PROGRAMMIERUNG

ÜBUNG 6: λ-KALKÜL — TEIL 1

Eric Kunze
eric.kunze@tu-dresden.de

INHALT

Der λ-Kalkül

- weitere funktionale Programmiersprache
- Programme = λ-Terme
- Vorstellung: *anonyme* Funktionen

Sei X eine Menge mit Variablen, Σ eine Menge mit Symbolen. Die gültigen λ-Terme sind *induktiv* definiert:

1. **Atome** (Variablen oder Symbole) sind gültige λ-Terme.
2. **Abstraktion**: Ist t ein gültiger λ-Term und $x \in X$ eine Variable, dann ist auch $(\lambda x.t)$ ein gültiger λ-Term.
3. **Applikation**: Sind t_1 und t_2 gültige λ-Terme, dann ist auch $(t_1\ t_2)$ ein gültiger λ-Term.

BEISPIELE (INFORMELL)

Vorstellung: Jeder λ-Term beschreibt eine anonyme Funktion.

- Abstraktion gibt das Argument an:

$$\lambda x.t \quad \leftrightarrow \quad f(x) = t$$

- Applikation beschreibt Funktionsanwendung (Einsetzen):

$$((\lambda x.t)\ 2) \quad \leftrightarrow \quad f(2)$$

Beispiel:

$$\text{quadriere} \ = \lambda x.\ x * x$$
$$((\lambda x.x * x)\ 2) = 2 * 2 = 4$$

$\nearrow$ β-Reduktion

VERABREDUNGEN

- Applikation ist linksassoziativ:

$$((t_1\ t_2)\ t_3) = t_1\ t_2\ t_3$$

- mehrfache Abstraktion:

$$(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\lambda x_3.t))) = \lambda x_1 x_2 x_3.t$$

- Applikation vor Abstraktion:

$$\begin{aligned}(\lambda x.\ x\ y) &= (\lambda x.(x\ y))\\ &\neq ((\lambda x.x)\ y)\end{aligned}$$

GEBUNDENE UND FREIE VORKOMMEN

Mengen $\mathrm{FV}(t)$ und $\mathrm{GV}(t)$ geben frei bzw. gebunden *vorkommende* Variablen von t an — induktive Definition

- einzelne **Variablen** sind immer frei:
  $x \in X \quad \Rightarrow \quad \mathrm{FV}(x) = \{x\}\,, \mathrm{GV}(x) = \emptyset$
- **Symbole** sind weder frei noch gebunden
- **Applikation**: Sei $t = (t_1\ t_2)$. Dann
  $\Rightarrow \quad \mathrm{FV}(t) = \mathrm{FV}(t_1) \cup \mathrm{FV}(t_2), \quad \mathrm{GV}(t) = \mathrm{GV}(t_1) \cup \mathrm{GV}(t_2)$
- **Abstraktion**: $t = \lambda x.t'$
  $\Rightarrow \quad \mathrm{FV}(t) = \mathrm{FV}(t') \setminus \{x\}\,, \quad \mathrm{GV}(t) = \mathrm{GV}(t') \cup \{x\}$

β – REDUKTION

β–Reduktion

Seien $s, t \in \lambda(\Sigma)$ gültige λ-Terme und es gilt $\mathrm{GV}(t) \cap \mathrm{FV}(s) = \emptyset$.

$$(\lambda x.t)\ s \quad \longrightarrow_\beta \quad t[x/s]$$

- Bedeutung von $t[x/s]$: Ersetze jedes *freie* Vorkommen von x in t durch s.
- Erinnerung: Vorstellung der Applikation als „Einsetzen" in Funktionen
- beachte: Abstraktion λx entfällt

Bsp.: Seien die Symbole gegeben durch $\Sigma = \{3, a\}$.

$$(\lambda x.\ \underbrace{+x3}_{\mathrm{GV}=\emptyset})\ (\underbrace{\lambda z.a}_{\mathrm{FV}=\emptyset}) \quad \longrightarrow_\beta \quad +\ (\lambda z.a)3$$

α – KONVERSION

- Was machen wir, wenn Voraussetzung $FV(t) \cap GV(t) = \emptyset$ für β-Reduktion nicht erfüllt ist?
- einfacher Ausweg: entsprechende Variablen umbenennen, sodass Bedingung erfüllt ist

α–Konversion

Sei $t \in \lambda(\Sigma)$ und $z \notin GV(t) \cup FV(t)$.

$$(\lambda x.t) \quad \longrightarrow_\alpha \quad \lambda z.t[x/z]$$

Bsp.: Seien die Symbole gegeben durch $\Sigma = \{3, a\}$.

$$(\lambda x.(\underbrace{\lambda y. + xy}_{GV=\{y\}}))\ (\underbrace{\ y\ }_{FV=\{y\}}) \quad \longrightarrow_\alpha \quad (\lambda x.(\underbrace{\lambda z. + xz}_{GV=\{z\}}))\ (\underbrace{\ y\ }_{FV=\{y\}})$$

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

AUFGABE 1 — TEIL (A)

- $t_1 = (\lambda x.xy)\ (\lambda y.y)$:
  - $\mathrm{FV}(t_1) = \{y\}$
  - $\mathrm{GV}(t_1) = \{x, y\}$
- $t_2 = (\lambda x.(\lambda y.z(\lambda z.z(\lambda x.y))))$
  - $\mathrm{FV}(t_2) = \{z\}$
  - $\mathrm{GV}(t_2) = \{x, y, z\}$
- $t_3 = (\lambda x.(\lambda y.z(yz)))(\lambda x.y(\lambda y.y))$
  - $\mathrm{FV}(t_3) = \{y, z\}$
  - $\mathrm{GV}(t_3) = \{x, y\}$

AUFGABE 2 — TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
& (\lambda x.(\underbrace{\lambda y.x\ z\ (y\ z))}_{\mathrm{GV}=\{y\}})\ \underbrace{(\lambda x.y\ (\lambda y.y))}_{\mathrm{FV}=\{y\}} \\
\Rightarrow_\alpha\quad & (\lambda x.(\underbrace{\lambda y_1.x\ z\ (y_1\ z))}_{\mathrm{GV}=\{y\}})\ \underbrace{(\lambda x.y\ (\lambda y.y))}_{\mathrm{FV}=\{y\}} \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda y_1.(\lambda x.\underbrace{y\ (\lambda y.y))}_{\mathrm{GV}=\{y\}}\quad \underbrace{z}_{\mathrm{FV}=\{z\}}\quad (y_1\ z)) \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda y_1.(y\ (\lambda y.y))\ (y_1\ z)) \\
= {} & (\lambda y_1.y\ (\lambda y.y)\ (y_1\ z))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (\lambda x.(\underbrace{\lambda y.(\lambda z.z)}_{\mathrm{GV}=\{y,z\}}))\ \underbrace{x}_{\mathrm{FV}=\{x\}}\ (+\ y\ 1) \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda y.\ \underbrace{(\lambda z.z)}_{\mathrm{GV}=\{z\}})\ \underbrace{(+\ y\ 1)}_{\mathrm{FV}=\{y\}} \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda z.z)
\end{aligned}
$$

AUFGABE 2 — TEIL (B)

$$(\lambda x.(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z)))\ (((\lambda x.\ \underbrace{(\lambda y.y)}_{\mathrm{GV}=\{y\}})\ \underbrace{8}_{\mathrm{FV}=\emptyset})\ (\lambda x.(\lambda y.y)\ x))$$

$$\Rightarrow_\beta\quad (\lambda x.(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z)))\ ((\lambda y.y))\ (\lambda x.(\lambda y.y)\ x))$$

$$\Rightarrow_\beta\quad (\lambda x.(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z)))\ ((\lambda y.y)\ (\lambda x.(\lambda y.\ \underbrace{y}_{\mathrm{GV}=\emptyset})\ \underbrace{x}_{\{x\}}))$$

$$\Rightarrow_\beta\quad (\lambda x.(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z)))\ ((\lambda y.\ \underbrace{y}_{\mathrm{GV}=\emptyset})\ \underbrace{(\lambda x.x)}_{\mathrm{FV}=\emptyset})$$

$$\Rightarrow_\beta\quad (\lambda x.\ \underbrace{(\lambda y.x\ (\lambda z.y\ z)))}_{\mathrm{GV}=\{y,z\}}\ \underbrace{(\lambda x.x)}_{\mathrm{FV}=\emptyset}$$

$$\Rightarrow_\beta\quad (\lambda y.(\lambda x.\ \underbrace{x}_{\mathrm{GV}=\emptyset})\ \underbrace{(\lambda z.y\ z)}_{\mathrm{FV}=\{y\}})$$

$$\Rightarrow_\beta\quad (\lambda y.(\lambda z.y\ z)) \quad = \quad (\lambda yz.y\ z)$$

AUFGABE 2 — TEIL (B)

$$(\lambda h.(\lambda x.h\ (x\ x))\ (\lambda x.h\ (x\ x)))((\lambda x.\underbrace{x}_{\text{GV}=\emptyset})\ \underbrace{(+\ 1\ 5)}_{\text{FV}=\emptyset})$$

$$\Rightarrow_\beta \quad (\lambda h.(\lambda x.\underbrace{h\ (x\ x))}_{\text{GV}=\emptyset}\ \underbrace{(\lambda x.h\ (x\ x))}_{\text{FV}=\{h\}})(+\ 1\ 5)$$

$$\Rightarrow_\beta \quad (\lambda h.h\ ((\lambda x.\underbrace{h\ (x\ x))}_{\text{GV}=\emptyset}\ \underbrace{(\lambda x.h\ (x\ x))}_{\text{FV}=\{h\}}))\ (+\ 1\ 5)$$

$$\Rightarrow_\beta \quad (\lambda h.h\ (h\ ((\lambda x.\underbrace{h\ (x\ x))}_{\text{GV}=\emptyset}\ \underbrace{(\lambda x.h\ (x\ x))}_{\text{FV}=\{h\}})))\ (+\ 1\ 5)$$

$\longrightarrow$ endlose Rekursion, bei der h durch $(+\ 1\ 5)$ noch reduziert werden könnte

$$\Rightarrow_\beta \quad (+\ 1\ 5)\ ((+\ 1\ 5)\ ((\lambda x.(+\ 1\ 5)\ (x\ x))\ (\lambda x.(+\ 1\ 5)\ (x\ x))))$$

AUFGABE 2 — TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
& (\lambda f.\underbrace{(\lambda a.(\lambda b.f\ a\ b)))}_{\text{GV}=\{a,b\}}\ \underbrace{(\lambda x.(\lambda y.x)))}_{\text{FV}=\emptyset} \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda a.(\lambda b.(\lambda x.\underbrace{(\lambda y.x))}_{\text{GV}=\{y\}}\ \underbrace{a}_{\text{FV}=\{a\}}\ b)) \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda a.(\lambda b.(\lambda y.\underbrace{a}_{\text{GV}=\emptyset})\ \underbrace{b}_{\text{FV}=\{b\}}\ )) \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda a.(\lambda b.a)) \\
= {} & (\lambda ab.a)
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 6

Aufgabe 2

AUFGABE 2

(a) A mit $A\ t\ s\ u \Rightarrow^* s$: $A = (\lambda xyz\ .\ y)$

(b) B mit $B\ t\ s \Rightarrow^* s\ t$: $B = (\lambda xy\ .\ yx)$

(c) C mit $C\ C \Rightarrow^* C\ C$: $C = (\lambda x\ .\ xx)$

denn: $(\lambda x.\underbrace{xx}_{GV=\emptyset})\underbrace{(\lambda x.xx)}_{FV=\emptyset} \Rightarrow^\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

(d) D mit $D \Rightarrow^* D$: $D = (C\ C)$

(e) E mit $E\ E\ t \Rightarrow^* E\ t\ E$: $E = (\lambda xy\ .\ xyx)$

denn:

$$(\lambda x\underbrace{y\ .\ xyx}_{GV=\{y\}})\underbrace{(\lambda xy\ .\ xyx)}_{FV=\emptyset}\ t \Rightarrow^\beta (\lambda y\ .\ (\lambda xy\ .\ xyx)\ y\ (\lambda xy\ .\ xyx))\ t$$

$$\Rightarrow^\beta \underbrace{(\lambda xy\ .\ xyx)}_{=E}\ t\ \underbrace{(\lambda xy\ .\ xyx)}_{=E}$$