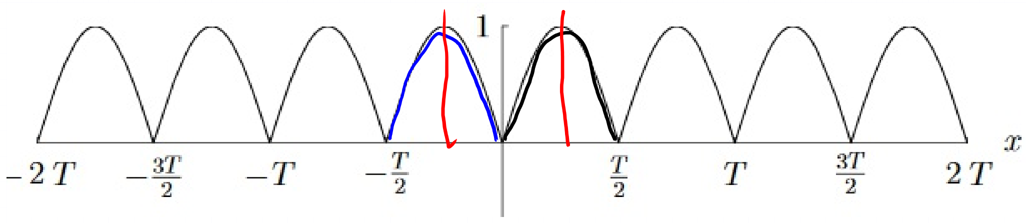
Ma 3: Fourier-Reihe: gerade / ungerade Fortsetzung

Bilden Sie für folgende Funktionen die angegebene periodische Fortsetzung, skizzieren Sie diese und geben Sie **nur den Ansatz** zur Berechnung der Koeffizienten deren Fourier-Reihe an.

(a) $f(x) = \sin(\frac{2\pi x}{T})$ für $0 < x < \frac{T}{2}$; gerade Fortsetzung zu T-periodischer Funktion; $x_0 = 0$.



$f(x) = \cancel{(a_0/2)} + \sum (a_k \cos(2\pi kx/P) + b_k \sin(2\pi kx/P))$,

a_0

$a_0 = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(x)\,dx = \frac{2}{P}\int_0^{P/2} f(x)\,dx$

P - Periodenlänge: $a_k = \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(x)\cos(2\pi \frac{k}{P}x)\,dx$

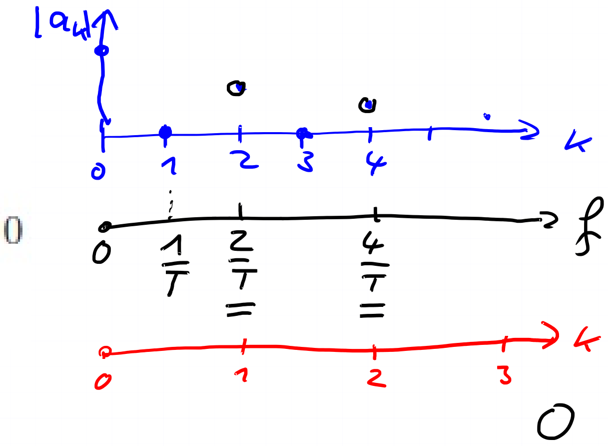
für gerade $f(x)$: $a_k = \frac{4}{P}\int_0^{P/2} f(x)\cos(2\pi\frac{k}{P}x)\,dx$

Die Funktion $F(x)$ wird als T-periodische Funktion angesehen, also $P = T$.
Sie ist gerade, folglich gilt:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right) \mathrm{d}x = \ldots = \frac{2}{\pi}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) \mathrm{d}x = \ldots = \begin{cases} -\frac{4}{\pi(k^2-1)} & \text{für } k \text{ gerade und } k \neq 0 \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Spektrum:



Kleinste Periode ist $P := \frac{T}{2}$ und $F(x)$ ist gerade, also

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/4} \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right) \mathrm{d}x = \ldots = \frac{2}{\pi}$$

$$a_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{4\pi k x}{T}\right) \mathrm{d}x = \ldots = -\frac{4}{\pi(4k^2-1)}$$

$k = 1, 2, 3$

$f = \frac{2}{T}, \frac{4}{T},$