

Aufgabe 1 (AGS 12.3.20)

Mittwoch

Zeigen Sie unter Verwendung der folgenden Definitionen durch strukturelle Induktion die Gültigkeit der Gleichung $\text{sum}(\text{foo } xs) = 2 * \text{sum } xs - \text{length } xs$ für jedes $xs :: [\text{Int}]$.

```

1 foo :: [Int] -> [Int]
2 foo []      = []
3 foo (x:xs) = x : x : (-1) : foo xs
4
5 sum :: [Int] -> Int
6 sum []      = 0
7 sum (x:xs) = x + sum xs
8
9 length :: [Int] -> Int
10 length []   = 0
11 length (x:xs) = 1 + length xs
    
```

Zeigen Sie dazu den Induktionsanfang und den Induktionsschritt; geben Sie beim Induktionsschritt die Induktionsvoraussetzung an. Geben Sie bei jeder Umformung die benutzte *Definition*, *Eigenschaft* bzw. *Induktionsvoraussetzung* an. Quantifizieren Sie alle Variablen.

(IA) Sei $xs = []$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ links: } \text{sum}(\text{foo } xs) &= \text{sum}(\text{foo } []) \\ &\stackrel{\#2}{=} \text{sum}([]) \\ &\stackrel{\#6}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ rechts: } 2 * \text{sum } xs - \text{length } xs &= 2 * \text{sum } [] - \text{length } [] \\ &\stackrel{\#6}{=} 2 * 0 - \text{length } [] \\ &\stackrel{\#10}{=} 2 * 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow "links = rechts" ✓

(IV) Sei $xs :: [\text{Int}]$, sodass gilt $\text{sum}(\text{foo } xs) = 2 * \text{sum } xs - \text{length } xs$

(IS) Sei $x :: \text{Int}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{sum}(\text{foo } (x:xs)) &\stackrel{\#3}{=} \text{sum}(x : x : (-1) : \text{foo } xs) \\ &\stackrel{3 \cdot \#7}{=} x + x + (-1) + \text{sum}(\text{foo } xs) \\ &\stackrel{IV}{=} x + x + (-1) + 2 * \text{sum } xs - \text{length } xs \\ &\stackrel{\text{Komm., Distr.}}{=} 2 * x + 2 * \text{sum } xs - (1 + \text{length } xs) \\ &\stackrel{\text{Distr.}}{=} 2 * (x + \text{sum } xs) - (1 + \text{length } xs) \\ &\stackrel{\#7}{=} 2 * \text{sum}(x:xs) - (1 + \text{length } xs) \\ &\stackrel{\#11}{=} 2 * \text{sum}(x:xs) - \text{length}(x:xs) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (AGS 12.3.29 *)

Folgende Definitionen seien gegeben:

```

1 data BinTree a = Node a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a
2
3 preOrder :: BinTree a -> [a]
4 preOrder (Leaf x) = [x]
5 preOrder (Node x l r) = [x] ++ preOrder l ++ preOrder r
6
7 mPostOrder :: BinTree a -> [a]
8 mPostOrder (Leaf x) = [x]
9 mPostOrder (Node x l r) = mPostOrder r ++ mPostOrder l ++ [x]

```

Sei außerdem $rev :: [a] \rightarrow [a]$ eine Funktion, sodass für jeden Typ a folgende zwei Eigenschaften gelten:

$$\forall x :: a: \quad rev [x] = [x] \quad (H1)$$

$$\forall xs, ys :: [a]: \quad rev (xs ++ ys) = rev ys ++ rev xs \quad (H2)$$

Gehen Sie davon aus, dass die Funktion $(++) :: [a] \rightarrow [a] \rightarrow [a]$ assoziativ ist.

(a) Sei a ein Typ, $x :: a$ und $xs, ys :: [a]$. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$[x] ++ rev ys ++ rev xs = rev (xs ++ ys ++ [x]) \quad (H3)$$

Hinweis: Sie dürfen (H1) und (H2) verwenden. Für den Beweis der Gültigkeit dieser Gleichung ist *keine* Induktion nötig.

$$\begin{aligned}
 [x] ++ \underline{rev ys ++ rev xs} & \stackrel{Ass.}{=} [x] ++ (rev ys ++ rev xs) \\
 & \stackrel{H2}{=} [x] ++ rev (xs ++ ys) \\
 & \stackrel{H1}{=} \underline{rev [x]} ++ \underline{rev (xs ++ ys)} \\
 & \stackrel{H2}{=} rev ((xs ++ ys) ++ [x]) \\
 & \stackrel{Ass.}{=} rev (xs ++ ys ++ [x])
 \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie durch strukturelle Induktion, dass die Aussage

$$preOrder t = rev (mPostOrder t)$$

Für jeden Typ a und jeden Baum $t :: BinTree a$ gilt. Zeigen Sie dazu den Induktionsanfang und den Induktionsschritt; geben Sie beim Induktionsschritt die Induktionsvoraussetzung an. Geben Sie bei jeder Umformung die benutzte *Definition, Eigenschaft* bzw. *Induktionsvoraussetzung* an. Quantifizieren Sie alle Variablen.

Hinweis: Sie dürfen dafür die Eigenschaften (H1), (H2) und (H3) verwenden.

(IA) Sei $x :: a$ beliebig und $t = Leaf x$.

• links: $preOrder t = preOrder (Leaf x) \stackrel{\#4}{=} [x]$

• rechts: $rev (mPostOrder t) = rev (mPostOrder (Leaf x)) \stackrel{\#8}{=} rev ([x]) \stackrel{H1}{=} [x]$

\Rightarrow "links = rechts" ✓

(IV) Sei $l, r :: BinTree a$, sodass

(IV1) $preOrder l = rev (mPostOrder l)$

(IV2) $preOrder r = rev (mPostOrder r)$

(IS) Sei $x :: a$ beliebig. und $t = \text{Node } x \ell r$

$\text{preOrder } t$

$\approx \text{preOrder } (\text{Node } x \ell r)$

$\stackrel{\#5}{=} [x] ++ \text{preOrder } \ell ++ \text{preOrder } r$

$\stackrel{N1}{=} [x] ++ \text{rev}(\text{mPostOrder } \ell) ++ \text{preOrder } r$

$\stackrel{N2}{=} [x] ++ \text{rev}(\underbrace{\text{mPostOrder } \ell}_{xs}) ++ \text{rev}(\underbrace{\text{mPostOrder } r}_{xs})$

$\stackrel{\#3}{=} \text{rev}(\underbrace{\text{mPostOrder } r}_{ys} ++ \underbrace{\text{mPostOrder } \ell}_{ys} ++ [x])$

$\stackrel{\#9}{=} \text{rev}(\text{mPostOrder } (\text{Node } x \ell r))$

$= \text{rev}(\text{mPostOrder } t)$