Aufgabe 1 (AGS 12.4.32)

(a) Berechnen Sie die Normalform des λ-Terms $(\lambda f x.\, f\, f\, x)\ (\lambda y.\, x)\ z$, indem Sie ihn *schrittweise* reduzieren. Geben Sie dabei vor jedem Schritt für die relevanten Teilausdrücke die Mengen der gebunden bzw. frei vorkommenden Variablen an.

$$((\underline{\lambda f}\, x.\ \underbrace{f\ f\ x}_{GV=\{x\}})\ \underbrace{(\lambda y.\ x)}_{FV=\{x\}})\ z$$

$$\Rightarrow^{\alpha}\ (\cancel{\lambda f}\ \underbrace{x_1.\ f\ f\ x_1}_{GV=\{x_1\}})\ \underbrace{(\lambda y.x)}_{FV=\{x\}}\ z$$

$$\Rightarrow^{\beta}\ (\lambda x_1.\ \underbrace{(\lambda y.\,x)}_{GV=\emptyset}\ \underbrace{(\lambda y.\,x)}_{FV=\{x\}}\ x_1\ )\ z$$

$$\Rightarrow^{\beta}\ (\underline{\lambda x_1.}\ \underbrace{x\ \ x_1}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{z}_{FV=\{z\}}$$

$$\Rightarrow^{\beta}\ x\ \ z \qquad \ldots\ \text{Normalform}$$

(b) Gegeben sei der λ-Term

$$\langle F\rangle = \Big(\lambda fxyz.\langle ite\rangle\ (\langle iszero\rangle\ (\langle sub\rangle\ x\, y))\ (\langle add\rangle\ y\, z)$$
$$\big(\langle succ\rangle\ (f\,(\langle pred\rangle\ x)\,(\langle succ\rangle\ y)\,(\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ z))\big)\Big)\ .$$

Berechnen Sie schrittweise die Normalform des Terms $\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle$. Schreiben Sie für jeden Aufruf von $\langle F\rangle$ jeweils zwei Zeilen: eine in der Sie die Werte der Parameter des Aufrufs protokollieren, und eine in der Sie ihre Auswertung skizzieren. Falls angebracht, führen Sie im Rechenprozess zweckmäßige Abkürzungen der λ-Terme ein.

<u>Nebenrechnung</u>:

$$\langle Y\rangle\langle F\rangle = (\underline{\lambda z}.\,(\lambda u.\, z\ (u\ u))\,(\lambda u.\ \ (u u)))\ \underline{\langle F\rangle}$$

$$\Rightarrow^{\beta}\ (\underline{\lambda u}.\ \langle F\rangle\ (u\ \ u))\ \underbrace{(\lambda u.\ \langle F\rangle\ (u\ u))}_{t_F}$$

$$=:\ (\ t_F\ \ \ t_F)$$

$$=:\ \langle Y_F\rangle$$

$$\Rightarrow^{\beta}\ \langle F\rangle\ \ (t_F\ \ t_F)\ \ =\ \langle F\rangle\langle Y_F\rangle$$

$$\langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle$$

$$\Rightarrow^* \quad \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle$$

$$\Rightarrow^* \quad \langle ite \rangle \; \underbrace{(\langle iszero \rangle \; (\underbrace{\langle sub \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1 \rangle}))}_{\Rightarrow^* \langle false \rangle} \quad (\ldots)$$

$$(\langle succ \rangle \; (\langle Y_F \rangle \; (\underbrace{\langle pred \rangle \langle 6 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 5 \rangle}) (\underbrace{\langle succ \rangle \langle 5 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle}) \; (\underbrace{\langle mult \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle})))$$

$$\Rightarrow^* \quad \langle succ \rangle \; (\langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle)$$

$$\Rightarrow^* \quad \langle succ \rangle \; (\langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle)$$

$$\Rightarrow^* \quad \langle succ \rangle \; (\; \langle ite \rangle \; \underbrace{(\langle iszero \rangle \; (\underbrace{\langle sub \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0 \rangle}))}_{\Rightarrow^* \langle true \rangle}$$

$$(\underbrace{\langle add \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 12 \rangle}) \quad (\ldots) \;)$$

$$\Rightarrow^* \quad \langle succ \rangle \; \langle 12 \rangle$$

$$\Rightarrow^* \quad \langle 13 \rangle$$

(c) Gegeben sei die folgende Haskell-Funktion:

```
g :: Int -> Int -> Int
g 0 y = 2 * (y + 1)
g x 0 = 2 * (x + 1)
g x y = 4 + g (x - 1) (y - 1)
```

Geben Sie einen λ-Term $\langle G \rangle$ an, so dass $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle \Rightarrow^* \langle \mathrm{g}\ x\ y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\langle G \rangle = (\lambda gxy . (\langle ite \rangle \; (\langle iszero \rangle \; x)$$
$$(\langle mult \rangle \; \langle 2 \rangle \; (\langle succ \rangle \; y))$$
$$(\langle ite \rangle \; (\langle iszero \rangle \; y)$$
$$(\langle mult \rangle \; \langle 2 \rangle \; (\langle succ \; x \rangle))$$
$$(\langle add \rangle \; \langle 4 \rangle \; (g \; (\langle pred \rangle \; x) \; (\langle pred \rangle \; y)))$$
$$)$$
$$)$$
$$)$$

$\langle Y_G \rangle \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle$

Aufgabe 2 (AGS 12.4.21)

(a) Eine Funktion $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

$$g(x,y) = x \cdot x \qquad \text{für } y = 0$$
$$g(x,y) = g(2 \cdot x, y-1) \qquad \text{für } y \geq 1$$

Geben Sie zur Funktion g den zugehörigen λ-Term $\langle G \rangle$ an, so dass $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle \Rightarrow^* \langle g(x,y) \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\langle G \rangle = \Big(\lambda g x y . \big(\langle ite \rangle \; (\langle iszero \rangle \; y) \; (\langle mult \rangle \; x \; x) \; (g \; (\langle mult \rangle \langle 2 \rangle x) \; (\langle pred \rangle \; y)) \big) \Big)$$

(b) Berechnen Sie für den in Aufgabe 2 (a) definierten λ-Term $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle$.

Nebenrechnung:

$$\langle Y \rangle \langle G \rangle = (\lambda z. \; (\lambda u. \; z \; (u \; u)) \; (\lambda u. \; z \; (u \; u))) \; \langle G \rangle$$
$$\Rightarrow^\beta (\lambda u. \; \langle G \rangle \; (u \; u)) (\lambda u. \; \langle G \rangle \; (u \; u)) =: \langle Y_G \rangle$$
$$\Rightarrow^\beta \langle G \rangle \; (\lambda u. \langle G \rangle \; (u \; u)) (\lambda u. \langle G \rangle \; (u \; u)))$$
$$= \langle G \rangle \langle Y_G \rangle$$

$$\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle$$
$$\Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle$$
$$\Rightarrow^* \langle ite \rangle \; \underbrace{(\langle iszero \rangle \langle 3 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle false \rangle} \; (\ldots) \; (\langle Y_G \rangle \; \underbrace{(\langle mult \rangle \langle 2 \rangle \langle 1 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle} (\underbrace{\langle pred \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle}))$$
$$\Rightarrow^* \langle Y_G \rangle \; \langle 2 \rangle \; \langle 2 \rangle$$
$$\Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \; \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle$$

$\vdots$ DIY

$$\Rightarrow^* \langle Y_G \rangle \; \langle 8 \rangle \langle 0 \rangle$$
$$\Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \; \langle 8 \rangle \langle 0 \rangle$$
$$\Rightarrow^* \langle ite \rangle \; \underbrace{(\langle iszero \rangle \langle 0 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle true \rangle} \; \underbrace{(\langle mult \rangle \; \langle 8 \rangle \langle 8 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 64 \rangle} \; (\ldots)$$
$$\Rightarrow^* \langle 64 \rangle \; //$$