Def 7.54 Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt mit

$$D = S^{-1} \cdot A \cdot S \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

ist Diagonalmatrix.

Bem 7.55 Ist A symmetrisch, so ist A diagonalisierbar, siehe Satz 7.52 (S ist orthogonale Matrix aus EV).

Satz 7.56 Lässt sich das charakteristische Polynom χ_A als Produkt von Linearfaktoren über $\mathbb{K}$ schreiben, so ist A genau dann über $\mathbb{K}$ diagonalisierbar, wenn für jeden EW die alg. und geom. Vielfachheit übereinstimmen.

- in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zerfällt χ_A immer in Linearfaktoren
- in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann χ_A nicht zerfallen $\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar.

Bsp 7.57

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, nicht symmetrisch

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \ldots = -(2+\lambda)^2(4-\lambda) \Rightarrow \text{Zerfällt über } \mathbb{R} \text{ in Linearfaktoren}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 4$$

$$\underbrace{\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2}, \quad \underbrace{\underline{v}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{1} \Rightarrow \text{alg. Vielf.} = \text{geom. Vielf}$$

$\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar

$$S = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{v}^1 & \underline{v}^2 & \underline{v}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1} A S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$\boxed{A}$ • Ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

nein, da $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt.

$$= (\lambda + i)(\lambda - i)$$

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \Rightarrow \text{Vielfachheiten gleich}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \nearrow \text{Bsp 7.46}$$

$\Big\}$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad S^{-1} A S = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Bem 7.58

- Die linear unabhängigen EV von A können als Spalten von S genutzt werden.

- Ist eine (große) Potenz einer Matrix zu berechnen, z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ ges: } A^{2020},$$

so ist der direkte Weg (2019 Matrixprodukte) <u>sehr</u> aufwendig.

Cleverer ist

$$D = S^{-1} A S \iff A = S D S^{-1}$$

$$\Rightarrow A^k = (S D S^{-1})^k = S D \underbrace{(S^{-1} S)}_{=E} D \underbrace{(S^{-1} S)}_{=E} \cdots \underbrace{(S^{-1} S)}_{=E} D S^{-1}$$

$$= S D^k S^{-1},$$

wobei die Potenz einer Diagonalmatrix die Diagonalmatrix der Potenzen ist.

(Bsp 7.53)

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = S^T, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^{2020} = \begin{pmatrix} 1^{2020} & 0 \\ 0 & 3^{2020} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{2020} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{2020} = S D^{2020} S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3^{2020} & -1+3^{2020} \\ -1+3^{2020} & 1+3^{2020} \end{pmatrix}.$$

7.5 Positive Definitheit und Hauptachsentransformation

Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch ist (d.h. $A = A^T$), so gilt mit den EW/EV λ_i, $\underline{v}^i$ $i \in \{1, \dots, n\}$ für einen beliebigen Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$

$$\underline{x}^T A \underline{x} = \underline{x}^T S D S^T \underline{x} \qquad \left(\begin{array}{l} D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ S = (\underline{v}^1 \underline{v}^2 \dots \underline{v}^n), \ \|\underline{v}^i\|_2 = 1 \end{array} \right)$$

$$= (\underbrace{S^T \underline{x}}_{=\underline{y}})^T D (\underbrace{S^T \underline{x}}_{=:\underline{y}})$$

$$= \underline{y}^T D \underline{y} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \underbrace{y_k^2}_{\geq 0}$$

<u>Def 7.59</u> Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, so dass für jeden Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$

$$\underline{x}^T A \underline{x} > 0$$

gilt, so heißt A (symmetrisch) positiv definit (s.p.d.). Gilt nur

$$\underline{x}^T A \underline{x} \geq 0$$

so heißt A positiv semidefinit. Analog werden negativ definit ($<$), negativ semidefinit ($\leq$) und indefinit ($<$ oder $>$) definiert

Bem 7.60

- Ist A s.p.d., so sind alle EW $\lambda > 0$.
- Ist A symmetrisch und sind alle EW $\lambda > 0$, so ist A s.p.d.
- Außerdem ist A regulär, denn

$$A = SDS^T \underset{S^{-1}=S^T}{\Longleftrightarrow} A^{-1} = (SDS^T)^{-1} = S^{-T}D^{-1}S^{-1} = S\,D^{-1}S^T$$

$$D^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

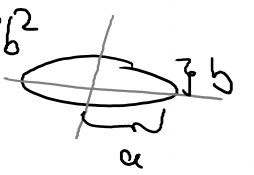
Kegelschnitte:

Kreis: $x^2+y^2=r^2$

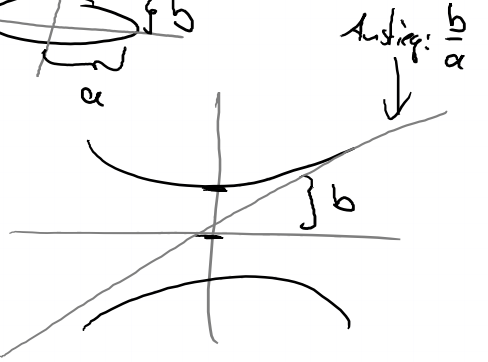
Kreis

Radius r

Ellipse: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \Longleftrightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

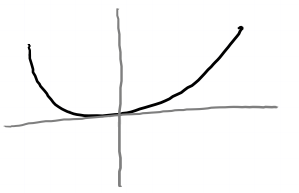


Hyperbel: $\mp\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$



Geradepaar: ...

Parabel: $x^2=2p\cdot y$ oder $y^2=2p\cdot x$



Aber was ist mit

$$0 = 9x^2 - 8xy + 6y^2 - 32x - 4y + 24$$

$$= \underline{x}^T \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} -32 \\ -4 \end{pmatrix}^T \underline{x} + 24$$

$$= \underline{x}^T \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} -32 \\ -4 \end{pmatrix}^T \underline{x} + 24$$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Def 7.61

Zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = A$ heißt für $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

quadratische Form.

A symmetrisch $\Rightarrow$ Q orthogonal aus EV von A und

Λ Diagonalmatrix aus EW von A

$$A = Q \Lambda Q^T$$

$$\Rightarrow q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = \underline{x}^T Q \Lambda \underbrace{Q^T \underline{x}}_{=:y} = \underline{y}^T \Lambda \underline{y} = \hat{q}(\underline{y})$$

Normalform der quadratischen Form

Die Transformation heißt Hauptachsentransformation.

Geometrisch: Koordinatensystem gewechselt indem die EV als neue Achsen genutzt werden. Typ kann an den EW von A abgelesen werden

Bsp 7.62 $q(\underline{x}) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad \chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(7-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 8\lambda - 9$$

$\hookrightarrow \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 9$

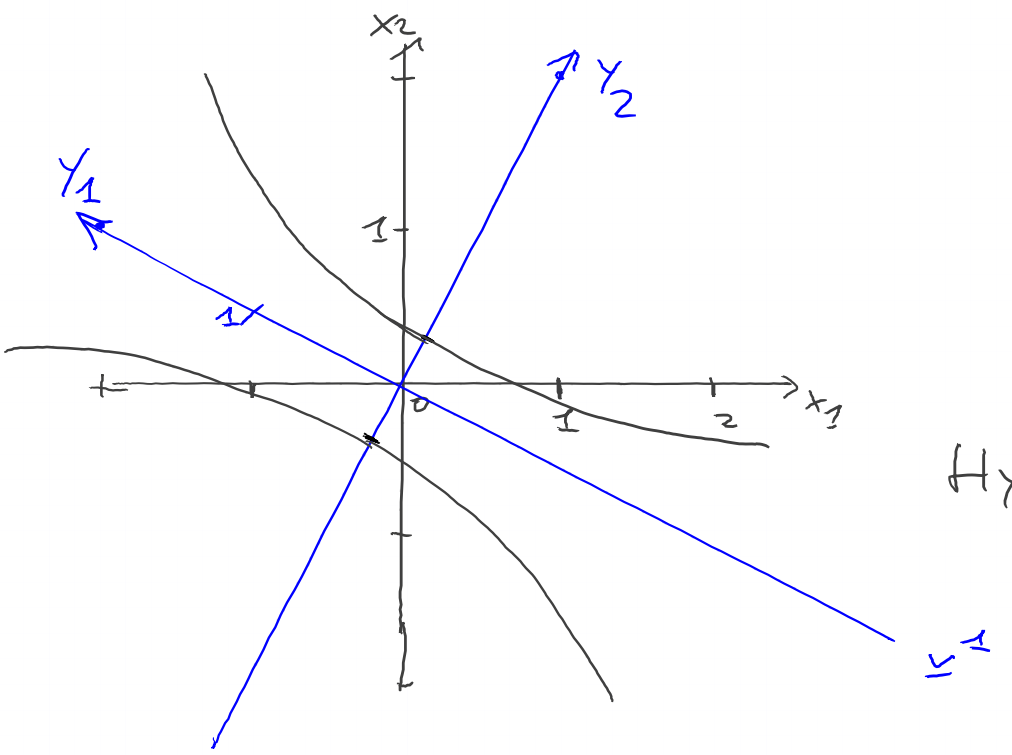
$\Rightarrow$ versch. Vorzeichen $\Rightarrow$ Hyperbel

$\lambda_1 = -1$: $(A+E)\underline{v}^1 = \underline{0} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 9 \neq \lambda_1$, $A = A^T \Rightarrow \underline{v}^2 \perp \underline{v}^1 \Rightarrow \underline{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$\hat{q}(\underline{y}) = \underline{y}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \underline{y} = -y_1^2 + 9y_2^2 = 1$



Hyperbel!

Def 7.63 Eine Quadrik ist eine allgemeine Gleichung 2. Grades der Form

$$\underline{x}^T A \underline{x} + 2 \cdot \underline{m}^T \underline{x} + c = 0$$

mit $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, die eine Kurve/Fläche/Hyperfläche beschreibt.

Normalform in 2 Schritten:

1) Verschieben: Löse $A \cdot \underline{s} = -\underline{m}$ nach $\underline{s}$ und setze

$$\underline{x} = \underline{r} + \underline{s}$$

wir erhalten in $\underline{r}$

$$\underline{r}^T A \underline{r} + \underbrace{(c + \underline{m}^T \underline{s})}_{=: g \in \mathbb{R}} = 0$$

$\Rightarrow$ quadratische Form

Bem: das LGS $A \cdot \underline{s} = -\underline{m}$ muss nicht lösbar sein, z.B. bei parabolischen Kurven/Flächen... Ausweg möglich

2) Hauptachsentransformation: Eliminieren der gemischten Terme und erhalten in $\underline{y} = Q^T \underline{r}$: $\underline{y}^T \Lambda \underline{y} + g = 0$

Bsp 7.64

$$\underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{m}^T \underline{x} + c = 0$$

mit $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $\underline{m} = \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}$, $c = 24$

1) $\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -2 & 16 \\ -2 & 6 & 2 \end{array}\right)_{II+3I} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -2 & 16 \\ 25 & 0 & 50 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \underline{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{x} = \underline{r} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\underline{r}^T A \underline{r} + g = 0$, $g = 24 + \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -10$

$\chi_A(\lambda) = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 10 \quad \Rightarrow$ Ellipse

$\lambda_1 = 5$: $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 \neq \lambda_1$, $A = A^T \Rightarrow \underline{v}^2 \perp \underline{v}^1$, $\underline{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

mit $\underline{r} = Q \cdot \underline{y}$

$\hat{g}(\underline{y}) = 5 \cdot y_1^2 + 10 \cdot y_2^2 = 10 \quad | : 10$

$\Leftrightarrow \left(\frac{y_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + y_2^2 = 1 \qquad a = \sqrt{2}$, $b = 1$

$\Rightarrow$ Zeichnen in 4 Schritten:
- Koordinatensystem (x_1, x_2)
- verschobenes Koordinatensystem (r_1, r_2) $\quad \underline{r} = \underline{x} - \underline{s}$
- gedrehtes verschobenes Koord-Sys. (y_1, y_2) $\quad \underline{y} = Q^T \underline{r}$
- $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ Ellipse in $\underline{y}$