Aufgabe 1 (AGS 12.4.1 ⋆)

Dienstag

(a) Bestimmen Sie für jeden der folgenden λ-Terme t die Mengen $FV(t)$ und $GV(t)$:

- $(\lambda x.x\ y)\ (\lambda y.y)$
- $(\lambda x.(\lambda y.z\ (\lambda z.z\ (\lambda x.y))))$
- $(\lambda x.(\lambda y.x\ z\ (y\ z)))\ (\lambda x.y\ (\lambda y.y))$

GV GV GV FV GV

- $FV(\ \underline{(\lambda x.\,xy)}\ \underline{(\lambda y.y)}\ ) = FV(\ \overbrace{(\lambda x.\,xy)}^{\lambda x.\ t'}\ ) \cup FV(\ (\lambda y.y)\ )$

$$= \left(FV(\ xy\ ) \setminus \{x\}\ \right) \cup \left(FV(y) \setminus \{y\} \right)$$
$$= \left((FV(x) \cup FV(y)) \setminus \{x\} \right) \cup \left(FV(y) \setminus \{y\} \right)$$
$$= \left((\{x\} \cup \{y\}) \setminus \{x\} \right) \cup \left(\{y\} \setminus \{y\} \right)$$
$$= \{y\} \cup \emptyset$$
$$= \{y\}$$

$GV(\ (\lambda x.\,xy)(\lambda y.y)\ ) = \{x, y\}$

- $(\lambda x.(\lambda y.\ z\ (\lambda z.\ z\ (\lambda x.\ y\ ))))$

$FV = \{z\}$, $GV = \{x, y, z\}$

- $(\lambda x.\ (\lambda y.\ x\ z\ (y\ z)))\ (\lambda x.\ y\ (\lambda y.y))$

$FV = \{y, z\}$, $GV = \{x, y\}$

(b) Reduzieren Sie die folgenden λ-Terme zu Normalformen. Schreiben Sie – bevor Sie einen Ableitungsschritt ausführen – für die relevanten (Teil-)Ausdrücke die Mengen der freien bzw. der gebundenen Vorkommen von Variablen auf.

- $(\lambda x.(\lambda y.x\ z\ (y\ z)))\ (\lambda x.y\ (\lambda y.y))$
- $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.z)))\ x\ (+\ y\ 1)$
- $(\lambda x.(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z)))\ (((\lambda x.(\lambda y.y))\ 8)\ (\lambda x.(\lambda y.y)\ x))$
- $(\lambda h.(\lambda x.h\ (x\ x))\ (\lambda x.h\ (x\ x)))\ ((\lambda x.x)\ (+\ 1\ 5))$
- $(\lambda f.(\lambda a.(\lambda b.f\ a\ b)))\ (\lambda x.(\lambda y.x))$

- $$(\lambda x.\ \underbrace{(\lambda y.\ x\ z\ (y\ z))}_{GV = \{y\}})\ \underbrace{(\lambda x. y\ (\lambda y. y))}_{FV = \{y\}}$$

$$\Rightarrow\ GV \cap FV = \{y\} \cap \{y\} = \{y\} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow_\alpha (\lambda x.\ (\lambda y_1.\ x\ z\ (y_1\ z)))\ (\lambda x.\ y\ (\lambda y.y))$$

$$\Rightarrow_\beta (\lambda y_1.\ ((\lambda x.\ \underbrace{y\ (\lambda y.y)}_{GV=\{y\}})\ \underbrace{z}_{FV=\{z\}})\ (y_1\ z))$$

$$\Rightarrow_\beta (\lambda y_1.\ (y\ (\lambda y.y))\ (y_1\ z))$$

$$= (\lambda y_1.\ y\ (\lambda y.y)\ (y_1\ z))$$ ... Normalform

- $$((\lambda x.\ \underbrace{(\lambda y.\ (\lambda z.z))}_{GV=\{y,z\}})\ \underbrace{x}_{FV=\{x\}})\ (+\ y\ 1)$$

$$\Rightarrow_\beta (\lambda y.\ \underbrace{(\lambda z.z)}_{GV=\{z\}})\ \underbrace{(+\ y\ 1)}_{FV=\{y\}}$$

$$\Rightarrow_\beta (\lambda z.z)$$ ... Normalform

- $(\lambda x.(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z)))\ (((\lambda x.\underbrace{(\lambda y.y)}_{GV=\{y\}})\ \underbrace{8}_{FV=\emptyset})\ (\lambda x.(\lambda y.y)\ x))$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda x.\ (\lambda y.\ x\ (\lambda z.\ y\ z)))\ ((\lambda y.\ y)\ (\lambda x.\ (\lambda y.\underbrace{y}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{x}_{FV=\{x\}}))$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda x.\ (\lambda y.\ x\ (\lambda z.\ y\ z)))\ ((\lambda y.\underbrace{y}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{(\lambda x.\ x)}_{FV=\emptyset})$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda x.\ \underbrace{(\lambda y.\ x\ (\lambda z.\ y\ z))}_{GV=\{y,z\}})\ \underbrace{(\lambda x.x)}_{FV=\emptyset}$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda y.\ (\lambda x.\underbrace{x}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{(\lambda z.\ y\ z)}_{FV=\{y\}})$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda y.\ (\lambda z.\ y\ z)) = (\lambda y z.\ y\ z)$ ... Normalform

- $\underbrace{(\lambda h.(\lambda x.h\ (x\ x))\ (\lambda x.h\ (x\ x)))}\ ((\lambda x.\underbrace{x}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{(+\ 1\ 5)}_{FV=\emptyset})$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda h.\ (\lambda x.\underbrace{h\ (x\ x)}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{(\lambda x.\ h\ (x\ x))}_{FV=\{h\}})\ (+\ 1\ 5)$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda h.\ h\ ((\lambda x.\ h\ (x\ x))\ (\lambda x.\ h\ (x\ x))))\ (+\ 1\ 5)$

$\vdots$

unendliche Rekursion
d.h. es ex. keine Normalform

- $(\lambda f.\underbrace{(\lambda a.(\lambda b.f\ a\ b))}_{GV=\{a,b\}})\ \underbrace{(\lambda x.(\lambda y.x))}_{FV=\emptyset}$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda a.\ (\lambda b.\ ((\lambda x.\underbrace{(\lambda y.x)}_{GV=\{y\}})\ \underbrace{a}_{FV=\{a\}}\ b)))$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda a.\ (\lambda b.\ (\lambda y.\underbrace{a}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{b}_{FV=\{b\}}))$

$\Rightarrow_\beta\ (\lambda a.\ (\lambda b.\ a))$
$= (\lambda a b.\ a)$ ... Normalform

Aufgabe 2 (AGS 12.4.29 $\star$)

(a) Geben Sie einen Kombinator A an, so dass $A\ t\ s\ u \Rightarrow^* s$ für alle Lambdaterme t, s und u.

$\hookrightarrow FV = \emptyset$

$A = (\lambda xyz.y)$: $A\ t\ s\ u \Rightarrow^* s$

(b) Geben Sie einen Kombinator B an, so dass $B\ t\ s \Rightarrow^* s\ t$ für alle Lambdaterme t und s.

$B = (\lambda xy.yx)$: $B\ t\ s \Rightarrow^* s\ t$

(c) Geben Sie einen Kombinator C an, so dass $C\ C \Rightarrow_\beta C\ C$.

$C = (\lambda x.xx)$: $C\ C = (\lambda x.\underbrace{xx}_{GV=\emptyset})(\underbrace{\lambda x.xx}_{FV=\emptyset})$

$\Rightarrow_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) = C\ C$

(d) Geben Sie einen Kombinator D an, so dass $D \Rightarrow_\beta D$.

$D = (C\ C)$

(e) Geben Sie einen Kombinator E an, so dass $E\ E\ t \Rightarrow^* E\ t\ E$ für jeden Lambdaterm t.

$E = (\lambda xy.xyx)$: $E\ E\ t \Rightarrow^* E\ t\ E$