

# PROGRAMMIERUNG

## ÜBUNG 7: $\lambda$ -KALKÜL (TEIL 2)

---

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

1. Funktionale Programmierung
  - 1.1 Einführung in Haskell: Listen
  - 1.2 Algebraische Datentypen
  - 1.3 Funktionen höherer Ordnung
  - 1.4 Typpolymorphie & Unifikation
  - 1.5 Beweis von Programmeigenschaften
  - 1.6  **$\lambda$ -Kalkül**
2. Logikprogrammierung
3. Implementierung einer imperativen Programmiersprache
4. Verifikation von Programmeigenschaften
5.  $H_0$  – ein einfacher Kern von Haskell

# Der $\lambda$ -Kalkül

*Programmieren mit  $\lambda$ 's*

---

# DER $\lambda$ -KALKÜL

<b>Atome</b>	$x, y$	
<b>Abstraktion</b>	$(\lambda x. t)$	$(f(x) = t, \text{ anonyme Funktion})$
<b>Applikation</b>	$(t_1 t_2)$	$\uparrow$

## Verabredungen:

- ▶ Applikation ist *linksassoziativ*:  $((t_1 t_2) t_3) = t_1 t_2 t_3$
- ▶ mehrfache Abstraktion:  $(\lambda x_1. (\lambda x_2. (\lambda x_3. t))) = (\lambda x_1 x_2 x_3. t)$
- ▶ Applikation vor Abstraktion  $f(x_1, x_2, x_3) = t$

## Rechenregeln:

- ▶  $\beta$ -Reduktion:

$$\underline{GV(t) \cap FV(s) = \emptyset} \rightsquigarrow (\lambda x. t) s \Rightarrow_{\beta} t[x/s]$$

- ▶  $\alpha$ -Konversion:

$$z \notin GV(t) \cup FV(t) \rightsquigarrow (\lambda x. t) \Rightarrow_{\alpha} \lambda z. t[x/z]$$

+ 1 0

Dadurch, dass wir im Folgenden keine Symbole mehr zulassen (d.h.  $\Sigma = \emptyset$ ), benötigen wir eine alternative Charakterisierung dieser. Zuerst beschäftigen uns die natürlichen Zahlen.

**Darstellung der natürlichen Zahlen:** Church-Numerals

$$\langle 0 \rangle = (\lambda xy . \underline{y})$$

$$\langle 1 \rangle = (\lambda xy . \underline{xy})$$

$$\langle 2 \rangle = (\lambda xy . \underline{x(xy)})$$

⋮

$$\langle n \rangle = (\lambda xy . \underbrace{x(x \dots (xy) \dots)}_n)$$

# PROGRAMMIEREN IM $\lambda$ -KALKÜL

- ▶ Ein  $t \in \Sigma(\lambda)$  heißt **geschlossener Term**, falls  $FV(t) = \emptyset$ . Ein geschlossener Term heißt auch **Kombinator**.
- ▶ **Fixpunktkombinator**:  $\langle Y \rangle = \left( \lambda z. (\lambda u. z(uu)) (\lambda u. z(uu)) \right) \in \lambda(\emptyset)$
- ▶ Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.

# PROGRAMMIEREN IM $\lambda$ -KALKÜL

- ▶ Ein  $t \in \Sigma(\lambda)$  heißt **geschlossener Term**, falls  $FV(t) = \emptyset$ . Ein geschlossener Term heißt auch **Kombinator**.

- ▶ **Fixpunktkombinator:**  $\langle Y \rangle = (\lambda z. (\lambda u. z(uu)) (\lambda u. z(uu))) \in \lambda(\emptyset)$

- ▶ Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.

- ▶ weitere definierte  $\lambda$ -Terme (siehe Skript S. 198f.):

$$\begin{array}{l} \langle \text{true} \rangle = (\lambda xy. x) \\ \langle \text{succ} \rangle = (\lambda z. (\lambda xy. x(zxy))) \\ \langle \text{succ} \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n + 1 \rangle \end{array} \quad \begin{array}{l} \langle \text{false} \rangle = (\lambda xy. y) \\ \langle \text{pred} \rangle \langle 0 \rangle \Rightarrow^* \langle 0 \rangle \\ \langle \text{pred} \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n - 1 \rangle \end{array}$$

$$\langle \text{ite} \rangle s s_1 s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle \\ s_2 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle \end{cases}$$

# Übungsblatt 7

## *Aufgabe 1*

---



# AUFGABE 1 – TEIL (A)

$$\begin{aligned} & (\underbrace{\lambda f x. f f x}_{GV=\{x\}}) (\underbrace{\lambda y. x}_{FV=\{x\}}) z \\ \Rightarrow_{\alpha} & (\underbrace{\lambda f x_1. f f x_1}_{GV=\{x_1\}}) (\underbrace{\lambda y. x}_{FV=\{x\}}) z \\ \Rightarrow_{\beta} & (\lambda x_1. (\underbrace{\lambda y. x}_{GV=\emptyset}) (\underbrace{\lambda y. x}_{FV=\{x\}}) x_1) z \\ \Rightarrow_{\beta} & (\lambda x_1. \underbrace{xx_1}_{GV=\emptyset}) \underbrace{z}_{FV=\{z\}} \\ \Rightarrow_{\beta} & xz \end{aligned}$$

## AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\langle F \rangle = \left( \lambda fxyz . \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle \left( \langle sub \rangle xy \right) \left( \langle add \rangle yz \right) \left( \langle succ \rangle \left( f \left( \langle pred \rangle x \right) \left( \langle succ \rangle y \right) \left( \langle mult \rangle \langle 2 \rangle z \right) \right) \right) \right) \right)$$

**Nebenrechnung:** Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle F \rangle &= \left( \lambda z . \left( \lambda u . z(uu) \right) \left( \lambda u . z(uu) \right) \right) \langle F \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \left( \lambda u . \langle F \rangle(uu) \right) \left( \lambda u . \langle F \rangle(uu) \right) \quad =: \langle Y_F \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \end{aligned}$$

# AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle &\Rightarrow^* \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle \\ &\Rightarrow^* \langle \text{ite} \rangle \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle \text{sub} \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \langle \dots \rangle \\ &\quad \langle \text{succ} \rangle \langle Y_F \rangle \underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 6 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 5 \rangle} \underbrace{\langle \text{succ} \rangle \langle 5 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle} \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle} \rangle \\ &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle \langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle \\ &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle \\ &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle \langle \text{ite} \rangle \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle \text{sub} \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle} \underbrace{\langle \text{add} \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 12 \rangle} \langle \dots \rangle \\ &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle \langle 12 \rangle \\ &\Rightarrow^* \langle 13 \rangle \end{aligned}$$

## AUFGABE 1 – TEIL (C)

$$\langle G \rangle = \left( \lambda gxy . \left( \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle x \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( \langle mult \rangle \langle 2 \rangle \left( \langle succ \rangle y \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle y \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left( \langle mult \rangle \langle 2 \rangle \left( \langle succ \rangle x \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( \langle add \rangle \langle 4 \rangle g \left( \langle pred \rangle x \right) \left( \langle pred \rangle y \right) \right) \right) \right) \right)$$

# Übungsblatt 7

## *Aufgabe 2*

---

## AUFGABE 2 – TEIL (A)

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad g(x,y) := \begin{cases} x * x & \text{für } y = 0 \\ g(2 * x, y - 1) & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\langle G \rangle = \left( \lambda gxy . \left( \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle y \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( \langle mult \rangle x x \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( g \left( \langle mult \rangle \langle 2 \rangle x \right) \left( \langle pred \rangle y \right) \right) \right) \right)$$

## AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$\langle G \rangle = \left( \lambda gxy . \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle y \right) \left( \langle mult \rangle x x \right) \left( g \left( \langle mult \rangle \langle 2 \rangle x \right) \left( \langle pred \rangle y \right) \right) \right)$$

**Nebenrechnung:** Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle G \rangle &= \left( \lambda z . (\lambda u . z(uu)) (\lambda u . z(uu)) \right) \langle G \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \left( \lambda u . \langle G \rangle (uu) \right) \left( \lambda u . \langle G \rangle (uu) \right) \quad =: \langle Y_G \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \end{aligned}$$

## AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$\begin{aligned}
 & \langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left( \dots \right) \left( \langle Y_G \rangle \left( \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle} \right) \right) \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left( \dots \right) \left( \langle Y_G \rangle \left( \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 4 \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1 \rangle} \right) \right) \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 4 \rangle \langle 1 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left( \dots \right) \left( \langle Y_G \rangle \left( \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 4 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 8 \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0 \rangle} \right) \right) \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 8 \rangle \langle 0 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 0 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 8 \rangle \langle 8 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 64 \rangle} \right) \left( \dots \right) \Rightarrow^* \langle 64 \rangle
 \end{aligned}$$



# Übungsblatt 7 (Sommer 2020)

*Aufgabe 12.4.36 aus der Aufgabensammlung*

---

## AUFGABE 12.4.36

$$\begin{aligned}\langle pow \rangle 2 &= (\lambda n f z . n (\lambda g x . g(gx)) fz) (\lambda x y . x(xy)) \\ &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda x y . x(xy))) (\lambda g x . g(gx)) fz \\ &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y . (\lambda g x . g(gx)) ((\lambda g x . g(gx)) y))) fz \\ &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y . (\lambda x . ((\lambda g x . g(gx)) y) (((\lambda g x . g(gx)) y) x)))) fz \\ &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . ((\lambda g x . g(gx)) y) (((\lambda g x . g(gx)) y) x))) fz \\ &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . (\lambda x . y(yx)) ((\lambda x . y(yx)) x))) fz \\ &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . (\lambda x . y(yx)) (y(yx)))) fz \\ &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . y (y (y(yx)))) fz \\ &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda x . f (f (f (fx)))) z \\ &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . f (f (f (fz)))) = \langle 4 \rangle\end{aligned}$$

Teil (b)

$$f(n) = s^n$$

Teil (c)

$$g(n, m) = m^n$$

$$\langle \text{pow}' \rangle = (\lambda n \text{mfz}. n \text{mfz})$$