MACHINE LEARNING, 4. SEMINAR – DISKRIMINATIVES LERNEN

Aufgabe 1. Man betrachte das folgende Wahrscheinlichkeitsmodell mit zwei Klassen. Gegeben sei die a-priori Wahrscheinlichkeitsverteilung der Klassen $p(k)$, $k = 1,2$. Die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Beobachtungen $x \in \mathbb{R}$ sind

$$p(x|k) = \tau/2 \cdot \exp\big[-\tau \cdot |x - \mu_k|\big],$$

wobei der Parameter $\tau > 0$ für beide Klassen gleich ist. Leiten Sie die Formel für die a-posteriori Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(k|x)$ ab.

Hinweis: Berücksichtigen Sie, dass die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen nicht überall differenzierbar sind. Somit muss man bei der Ableitung eine Fallunterscheidung machen.

Aufgabe 2. Sei $p(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte einer reellwertigen Größe $x \in \mathbb{R}$ mit dem Mittelwert Null und einer bekannten Streuung σ^2, d.h.

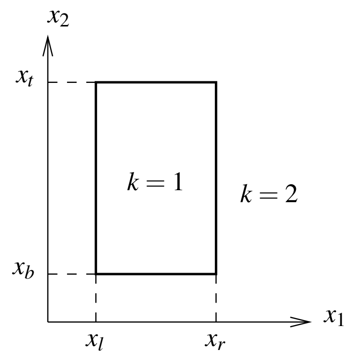
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\, dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x)\, dx &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Beweisen Sie:

$$P(|x| \geq \theta) \leq \frac{\sigma^2}{\theta^2}$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Vapnik-Chervonenkis Dimension für die Entscheidungsregel, die im zweidimensionalen Raum ein achsenparalleles Rechteck bildet (siehe Skizze unten):

$$e(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_l \leq x_1 \leq x_r \text{ und } x_b \leq x_2 \leq x_t \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$



Aufgabe 4. (siehe Aufgabe 3 aus dem vorigen Übungsblatt). Die Merkmale eines Objektes, welches sich in zwei Zuständen $k = 1, 2$ befinden kann, sind Vektoren $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist

$$\begin{aligned} p(k=1) &= p(k=2), \\ p(x|k=1) &= C \cdot \exp\left[-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma^2}\right], \\ p(x|k=2) &= C \cdot \exp\left[-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma^2}\right], \end{aligned}$$

mit den Parametern $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\sigma \in \mathbb{R}$.

a) Wie sieht die Klasse der Entscheidungsregeln (MAP als Entscheidungsstrategie) für dieses Wahrscheinlichkeitsmodell aus? Bestimmen Sie die Vapnik-Chervonenkis Dimension dieser Klasse.

b) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zum Minimieren des Empirischen Risikos an.