Aufgabe 1 (AGS 12.4.32)

(a) Berechnen Sie die Normalform des λ-Terms $(\lambda f x.\, f\, f\, x)\ (\lambda y.\, x)\ z$, indem Sie ihn *schrittweise* reduzieren. Geben Sie dabei vor jedem Schritt für die relevanten Teilausdrücke die Mengen der gebunden bzw. frei vorkommenden Variablen an.

$$((\underbrace{\lambda f x.\, f\, f\, x}_{GV=\{x\}})\ (\underbrace{\lambda y.\, x}_{FV=\{x\}}))\ z \Rightarrow^{\alpha} (\lambda \cancel{f} x_1.\, f\, f\, x_1)\ (\lambda y.\, x)\ z$$

$$\Rightarrow^{\beta} (\lambda x_1.\, \underbrace{(\lambda y.\, x)}_{GV=\emptyset}\ \underbrace{(\lambda y.\, x)}_{FV=\{x\}}\ x_1)\ z$$

$$\Rightarrow^{\beta} (\lambda \cancel{x_1}.\, \underbrace{x \quad x_1}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{z}_{FV=\{z\}}$$

$$\Rightarrow^{\beta} x\ z \quad \ldots \text{ Normalform}$$

(b) Gegeben sei der λ-Term

$$\langle F\rangle = \Big(\lambda f x y z.\langle ite\rangle\ (\langle iszero\rangle\ (\langle sub\rangle\ x\, y))\ (\langle add\rangle\ y\, z)$$
$$\Big(\langle succ\rangle\ (f\,(\langle pred\rangle\ x)\ (\langle succ\rangle\ y)\ (\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ z))\Big)\Big)\ .$$

Berechnen Sie schrittweise die Normalform des Terms $\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle$. Schreiben Sie für jeden Aufruf von $\langle F\rangle$ jeweils zwei Zeilen: eine in der Sie die Werte der Parameter des Aufrufs protokollieren, und eine in der Sie ihre Auswertung skizzieren. Falls angebracht, führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ-Terme ein.

__Nebenrechnung:__ $\langle Y\rangle\langle F\rangle = (\lambda z.\ (\lambda u.\, z\ (u\, u))\ (\lambda u.\, z\ (u\, u)))\ \langle F\rangle$

$$\Rightarrow^{\beta} (\lambda \cancel{u}.\ \langle F\rangle\ (u\ u))\ (\lambda u.\ \langle F\rangle\ (u\ u))$$
$$=: (t_F\ t_F)$$
$$=: \langle Y_F\rangle$$

$$\Rightarrow^{\beta} \langle F\rangle\ ((\lambda u.\ \langle F\rangle\ (u\ u))\ (\lambda u.\ \langle F\rangle (u\ u)))$$
$$= \langle F\rangle\ \langle Y_F\rangle$$

$$\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle \Rightarrow^* \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle$$

$$\Rightarrow^* \langle ite\rangle \; \underbrace{(\langle iszero\rangle \; (\underbrace{\langle sub\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1\rangle}))}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle} \; (\ldots)$$

$$(\langle succ\rangle \; (\langle Y_F\rangle \; (\underbrace{\langle pred\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 5\rangle}) \; (\underbrace{\langle succ\rangle\langle 5\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 6\rangle}) \; (\underbrace{\langle mult\rangle\langle 2\rangle\langle 3\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 6\rangle})))$$

$$\Rightarrow^* \langle succ\rangle \; (\langle \underline{\underline{Y_F}}\rangle \langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle)$$

$$\Rightarrow^* \langle succ\rangle \; (\langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle)$$

$$\Rightarrow^* \langle succ\rangle \Big(\; \langle ite\rangle \; \underbrace{(\langle iszero\rangle \; (\underbrace{\langle sub\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0\rangle}))}_{\Rightarrow^* \langle true\rangle}$$

$$(\underbrace{\langle add\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 12\rangle})$$

$$(\ldots) \; \Big)$$

$$\Rightarrow^* \langle succ\rangle\langle 12\rangle$$

$$\Rightarrow^* \langle 13\rangle$$

(c) Gegeben sei die folgende Haskell-Funktion:

```
g :: Int -> Int -> Int
g 0 y = 2 * (y + 1)
g x 0 = 2 * (x + 1)
g x y = 4 + g (x - 1) (y - 1)
```

Haskell-Ergebnis

Geben Sie einen λ-Term $\langle G\rangle$ an, so dass $\langle Y\rangle\langle G\rangle\langle x\rangle\langle y\rangle \Rightarrow^* \langle \mathrm{g}\ x\ y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

Lambda-Ergebnis

$$
\begin{aligned}
\langle G\rangle = (\lambda g x y.\ (\langle ite\rangle\ & (\langle iszero\rangle\ x) \\
& (\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ (\langle succ\rangle\ y)) \\
& (\langle ite\rangle\ (\langle iszero\rangle\ y) \\
& \qquad (\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ (\langle succ\rangle\ x)) \\
& \qquad (\langle add\rangle\ \langle 4\rangle\ (g\ (\langle pred\rangle\ x)\ (\langle pred\rangle\ y))) \\
&) \\
) \\
)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (AGS 12.4.21)

(a) Eine Funktion $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
g(x, y) &= x \cdot x && \text{für } y = 0 \\
g(x, y) &= g(2 \cdot x, y - 1) && \text{für } y \geq 1
\end{aligned}
$$

Geben Sie zur Funktion g den zugehörigen λ-Term $\langle G \rangle$ an, so dass $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle \Rightarrow^* \langle g(x, y) \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

$$
\begin{aligned}
\langle G \rangle = (\lambda g\, x\, y.\ (\langle \text{ite} \rangle\ &(\langle \text{iszero} \rangle\ y) \\
&(\langle \text{mult} \rangle\ x\ x) \\
&(g\ (\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle\ x)\ (\langle \text{pred} \rangle\ y))\ ) \\
)\qquad&
\end{aligned}
$$

(b) Berechnen Sie für den in Aufgabe 2 (a) definierten λ-Term $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle$.

Nebenrechnung:

!

$$
\begin{aligned}
\langle Y \rangle \langle G \rangle &= (\cancel{\lambda z}.\ (\lambda u.\ z\ (u\, u))\ (\lambda u. z (u\, u)))\ \langle G \rangle \\
&\Rightarrow_\beta (\cancel{\lambda u}.\ \langle G \rangle\ (u\ u))\ (\lambda u.\ \langle G \rangle\ (u\, u)) =: \langle Y_G \rangle \\
&\Rightarrow_\beta \langle G \rangle ((\lambda u.\ \langle G \rangle\ (u\ u))\ (\lambda u.\ \langle G \rangle\ (u\, u))) \\
&= \langle G \rangle \langle Y_G \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle \\
\Rightarrow^*\ & \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle \\
\Rightarrow^*\ & \langle \text{ite} \rangle\ (\underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle})\ (\ldots)\ (\langle Y_G \rangle\ (\underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle})(\underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle})) \\
\Rightarrow^*\ & \langle Y_G \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle \\
\Rightarrow^*\ & \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle \\
\Rightarrow^*\ & \langle \text{ite} \rangle\ (\underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle})\ (\ldots)\ (\langle Y_G \rangle\ (\underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 4 \rangle})\ (\underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1 \rangle})) \\
\Rightarrow^*\ & \langle Y_G \rangle \langle 4 \rangle \langle 1 \rangle \\
\Rightarrow^*\ & \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 4 \rangle \langle 1 \rangle \\
\Rightarrow^*\ & \langle \text{ite} \rangle\ (\underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle})\ (\ldots)\ (\langle Y_G \rangle\ (\underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 4 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 8 \rangle})\ (\underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0 \rangle})) \\
\Rightarrow^*\ & \langle Y_G \rangle \langle 8 \rangle \langle 0 \rangle \\
\Rightarrow^*\ & \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 8 \rangle \langle 0 \rangle \\
\Rightarrow^*\ & \langle \text{ite} \rangle\ (\underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 0 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle})\ (\underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 8 \rangle \langle 8 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 64 \rangle})\ (\ldots) \\
\Rightarrow^*\ & \langle 64 \rangle \quad /\!/
\end{aligned}
$$