PROGRAMMIERUNG

ÜBUNG 7: λ-KALKÜL (TEIL 2)

Eric Kunze
eric.kunze@tu-dresden.de

INHALT

Der λ–Kalkül

Programmieren mit λ's

DER λ-KALKÜL

Atome	x, y	
Abstraktion	$(\lambda x.t)$	($f(x) = t$, anonyme Funktion)
Applikation	$(t_1 \;\; t_2)$	

Verabredungen:

- Applikation ist *linksassoziativ*: $((t_1\, t_2)\, t_3) = t_1\, t_2\, t_3$
- mehrfache Abstraktion: $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\lambda x_3.t))) = (\lambda x_1 x_2 x_3.t)$
- Applikation vor Abstraktion

Rechenregeln:

- β-Reduktion:

$$\mathrm{GV}(t) \cap \mathrm{FV}(s) = \emptyset \quad \leadsto (\lambda x.t)\; s \;\; \Rightarrow_\beta \;\; t[x/s]$$

- α-Konversion:

$$z \notin \mathrm{GV}(t) \cup \mathrm{FV}(t) \quad \leadsto \quad (\lambda x.t) \;\; \Rightarrow_\alpha \;\; \lambda z.t[x/z]$$

CHURCH-NUMERALS

Dadurch, dass wir im Folgenden keine Symbole mehr zulassen (d.h. $\Sigma = \emptyset$), benötigen wir eine alternative Charakterisierung dieser. Zuerst beschäftigen uns die natürlichen Zahlen.

Darstellung der natürlichen Zahlen: *Church-Numerals*

$$
\begin{aligned}
\langle 0 \rangle &= (\lambda xy \,.\, y) \\
\langle 1 \rangle &= (\lambda xy \,.\, xy) \\
\langle 2 \rangle &= (\lambda xy \,.\, x(xy)) \\
&\vdots \\
\langle n \rangle &= (\lambda xy \,.\, \underbrace{x(x \ldots (x}_{n} y) \ldots))
\end{aligned}
$$

PROGRAMMIEREN IM λ-KALKÜL

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$. Ein geschlossender Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator:** $\boxed{\langle Y \rangle = \Big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\Big)} \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.

PROGRAMMIEREN IM λ-KALKÜL

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$. Ein geschlossender Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator:** $\boxed{\langle Y \rangle = \Big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\Big)} \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.
- weitere definierte λ-Terme (siehe Skript S. 198f.):

$$
\begin{aligned}
\langle true \rangle &= (\lambda xy.x) & \langle false \rangle &= (\lambda xy.y) \\
\langle succ \rangle &= (\lambda z.(\lambda xy.x(zxy))) & \langle pred \rangle \langle 0 \rangle &\Rightarrow^* \langle 0 \rangle \\
\langle succ \rangle \langle n \rangle &\Rightarrow^* \langle n+1 \rangle & \langle pred \rangle \langle n \rangle &\Rightarrow^* \langle n-1 \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\langle ite \rangle\ s\ s_1\ s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle false \rangle \end{cases}
$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

AUFGABE 1 – TEIL (A)

$$
\begin{aligned}
& (\lambda f\, \underbrace{x.f\ f\ x}_{\mathrm{GV}=\{x\}})\ (\underbrace{\lambda y.x}_{\mathrm{FV}=\{x\}})\ z \\
\Rightarrow_\alpha\ & (\lambda f\, \underbrace{x_1.f\ f\ x_1}_{\mathrm{GV}=\{x_1\}})\ (\underbrace{\lambda y.x}_{\mathrm{FV}=\{x\}})\ z \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda x_1.(\lambda y.\underbrace{x}_{\mathrm{GV}=\emptyset})\ (\underbrace{\lambda y.x}_{\mathrm{FV}=\{x\}})\ x_1)\ z \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda x_1.\underbrace{x x_1}_{\mathrm{GV}=\emptyset})\ \underbrace{z}_{\mathrm{FV}=\{z\}} \\
\Rightarrow_\beta\ & xz
\end{aligned}
$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\langle F \rangle = \left(\lambda fxyz \, . \, \langle ite \rangle \, \left(\langle iszero \rangle \, (\langle sub \rangle xy) \right) \, \left(\langle add \rangle yz \right) \, \left(\langle succ \rangle \, (f \, (\langle pred \rangle x) \, (\langle succ \rangle y) \, (\langle mult \rangle \langle 2 \rangle z)) \right) \right)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned}
\langle Y \rangle \langle F \rangle = \; & \left(\lambda z. \, (\lambda u.z(uu)) \, (\lambda u.z(uu)) \right) \langle F \rangle \\
\Rightarrow^{\beta} \; & \left(\lambda u.\langle F \rangle (uu) \right) \left(\lambda u.\langle F \rangle (uu) \right) \qquad =: \langle Y_F \rangle \\
\Rightarrow^{\beta} \; & \langle F \rangle \langle Y_F \rangle
\end{aligned}$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle &\Rightarrow^* \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle ite\rangle\ \underbrace{(\langle iszero\rangle\ (\langle sub\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle))}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\ (\ldots) \\
&\qquad\qquad (\langle succ\rangle(\langle Y_F\rangle\underbrace{(\langle pred\rangle\langle 6\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 5\rangle}\underbrace{(\langle succ\rangle\langle 5\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 6\rangle}\underbrace{(\langle mult\rangle\langle 2\rangle\langle 3\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 6\rangle})) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle ite\rangle\ \underbrace{(\langle iszero\rangle(\langle sub\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle))}_{\Rightarrow^* \langle true\rangle}\ \underbrace{(\langle add\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 12\rangle}\ (\ldots)\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ \langle 12\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle 13\rangle
\end{aligned}
$$

AUFGABE 1 – TEIL (C)

$$
\begin{aligned}
\langle G \rangle = \Bigg(\lambda gxy \,.\, \Big(&\langle ite \rangle \; (\langle iszero \rangle \; x) \\
&\quad (\langle mult \rangle \; \langle 2 \rangle \; (\langle succ \rangle y) \,) \\
&\quad \Big(\langle ite \rangle \; (\langle iszero \rangle \; y) \\
&\qquad\quad (\langle mult \rangle \; \langle 2 \rangle \; (\langle succ \rangle x)) \\
&\qquad\quad (\langle add \rangle \; \langle 4 \rangle \;\; g \; (\langle pred \rangle x \; \langle pred \rangle y) \,) \\
&\quad \Big) \\
&\Big) \\
\Bigg)
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 2

AUFGABE 2 – TEIL (A)

$$g\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \quad \text{mit} \quad g(x,y) := \begin{cases} x * x & \text{für } y = 0 \\ g(2*x, y-1) & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\langle G\rangle = \Bigg(\lambda gxy\,.\,\Bigg(\langle ite\rangle\ \Big(\langle iszero\rangle\ y\Big)\ \Big(\langle mult\rangle\ x\ x\Big)\ \Big(g\ (\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ x)\ (\langle pred\rangle\ y)\Big)\Bigg)\Bigg)$$

$$\langle G\rangle = \left(\lambda\, gxy\, .\, \langle ite\rangle\, \left(\langle iszero\rangle\, y\right)\, \left(\langle mult\rangle\, x\, x\right)\, \left(g\, (\langle mult\rangle\, \langle 2\rangle\, x)\, (\langle pred\rangle\, y)\right)\right)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle G\rangle = &\ \left(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\right)\ \langle G\rangle \\
\Rightarrow^{\beta} &\ \left(\lambda u.\langle G\rangle(uu)\right)\ \left(\lambda u.\langle G\rangle(uu)\right) \qquad =: \langle Y_G\rangle \\
\Rightarrow^{\beta} &\ \langle G\rangle\langle Y_G\rangle
\end{aligned}$$

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
& \langle Y\rangle\langle G\rangle\langle 1\rangle\langle 3\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle G\rangle\langle Y_G\rangle\langle 1\rangle\langle 3\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 3\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\Big)\ \Big(\ldots\Big)\ \Big(\langle Y_G\rangle\ \big(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2\rangle}\big)\ \big(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 3\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2\rangle}\big) \quad \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 2\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\Big)\ \Big(\ldots\Big)\ \Big(\langle Y_G\rangle\ \big(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 4\rangle}\big)\ \big(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1\rangle}\big)\Big) \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 4\rangle\ \langle 1\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\Big)\ \Big(\ldots\Big)\ \Big(\langle Y_G\rangle\ \big(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 4\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 8\rangle}\big)\ \big(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0\rangle}\big)\Big) \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 8\rangle\ \langle 0\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 0\rangle}_{\Rightarrow^* \langle true\rangle}\Big)\ \Big(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 8\rangle\ \langle 8\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 64\rangle}\Big)\ \Big(\ldots\Big) \qquad \Rightarrow^* \langle 64\rangle
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 7 (Sommer 2020)

Aufgabe 12.4.36 aus der Aufgabensammlung

AUFGABE 12.4.36

$$
\begin{aligned}
\langle pow\rangle\langle 2\rangle = & \Big(\lambda nfz\,.\,n\,(\lambda gx.g(gx))\,fz\Big)\,\Big(\lambda xy\,.\,x(xy)\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} & \Big(\lambda fz\,.\,\big(\lambda xy\,.\,x(xy)\big)\,\big(\lambda gx.g(gx)\big)\,f\;z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda y\,.\,\big(\lambda gx.g(gx)\big)\,\big((\lambda gx.g(gx))\,y\big)\Big)\,f\;z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda y\,.\,\Big(\lambda x.\big((\lambda gx.g(gx))\,y\big)\,\big(((\lambda gx.g(gx))\,y)\;x\big)\,\Big)\Big)\,f\;z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda yx\,.\big((\lambda gx.g(gx))\,y\big)\,\big(((\lambda gx.g(gx))\,y)\;x\big)\Big)\,f\;z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda yx\,.\big(\lambda x.y(yx)\big)\,\big((\lambda x.y(yx))\;x\big)\Big)\,f\;z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda yx\,.\big(\lambda x.y(yx)\big)\,\big(y(yx)\big)\Big)\,f\;z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda yx\,.y\,\big(y\;(y\;(yx))\big)\Big)\,f\;z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda x\,.f\,\big(f\;(f\;(fx))\big)\Big)\;z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} & \Big(\lambda fz\,.\,f\;(f\;(f\;(fz)\,)\,)\,)\Big) = \langle 4\rangle
\end{aligned}
$$

Teil (b)

$$f(n) = s^n$$

Teil (c)

$$g(n, m) = m^n$$

$$\langle pow' \rangle = \left(\lambda n\mathbf{m}fz.n\mathbf{m}fz\right)$$