PROGRAMMIERUNG

ÜBUNG 4: TYPPOLYMORPHIE & UNIFIKATION

Eric Kunze
eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

INHALT

Typpolymorphie

Aufgabe 1

TYPPOLYMORPHIE

- **bisher**: Funktionen mit konkreten Datentypen
  z.B. `length :: [Int] -> Int`
- **Problem**: Funktion würde auch auf anderen Datentypen funktionieren
  [Char]
  z.B. `length :: [Bool] -> Int` oder `length :: String -> Int`
- **Lösung**: Typvariablen und polymorphe Funktionen
  z.B. `length :: [a] -> Int`

TYPPOLYMORPHIE

- **bisher**: Funktionen mit konkreten Datentypen
  z.B. `length :: [Int] -> Int`
- **Problem**: Funktion würde auch auf anderen Datentypen funktionieren
  z.B. `length :: [Bool] -> Int` oder `length :: String -> Int`
- **Lösung**: Typvariablen und polymorphe Funktionen
  z.B. `length :: [a] -> Int`

Bei konkreter Instanziierung wird Typvariable an entsprechenden Typbezeichner gebunden (z.B. `a = Int` oder `a = Bool`).

- Der Aufruf `length [1,5,2,7]` liefert für die Typvariable `a = Int`.
- Der Aufruf `length [True, False, True, True, False]` liefert die Belegung `a = Bool`.
- Der Aufruf `length "hello"` impliziert `a = Char`.

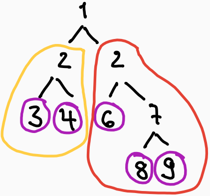
a = [Int]

Beispielbaum mit mindestens 5 Blättern

```
                 Int                                       Int
data BinTree a = Branch a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a
                                                            deriving Show
```

Branch

```
testTree :: BinTree Int
testTree = Branch 1
              (Branch 2
                   (Leaf 3)
                   (Leaf 4)
              )
              (Branch 5
                  (Leaf 6)
                  (Branch 7
                      (Leaf 8)
                      (Leaf 9)
                  )
              )
```



AUFGABE 1 — TEIL (A)

Beispielbaum mit mindestens 5 Blättern

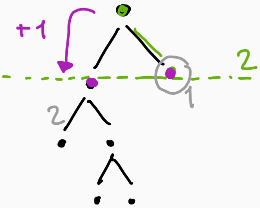
```
data BinTree a = Branch a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a
```

```
testTree :: BinTree Int
testTree = Branch 5
             (Leaf 1)
             (Branch 12
                (Branch 4
                   (Leaf 0)
                   (Leaf 0))
                (Branch 12
                   (Leaf 0)
                   (Leaf 1)))
```

AUFGABE 1 — TEIL (B)

minimale Tiefe eines Baumes

```
data BinTree a = Branch a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a
depth :: BinTree a -> Int
```




```
depth (Leaf _) = 1

depth (Branch _ l r)
      = 1 + min (depth l) (depth r)
```

$\cancel{\text{min}(a, b)} \neq \text{min } a \ b$

AUFGABE 1 — TEIL (B)

minimale Tiefe eines Baumes

```
data BinTree a = Branch a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a
depth :: BinTree a -> Int
```

```
depth :: BinTree a -> Int
depth (Leaf    _     ) = 1
depth (Branch _ l r) = 1 + min (depth l) (depth r)
```

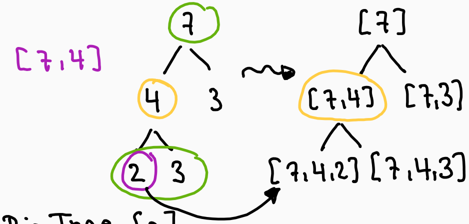
AUFGABE 1 — TEIL (C)

Baum mit Beschriftungsfolge neu beschriften

```haskell
data BinTree a = Branch a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a
paths :: BinTree a -> BinTree [a]
```

```haskell
paths t = go [] t

go :: [a] → BinTree a → BinTree [a]
go ls (Leaf x) = Leaf (ls ++ [x])
go ls (Branch x l r)
    = Branch (ls ++ [x]) (go (ls++[x]) l) (go (ls++[x]) r)
```



AUFGABE 1 — TEIL (C)

Baum mit Beschriftungsfolge neu beschriften

```
data BinTree a = Branch a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a
paths :: BinTree a -> BinTree [a]
```

```
paths :: BinTree a -> BinTree [a]
paths t = go [] t
  where
      go :: [a] -> BinTree a -> BinTree [a]
      go prefix (Leaf    x     ) = Leaf (prefix ++ [x])
      go prefix (Branch x l r)
        = Branch (prefix ++ [x])
            (go (prefix ++ [x]) l)
            (go (prefix ++ [x]) r)
```

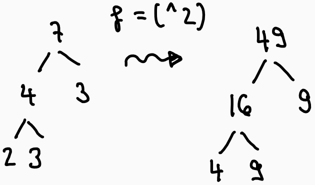
$f = g$

$f(x) = g(x)$

Map für Bäume

```
data BinTree a = Branch a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a
tmap :: (a -> b) -> BinTree a -> BinTree b
```

f




```
tmap f (Leaf x) = Leaf (f x)
tmap f (Branch x l r)
    = Branch (f x) (tmap f l) (tmap f r)
```

Map für Bäume

```
data BinTree a = Branch a (BinTree a) (BinTree a) | Leaf a
tmap :: (a -> b) -> BinTree a -> BinTree b
```

```
tmap :: (a -> b) -> BinTree a -> BinTree b
tmap f (Leaf    x     ) = Leaf    (f x)
tmap f (Branch x l r) = Branch (f x) (tmap f l) (tmap f r)
```

tmap (^2) testTree

tmap fib testTree

EINSCHUB: AUSWERTUNG EINES FUNKTIONSAUFRUFS

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map _ []        = []
map f (x : xs) = f x : map f xs

uncurry :: (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
uncurry f (x, y) = f x y
```

```
map (uncurry (+)) [(1,2), (3,4)]
```

EINSCHUB: AUSWERTUNG EINES FUNKTIONSAUFRUFS

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map _ []        = []
map f (x : xs)  = f x : map f xs

uncurry :: (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
uncurry f (x, y) = f x y
```

$f(x,y) \rightsquigarrow f\ x\ y$

```
map (uncurry (+)) [(1,2), (3,4)]
= map (uncurry (+)) ((1,2):[(3,4)])
= uncurry (+) (1,2) : map (uncurry (+)) [(3,4)]
= (1 + 2) : map (uncurry (+)) [(3,4)]
= 3 : map (uncurry (+)) [(3,4)]
= 3 : map (uncurry (+)) ((3,4);[])
= 3 : uncurry (+) (3,4) : map (uncurry (+)) []
= 3 : (3 + 4) : map (uncurry (+)) []
= 3 : 7 : map (uncurry (+)) []
= 3 : 7 : []
= [3, 7]
```

Unifikation & Unifikationsalgorithmus

Aufgabe 2

UNIFIKATION

Motivation: Typüberprüfung

```
f :: (t, Char) -> (t, [Char])
f (...) = ...

g :: (Int, [u]) -> Int
g (...) = ...

h = g . f
```

(t, [Char])

(Int, [u])

t = Int

u = Char

UNIFIKATION

Motivation: Typüberprüfung

```
f :: (t, Char) -> (t, [Char])
f (...) = ...

g :: (Int, [u]) -> Int
g (...) = ...

h = g . f
```

Wie müssen die Typvariablen `t` und `u` belegt werden, damit die Funktion `h` wohldefiniert ist, d.h. damit die Ergebnisse aus `f` wirklich in `g` eingesetzt werden dürfen?

TYPAUSDRUCK → TYPTERM

Ziel: theoretischere Form von Typausdrücken

Typausdrücke

- `Int`, `Bool`, `Float`, `Char`, `String`
- Typvariablen
- Listen, Tupel, Funktionen

Int

u

[Char]

Typterme

- Übersetzung *trans*: Typausdruck → Typterm

TYPAUSDRUCK → TYPTERM

Ziel: theoretischere Form von Typausdrücken

Typausdrücke

- `Int`, `Bool`, `Float`, `Char`, `String`
- Typvariablen
- Listen, Tupel, Funktionen

Typterme

- Übersetzung *trans*: Typausdruck → Typterm
- z.B.

$$\mathit{trans}(\boxed{\texttt{(t, [Char])}}) = \cancel{()}^2(t, \cancel{[]}(\mathit{Char}))$$

$$\mathit{trans}(\texttt{(Int, [u])}) = \cancel{()}^2(\mathit{Int}, \cancel{[]}(u))$$

TYPAUSDRUCK → TYPTERM

Ziel: theoretischere Form von Typausdrücken

Typausdrücke

- `Int`, `Bool`, `Float`, `Char`, `String`
- Typvariablen
- Listen, Tupel, Funktionen

Typterme

- Übersetzung *trans*: Typausdruck → Typterm
- z.B.

$$trans(\texttt{(t,[Char])}) = ()^2(t, [](Char))$$
$$trans(\texttt{(Int, [u])}) = ()^2(Int, [](u))$$

Beide Typausdrücke können in Übereinstimmung gebracht werden, wenn die Typterme *trans*(`(t,[Char])`) und *trans*(`(Int, [u])`) unifizierbar sind.

TYPAUSDRUCK → TYPTERM

Ziel: theoretischere Form von Typausdrücken

Typausdrücke

- `Int`, `Bool`, `Float`, `Char`, `String`
- Typvariablen
- Listen, Tupel, Funktionen

Typterme

- Übersetzung *trans*: Typausdruck → Typterm
- z.B.

$$trans(\texttt{(t,[Char])}) = ()^2(t, [](Char))$$

$$trans(\texttt{(Int, [u])}) = ()^2(Int, [](u))$$

Beide Typausdrücke können in Übereinstimmung gebracht werden, wenn die Typterme *trans*(`(t,[Char])`) und *trans*(`(Int, [u])`) unifizierbar sind.

→ `t = Int` und `u = Char`

UNIFIKATIONSALGORITHMUS

- **gegeben:** zwei Typ*terme* t_1, t_2
- **Ziel:** entscheide, ob t_1 und t_2 unifizierbar sind

Wir notieren die beiden Typterme als Spalte:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} ()^2(t, [](Char)) \\ ()^2(Int, [](u)) \end{pmatrix}$$

Unifikationsalgorithmus erstellt eine Folge von Mengen M_i, wobei die M_{i+1} aus M_i hervorgeht, indem eine der vier Regeln angewendet wird.

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{bzw.} \qquad M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} ()^2(t, [](Char)) \\ ()^2(Int, [](u)) \end{pmatrix} \right\}$$

UNIFIKATIONSALGORITHMUS – REGELN

- **Dekomposition.** Sei $\delta \in \Sigma$ ein k-stelliger Konstruktor, $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k$ Terme über Konstruktoren und Variablen.
$$\begin{pmatrix} \delta(s_1, \ldots, s_k) \\ \delta(t_1, \ldots, t_k) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix}$$
- **Elimination.** Sei x eine Variable !
$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \emptyset$$
- **Vertauschung.** Sei t keine Variable.
$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$
- **Substitution.** Sei x eine Variable, t keine Variable.
Occur Check: x kommt nicht in t vor
Dann ersetze in jedem anderen Term die Variable x durch t.
$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ s(x) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ s(t) \end{pmatrix}$$

UNIFIKATIONSALGORITHMUS

Ende: keine Regel mehr anwendbar – Entscheidung:

- t_1, t_2 **unifizierbar**: M ist von der Form

$$\left\{ \binom{u_1}{t_1}, \binom{u_2}{t_2}, \ldots, \binom{u_k}{t_k} \right\} \qquad \begin{array}{c} \text{„Variablen“} \\ \text{„Terme ohne Variablen“} \end{array}$$

  wobei $u_1, u_2, \ldots, u_k$ paarweise verschiedene Variablen sind und nicht in $t_1, t_2, \ldots, t_k$ vorkommen.
  allgemeinster Unifikator φ:

$$\begin{aligned} \varphi(u_i) &= t_i && (i = 1, \ldots, k) \\ \varphi(x) &= x && \text{für alle nicht vorkommenden Variablen} \end{aligned}$$

- t_1, t_2 sind **nicht unfizierbar**: M hat nicht diese Form und keine Regel ist anwendbar

OCCUR CHECK

Um endlose Rekursionen zu unterbinden, benötigen die Regeln zum Vertauschen und zur Substitution gewisse Einschränkungen.

Occur Check: Gegeben sei ein Termpaar $\binom{x}{t}$, wobei x eine Variable und t ein Typterm sei.

- Kommt x in t vor, dann schlägt der Check fehl.
- Kommt x nicht in t vor, dann ist der Check okay.

Beispiel:

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Fehlschlag, da x_1 in $\gamma(x_1)$ vorkommt
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ okay, da x_1 nicht in $\gamma(x_2)$ vorkommt

Was passiert, wenn wir substituieren obwohl der Occur Check fehlschlägt?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(\gamma(x_1)) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(\gamma(\gamma(x_1))) \end{pmatrix}$$

AUFGABE 3

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sigma(\sigma(x_1, \alpha), \sigma(\gamma(x_3), x_3)) \\ \sigma(\sigma(\gamma(x_2), \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} \sigma(x_1, \alpha) \\ \sigma(\gamma(x_2), \alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma(\gamma(x_3), x_3)) \\ \sigma(x_2, x_3)) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow}{}^2 \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{El.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Vert.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$ x_2 kommt nicht in $\gamma(x_3)$ vor

$$\overset{\text{Subst.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

AUFGABE 3

(a) **allgemeinster Unifikator:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \qquad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \qquad x_3 \mapsto x_3$$

AUFGABE 3

(a) **allgemeinster Unifikator:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \qquad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \qquad x_3 \mapsto x_3$$

(b) **weitere Unifikatoren:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) \qquad x_2 \mapsto \gamma(\alpha) \qquad x_3 \mapsto \alpha$$

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\gamma(\alpha))) \qquad x_2 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) \qquad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

AUFGABE 3

(a) **allgemeinster Unifikator:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \qquad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \qquad x_3 \mapsto x_3$$

(b) **weitere Unifikatoren:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) \qquad x_2 \mapsto \gamma(\alpha) \qquad x_3 \mapsto \alpha$$

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\gamma(\alpha))) \qquad x_2 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) \qquad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

(c) **Fehlschlag beim occur-check:**

Alphabet: $\Sigma = \left\{\gamma^{(1)}\right\}$

$$t_1 = x_1$$

$$t_2 = \gamma(x_1)$$

AUFGABE 3 — TEIL (D)

$$t_1 = (\texttt{a} \;,\; \texttt{[a]})$$

$$t_2 = (\texttt{Int} \;,\; \texttt{[Double]})$$

$$t_3 = (\texttt{b} \;,\; \texttt{c})$$

AUFGABE 3 — TEIL (D)

$$t_1 = (\texttt{a , [a]})$$

$$t_2 = (\texttt{Int , [Double]})$$

$$t_3 = (\texttt{b , c})$$

- t_1 und t_2 sind
- t_1 und t_3 sind
- t_2 und t_3 sind

AUFGABE 3 — TEIL (D)

$$t_1 = (\texttt{a , [a]})$$

$$t_2 = (\texttt{Int , [Double]})$$

$$t_3 = (\texttt{b , c})$$

- t_1 und t_2 sind *nicht* unifizierbar
- t_1 und t_3 sind
- t_2 und t_3 sind

AUFGABE 3 — TEIL (D)

$$t_1 = (\texttt{a}\ ,\ [\texttt{a}])$$
$$t_2 = (\texttt{Int}\ ,\ [\texttt{Double}])$$
$$t_3 = (\texttt{b}\ ,\ \texttt{c})$$

- t_1 und t_2 sind *nicht* unifizierbar
- t_1 und t_3 sind unifizierbar mit $\texttt{a} \mapsto \texttt{a}$, $\texttt{b} \mapsto \texttt{a}$, $\texttt{c} \mapsto [\texttt{a}]$
- t_2 und t_3 sind

AUFGABE 3 — TEIL (D)

$$t_1 = (\texttt{a} \;,\; \texttt{[a]})$$
$$t_2 = (\texttt{Int} \;,\; \texttt{[Double]})$$
$$t_3 = (\texttt{b} \;,\; \texttt{c})$$

- t_1 und t_2 sind *nicht* unifizierbar
- t_1 und t_3 sind unifizierbar mit $\texttt{a} \mapsto \texttt{a}$, $\texttt{b} \mapsto \texttt{a}$, $\texttt{c} \mapsto \texttt{[a]}$
- t_2 und t_3 sind unifizierbar mit $\texttt{b} \mapsto \texttt{Int}$, $\texttt{c} \mapsto \texttt{[Double]}$

ENDE

Fragen?