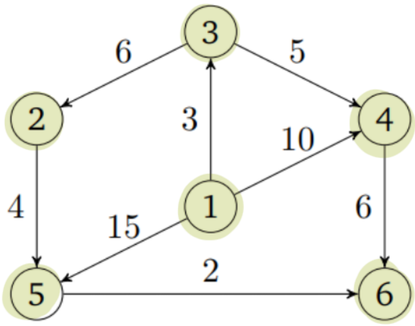
Aufgabe 1 (AGS 9.3.12)

Beim Dijkstra-Algorithmus wird die Suche in gewichteten Graphen mit einer Prioritätswarteschlange anstatt einer Warteschlange (Breitensuche) bzw. eines Kellers (Tiefensuche) durchgeführt. Die Priorität eines Knotens wird dabei aus der Summe der Priorität des Vorgängerknotens und des Gewichts der Kante zum Knoten berechnet. In jedem Schritt wird der Knoten mit dem niedrigsten Prioritätswert verarbeitet. Falls sich in nachfolgenden Schritten ein niedrigerer Prioritätswert für einen Knoten in der Warteschlange ergibt, wird dieser entsprechend aktualisiert. Der kantenbewertete Graph G sei durch folgende graphische Darstellung gegeben:



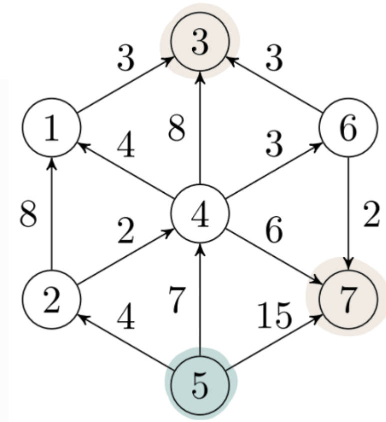
Berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus die minimalen Entfernungen vom Knoten 1 zu allen erreichbaren Knoten. Protokollieren Sie in jedem Schritt den Inhalt der Prioritätswarteschlange und den zugehörigen Auswahlknoten in Tupel der Form (Zielknoten, Priorität, Vorgängerknoten). Geben Sie abschließend für alle berechneten kürzesten Wege die Entfernung und die jeweils zu durchlaufende Knotenfolge (Pfadtabelle) an.

gewählter Knoten	Randknotenmenge
(1, 0, -)	(3, 3, 1), (4, 10, 1), (5, 15, 1)
(3, 3, 1)	(4, 8, 3), (5, 15, 1), (2, 9, 3)
(4, 8, 3)	(5, 15, 1), (2, 9, 3), (6, 14, 4)
(2, 9, 3)	(5, 13, 2), (6, 14, 4)
(5, 13, 2)	(6, 14, 4)
(6, 14, 4)	—

Knoten	kürzesten Pfad	Pfadlänge
1	1	0
2	1, 3, 2	9
3	1, 3	3
4	1, 3, 4	8
5	1, 3, 2, 5	13
6	1, 3, 4, 6	14

Aufgabe 2 (AGS 9.4.4)

Der kantenbewertete Graph $G = (V, E)$ sei durch folgende graphische Darstellung gegeben:



(a) Geben Sie für G die modifizierte Adjazenzmatrix mA_G an.

$$mA_G = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 8 & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 8 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 7 & 0 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array} = D_G^{(0)}$$

(b) Geben Sie für den Floyd-Warshall-Algorithmus die Matrix $D_G^{(2)}$ an. Schreiben Sie hierbei nur die Matrixelemente auf, die sich gegenüber mA_G geändert haben, und benutzen Sie dafür die Notation: (i, j, k) mit i = Anfangsknoten, j = Endknoten, k = Entfernung. Zwischenschritte bei der Berechnung von $D_G^{(2)}$ brauchen Sie nicht anzugeben.

$D_G^{(0)}(u,1)$ $\quad$ $D_G^{(0)}(1,v)$

$k+1 = 1$

$$D_G^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 11 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 7 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 7 & 0 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad D_G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 11 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 7 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ 12 & 4 & 15 & 6 & 0 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \quad (2,3,11),\ (4,3,7) \qquad (5,1,12),\ (5,3,15),\ (5,4,6)$

(c) Welche Matrizen $D_G^{(k)}$, $k > 2$, können in unserem Beispiel nur zu einer Verbesserung der minimalen Entfernungen führen? Begründen Sie Ihre Aussage!

3 und 7 sind Senken $\rightsquigarrow D_G^{(3)} = D_G^{(2)}, \quad D_G^{(7)} = D_G^{(6)}$

5 ist eine Quelle $\rightsquigarrow D_G^{(5)} = D_G^{(4)}$

(d) Geben Sie die Ergebnismatrix $\underset{=\, D_G^{(7)}}{D_G}$ des Floyd-Warshall-Algorithmus an.

$$D_G^{(3)} = D_G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \cancel{8}\,6 & 0 & \cancel{11}\,9 & 2 & \infty & \cancel{\infty}\,5 & \cancel{\infty}\,8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 7 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ \cancel{12}\,10 & 4 & \cancel{15}\,13 & 6 & 0 & \cancel{\infty}\,9 & \cancel{15}\,12 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} = D_G^{(4)} = D_G^{(5)}$$

$$D_G^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 0 & \cancel{9}\,^{8} & 2 & \infty & 5 & \cancel{8}\,^{7} \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & \cancel{7}\,^{6} & 0 & \infty & 3 & \cancel{6}\,^{5} \\ 10 & 4 & \cancel{13}\,^{12} & 6 & 0 & 9 & \cancel{12}\,^{11} \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} = D_G^{(7)} = D_G$$

$$D_G = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 8 & 2 & \infty & 5 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 & 5 \\ 10 & 4 & 12 & 6 & 0 & 9 & 11 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$