \left(\lambda fxyz\,.\,\langle ite\rangle \left(\langle iszero\rangle\,(\langle sub\rangle xy)\right) \left(\langle add\rangle yz\right) \left(\langle succ\rangle\,(f\,(\langle pred\rangle x)\,(\langle succ\rangle y)\,(\langle mult\rangle\langle 2\rangle z))\right)\right)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle F\rangle = & \left(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\right)\ \langle F\rangle \\
\Rightarrow^{\beta} & \left(\lambda u.\langle F\rangle(uu)\right)\left(\lambda u.\langle F\rangle(uu)\right) \qquad =: \langle Y_F\rangle \\
\Rightarrow^{\beta} & \langle F\rangle\langle Y_F\rangle
\end{aligned}$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle &\Rightarrow^* \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle ite\rangle\ \underbrace{(\langle iszero\rangle\ (\langle sub\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle))}_{\Rightarrow^*\langle false\rangle}\ (\ldots) \\
&\qquad\qquad (\langle succ\rangle(\langle Y_F\rangle\underbrace{(\langle pred\rangle\langle 6\rangle)}_{\Rightarrow^*\langle 5\rangle}\underbrace{(\langle succ\rangle\langle 5\rangle)}_{\Rightarrow^*\langle 6\rangle}\underbrace{(\langle mult\rangle\langle 2\rangle\langle 3\rangle)}_{\Rightarrow^*\langle 6\rangle})) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle ite\rangle\ \underbrace{(\langle iszero\rangle(\langle sub\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle))}_{\Rightarrow^*\langle true\rangle}\ \underbrace{(\langle add\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle)}_{\Rightarrow^*\langle 12\rangle}\ (\ldots)\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ \langle 12\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle 13\rangle
\end{aligned}
$$

AUFGABE 1 – TEIL (C)

$$
\begin{aligned}
\langle G \rangle = \Bigg(\lambda gxy \,.\, \Big(& \langle ite \rangle \; (\langle iszero \rangle \; x) \\
& \quad (\langle mult \rangle \; \langle 2 \rangle \; (\langle succ \rangle y) \;) \\
& \quad \Big(\langle ite \rangle \; (\langle iszero \rangle \; y) \\
& \qquad (\langle mult \rangle \; \langle 2 \rangle \; (\langle succ \rangle x)) \\
& \qquad (\langle add \rangle \; \langle 4 \rangle \;\; g \; (\langle pred \rangle x \; \langle pred \rangle y) \;) \\
& \quad \Big) \\
& \Big) \\
\Bigg)
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 2

AUFGABE 2 – TEIL (A)

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad g(x,y) := \begin{cases} x * x & \text{für } y = 0 \\ g(2 * x, y - 1) & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \langle G \rangle = \Bigg(\lambda gxy \,.\, \Big(& \langle ite \rangle \; \big(\langle iszero \rangle \; y \big) \\ & \big(\langle mult \rangle \; x \; x \; \big) \\ & \big(g \; (\langle mult \rangle \; \langle 2 \rangle \; x) \; (\langle pred \rangle \; y) \big) \\ \Big) & \\ \Bigg) & \end{aligned}$$

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$\langle G\rangle = \left(\lambda\, gxy\,.\,\langle ite\rangle \left(\langle iszero\rangle\, y\right) \left(\langle mult\rangle\, x\, x\right) \left(g\, (\langle mult\rangle\, \langle 2\rangle\, x)\, (\langle pred\rangle\, y)\right)\right)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle G\rangle = & \left(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\right) \langle G\rangle \\
\Rightarrow^{\beta} \quad & \left(\lambda u.\langle G\rangle(uu)\right) \left(\lambda u.\langle G\rangle(uu)\right) \qquad =: \langle Y_G\rangle \\
\Rightarrow^{\beta} \quad & \langle G\rangle\langle Y_G\rangle
\end{aligned}$$

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
& \langle Y\rangle\langle G\rangle\langle 1\rangle\langle 3\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle G\rangle\langle Y_G\rangle\langle 1\rangle\langle 3\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 3\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\Big) \Big(\ldots\Big) \Big(\langle Y_G\rangle \big(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2\rangle}\big) \big(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 3\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2\rangle}\big) && \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 2\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\Big) \Big(\ldots\Big) \Big(\langle Y_G\rangle \big(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 4\rangle}\big) \big(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1\rangle}\big)\Big) && \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 4\rangle\ \langle 1\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\Big) \Big(\ldots\Big) \Big(\langle Y_G\rangle \big(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 4\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 8\rangle}\big) \big(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0\rangle}\big)\Big) && \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 8\rangle\ \langle 0\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 0\rangle}_{\Rightarrow^* \langle true\rangle}\Big) \Big(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 8\rangle\ \langle 8\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 64\rangle}\Big) \Big(\ldots\Big) && \Rightarrow^* \langle 64\rangle
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 7 (Sommer 2020)

Aufgabe 12.4.36 aus der Aufgabensammlung

AUFGABE 12.4.36

$$
\begin{aligned}
\langle pow \rangle \langle 2 \rangle = {} & \Big(\lambda nfz \,.\, n\,(\lambda gx.g(gx))\,fz\Big)\,\Big(\lambda xy\,.\,x(xy))\Big) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda xy\,.\,x(xy))\Big)\,\Big(\lambda gx.g(gx)\Big)\,f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda y\,.\,\Big(\lambda gx.g(gx)\Big)\,\Big((\lambda gx.g(gx))\;y\Big)\Big)\,f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda y\,.\,\Big(\lambda x.\Big((\lambda gx.g(gx))\,y\Big)\,\Big(((\lambda gx.g(gx))\,y)\;x\Big)\;\Big)\Big)\,f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda yx\,.\Big((\lambda gx.g(gx))\;y\Big)\,\Big(((\lambda gx.g(gx))\;y)\;x\Big)\Big)\,f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda yx\,.\Big(\lambda x.y(yx)\Big)\,\Big((\lambda x.y(yx))\;x\Big)\Big)\,f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda yx\,.\Big(\lambda x.y(yx)\Big)\,\Big(y(yx)\Big)\Big)\,f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda yx\,.y\,\Big(y\;(y\;(yx))\Big)\Big)\,f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda x\,.f\,\Big(f\;(f\;(fx))\Big)\Big)\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz\,.\,f\;(f\;(f\;(fz)\,)\,)\,)\Big) = \langle 4 \rangle
\end{aligned}
$$

AUFGABE 12.4.36

Teil (b)

$$f(n) = s^n$$

Teil (c)

$$g(n, m) = m^n$$

$$\langle pow' \rangle = \left(\lambda n \boldsymbol{m} f z . n \boldsymbol{m} f z \right)$$