Aufgabe 1 (AGS 12.4.1 ⋆)

Mittwoch

(a) Bestimmen Sie für jeden der folgenden λ-Terme t die Mengen $FV(t)$ und $GV(t)$:

- $(\lambda x.x\ y)\ (\lambda y.y)$

$\lambda x.\ x\ y \qquad \lambda y.\ y$

$$GV(\underbrace{(\lambda x.\ x y)}_{t_1}\underbrace{(\lambda y.y)}_{t_2}) = GV((\lambda x.\underbrace{xy}_{t'})) \cup GV((\lambda y.y))$$
$$= GV(xy) \cup \{x\} \cup GV(y) \cup \{y\}$$
$$= GV(x) \cup GV(y) \cup \{x\} \cup GV(y) \cup \{y\}$$
$$= \emptyset \cup \emptyset \cup \{x\} \cup \emptyset \cup \{y\}$$
$$= \{x, y\}$$

$FV(\dots) = \{y\}$

- $(\lambda x.(\lambda y.z\ (\lambda z.z\ (\lambda x.y))))$

$GV = \{x, y, z\} \qquad FV = \{z\}$

- $(\lambda x.(\lambda y.x\ z\ (y\ z)))\ (\lambda x.y\ (\lambda y.y))$

$GV = \{x, y\} \qquad FV = \{y, z\}$

(b) Reduzieren Sie die folgenden λ-Terme zu Normalformen. Schreiben Sie – bevor Sie einen Ableitungsschritt ausführen – für die relevanten (Teil-)Ausdrücke die Mengen der freien bzw. der gebundenen Vorkommen von Variablen auf.

- $(\lambda x.\underbrace{(\lambda y.x\ z\ (y\ z))}_{GV=\{y\}})\ (\lambda \underbrace{x.y\ (\lambda y.y)}_{FV=\{y\}})$

$GV \cap FV = \{y\} \cap \{y\} = \{y\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow_\alpha \quad (\lambda x.\ (\lambda y_1.\ x\ z\ (y_1\ z)))\ (\lambda x.\ y\ (\lambda y.y))$

$\Rightarrow_\beta \quad (\lambda y_1.\ ((\lambda x.\underbrace{y\ (\lambda y.y)}_{GV=\{y\}})\ \underbrace{z}_{FV=\{z\}})\ (y_1\ z))$

$\Rightarrow_\beta \quad (\lambda y_1.\ (y\ (\lambda y.y))\ (y_1\ z))$

$= (\lambda y_1.\ y\ (\lambda y.y)\ (y_1\ z))$ ... Normalform

- $((\lambda x.\underbrace{(\lambda y.(\lambda z.z))}_{GV=\{y,z\}})\ \underbrace{x}_{FV=\{x\}})(+\ y\ 1)$

$\Rightarrow_\beta \quad (\lambda y.\ \underbrace{(\lambda z.z)}_{GV=\{z\}})\ \underbrace{(+\ y\ 1)}_{FV=\{y\}}$

$\Rightarrow_\beta \quad (\lambda z.z)$ ... Normalform

- $(\lambda x.(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z)))\ (((\lambda x.\underbrace{(\lambda y.y)}_{GV=\{y\}})\ \underbrace{8}_{FV=\emptyset})\ (\lambda x.(\lambda y.y)\ x))$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda x.\ (\lambda y.\ x\ (\lambda z.y\ z)))\ ((\lambda y.y)\ (\lambda x.\ (\lambda y.\underbrace{y}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{x}_{FV=\{x\}}))$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda x.\ (\lambda y.\ x\ (\lambda z.y\ z)))\ ((\lambda y.\underbrace{y}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{(\lambda x.\ x)}_{FV=\emptyset})$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda x.\ \underbrace{(\lambda y.\ x\ (\lambda z.y\ z))}_{GV=\{y,z\}})\ \underbrace{(\lambda x.x)}_{FV=\emptyset}$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda y.\ (\lambda x.\underbrace{x}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{(\lambda z.\ y\ z)}_{FV=\{y\}})$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda y.\ (\lambda z.\ y\ z))$

$= (\lambda y z.\ y z)$ ... Normalform

- $(\lambda h.(\lambda x.h\ (x\ x))\ (\lambda x.h\ (x\ x)))\ ((\lambda x.\underbrace{x}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{(+\ 1\ 5)}_{FV=\emptyset})$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda h.\ (\lambda x.\underbrace{h\ (x\ x)}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{(\lambda x.h\ (x\ x))}_{FV=\{h\}})\ (+\ 1\ 5)$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda h.\ \underbrace{h\ ((\lambda x.h\ (x\ x))\ (\lambda x.h\ (x\ x)))}_{GV=\{x\}})\ \underbrace{(+\ 1\ 5)}_{FV=\emptyset}$

↳ unendliche Rekursion

$\Rightarrow_\beta\ (+\ 1\ 5)\ ((\lambda x.\ (+\ 1\ 5)\ (x\ x))\ (\lambda x.\ (+ 1 5)\ (x\ x)))$

↳ Normalform ex. nicht

- $(\lambda f.\underbrace{(\lambda a.(\lambda b.f\ a\ b))}_{GV=\{a,b\}})\ \underbrace{(\lambda x.(\lambda y.x))}_{FV=\emptyset}$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda a.\ (\lambda b.\ ((\lambda x.\ \underbrace{(\lambda y.x)}_{GV=\{y\}})\ \underbrace{a}_{FV=\{a\}})\ b))$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda a.\ (\lambda b.\ (\lambda y.\ \underbrace{a}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{b}_{FV=\{b\}}))$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda a.\ (\lambda b.\ a))\ = (\lambda a b.\ a)$ ... Normalform

Aufgabe 2 (AGS 12.4.29 $\star$)

(a) Geben Sie einen Kombinator A an, so dass $A\ t\ s\ u \Rightarrow^* s$ für alle Lambdaterme t, s und u.

$\hookrightarrow$ $FV = \emptyset$

$A = (\lambda xyz.y)$: $A\ t\ s\ u \Rightarrow^* s$

(b) Geben Sie einen Kombinator B an, so dass $B\ t\ s \Rightarrow^* s\ t$ für alle Lambdaterme t und s.

$B = (\lambda xy.\ y\ x)$: $B\ t\ s \Rightarrow^* s\ t$

(c) Geben Sie einen Kombinator C an, so dass $C\ C \Rightarrow_\beta C\ C$.

$C = (\lambda x.\ x\ x)$: $C\ C = (\lambda x.\underbrace{xx}_{GV=\emptyset})\underbrace{(\lambda x.xx)}_{FV=\emptyset}$

$\Rightarrow_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) = C\ C$

(d) Geben Sie einen Kombinator D an, so dass $D \Rightarrow_\beta D$.

$D = (C\ C)$

(e) Geben Sie einen Kombinator E an, so dass $E\ E\ t \Rightarrow^* E\ t\ E$ für jeden Lambdaterm t.

$E = (\lambda xy.\ x\ y\ x)$: $E\ E\ t \Rightarrow^* E\ t\ E$