

Strukturelle Modelle in der Bildverarbeitung

MinSum Probleme – LP-Relaxation

D. Schlesinger – TUD/INF/KI/IS

- Maximieren scheinbarer Qualität
- Diffusion Algorithmus
- LP ...

Äquivalente Transformationen (zur Erinnerung)

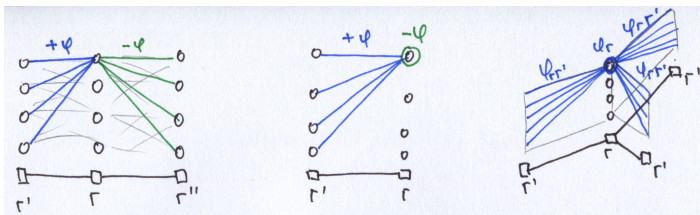
Zwei Aufgaben $A = (q, g)$ und $A' = (q', g')$ sind zu einander **äquivalent**, wenn

$$\left[\sum_r q_r(y_r) + \sum_{rr'} g_{rr'}(y_r, y_{r'}) \right] = \left[\sum_r q'_r(y_r) + \sum_{rr'} g'_{rr'}(y_r, y_{r'}) \right]$$

für alle Labellings y gilt.

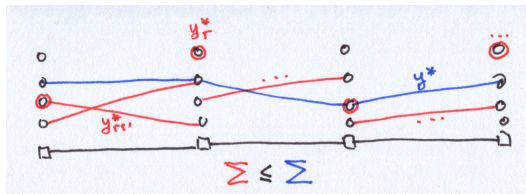
$\mathcal{A}(A)$ – Äquivalenzklasse (alle zu A äquivalenten Aufgaben).

Äquivalente **Transformationen**:



$$\Phi = (\varphi_r(k) \quad \forall r, k, \quad \varphi_{rr'}(k), \quad \forall rr', k)$$

$$\varphi_r(k) + \sum_{r': rr' \in E} \varphi_{rr'}(k) = 0 \quad \forall r, k$$



Die Energie einer MinSum Aufgabe:

$$E(A) = \min_y \left[\sum_r q_r(y_r) + \sum_{rr'} g_{rr'}(y_r, y_{r'}) \right]$$

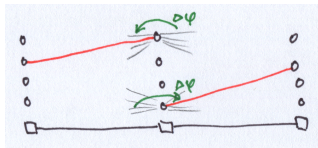
Scheinbare Qualität einer MinSum Aufgabe:

man wähle von einander unabhängig für jede Kante (für jeden Knoten) das beste Labelpaar (den besten Label)

$$SQ(A) = \sum_r \min_k q_r(k) + \sum_{rr'} \min_{kk'} g_{rr'}(k, k')$$

$SQ(A)$ ist offensichtlich eine **untere Schranke** für $E(A)$, d.h. $SQ(A) \leq E(A)$

Eine Aufgabe heißt **trivial**, wenn $E(A) = SQ(A)$ gilt.



Die Äquivalenten Transformationen ändern $E(A)$ **nicht**, $SQ(A)$ aber **schon**.

Die Idee – suche die Aufgabe größter Scheinbarer Qualität in der Äquivalenzklasse $\mathcal{A}(A)$
– maximiere die untere Schranke der Energie:

$$\sum_r \min_k (q_r(k) + \varphi_r(k)) + \sum_{rr'} \min_{kk'} (g_{rr'}(k, k') + \varphi_{rr'}(k) + \varphi_{r'r}(k')) \rightarrow \max_{\Phi}$$
$$\text{s.t. } \varphi_r(k) + \sum_{r': rr' \in E} \varphi_{rr'}(k) = 0 \quad \forall r, k$$

eine konkave nicht überall differenzierbare Optimierungsaufgabe.

- Wie ist $SQ(A)$ (effizient) zu maximieren?
- Trivialität zu prüfen ist NP im Allgemeinen.
- Für welche A gibt es einen trivialen Äquivalent?

Wiederhole oft für alle r, k

- 1) Sammeln – gießen so viel wie möglich in $q_r(k)$:

$$\Delta_{rr'}(k) = \min_{k'} g_{rr'}(k, k')$$

$$q_r(k) = q_r(k) + \sum_{r': rr' \in E} \Delta_{rr'}(k, k')$$

$$g_{rr'}(k, k') = g_{rr'}(k, k') - \Delta_{rr'}(k, k')$$

- 2) Verteile gleichmäßig auf inzidente Kanten $g_{rr'}(k, k')$:

$$\Delta_r(k) = q_r(k)/4 \quad (\text{bei 4-Nachbarschaft})$$

$$g_{rr'}(k, k') = g_{rr'}(k, k') + \Delta_r(k)$$

$$q_r(k) = 0$$

Es ist nicht ganz klar, welche Aufgabe der Algorithmus eigentlich löst.
Im Allgemeinen wird SQ damit nicht global optimiert.

Praktisch funktioniert oft befriedigend.

Diffusion ist Relaxation Labelling Algorithmus (siehe OrAnd) im $(\min, +)$ -Semiring!!!

SQ – [M. Schlesinger, 1976?], Diffusion – [+Flach, 1998?], Ausarbeitung – [+Werner, ?]

MinSum Problem

$$\sum_r q_r(y_r) + \sum_{rr'} g_{rr'}(y_r, y_{r'}) \rightarrow \min_y$$

wird zunächst als ein diskretes Optimierungsproblem formuliert. Dabei werden **Gewichte** $w_r(k)$ und $w_{rr'}(k, k')$ für alle Label bzw. Labelpaare eingeführt:

$$\begin{aligned} & \sum_r \sum_k w_r(k) \cdot q_r(k) + \sum_{rr'} \sum_{kk'} w_{rr'}(k, k') \cdot g_{rr'}(k, k') \rightarrow \min_w \\ \text{s.t.} \quad & \sum_k w_r(k) = 1 \quad \forall r, \quad \sum_{k'} w_{rr'}(k, k') = w_r(k) \quad \forall r, k, r', \\ & w_r(k) \in \{0, 1\}, \quad w_{rr'}(k, k') \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

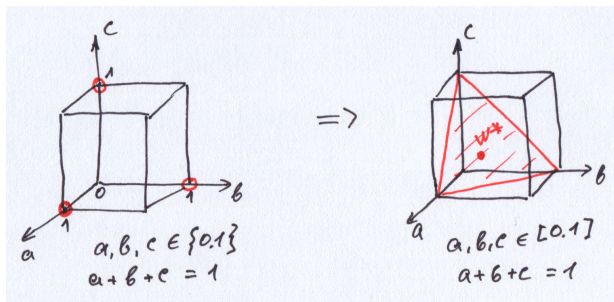
$w_r(k) \in \{0, 1\}$ zusammen mit $\sum_k w_r(k) = 1$ (für Kanten analog) sorgen dafür, dass jede „zulässige“ w -Konfiguration einem Labelling entspricht.

Jetzt werden die Gewichte **relaxiert**, d.h.

$$w_r(k) \in [0, 1], \quad w_{rr'}(k, k') \in [0, 1]$$

Man erhält eine **lineare** Optimierungsaufgabe.

Wo ist nun das Problem?



Die Lösung des entstehenden LP-Problems ist (im Allgemeinen) reellwertig

$\Rightarrow$ es ist i.A. nicht möglich aus der Lösung des LP auf die ursprüngliche **diskrete** Lösung zurückzuschließen

$\Rightarrow$ der Wert der LP-Lösung ist kleiner (untere Schranke),
weil der Lösungsraum der LP größer ist.

Selbst wenn die Optimale reellwertige Lösung mit einer diskreten übereinstimmt,
ist es aufgrund sehr hoher Dimension nicht möglich, das LP-Problem **effizient** zu lösen.

$$\begin{aligned}
 & \sum_r \sum_k w_r(k) \cdot q_r(k) + \sum_{rr'} \sum_{kk'} w_{rr'}(k, k') \cdot g_{rr'}(k, k') \rightarrow \min_w \\
 \text{s.t.} \quad & 1) \quad \sum_k w_r(k) = 1 \quad \forall r, \quad \sum_{k, k'} w_{rr'}(k, k') = 1 \quad \forall r, r' \\
 & 2) \quad \sum_{k'} w_{rr'}(k, k') = w_r(k) \quad \forall r, r', k, \\
 & 3) \quad w_r(k) \in [0, 1], \quad w_{rr'}(k, k') \in [0, 1]
 \end{aligned}$$

Das zweite Teil des 1) ist redundant – das ergibt sich aus dem ersten Teil von 1) und 2)

Wir führen Lagrange-Multiplikatoren für alle Bedingungen des Typs 2), d.h. $\lambda_{rr'}(k)$, die Bedingungen 1) und 3) behalten wir bei.

$$\begin{aligned}
 & \sum_r \sum_k w_r(k) \cdot q_r(k) + \sum_{rr'} \sum_{kk'} w_{rr'}(k, k') \cdot g_{rr'}(k, k') + \\
 & \sum_r \sum_{r'} \sum_k \lambda_{rr'}(k) \cdot \left[\sum_{k'} w_{rr'}(k, k') - w_r(k) \right] \rightarrow \max_{\lambda} \min_w \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_k w_r(k) = 1 \quad \forall r, \quad \sum_{k, k'} w_{rr'}(k, k') = 1 \quad \forall r, r' \\
 & w_r(k) \in [0, 1], \quad w_{rr'}(k, k') \in [0, 1]
 \end{aligned}$$

Wir gruppieren die Summanden des Lagrangians um w :

$$\begin{aligned}
 & \sum_r \sum_k w_r(k) \cdot \left[q_r(k) - \sum_{r'} \lambda_{rr'}(k) \right] + \\
 & \sum_{rr'} \sum_{kk'} w_{rr'}(k, k') \cdot \left[g_{rr'}(k, k') + \lambda_{rr'}(k) + \lambda_{r'r}(k') \right] \rightarrow \max_{\lambda} \min_w \\
 & \text{s.t.} \quad \dots
 \end{aligned}$$

Keine Nebenbedingungen mehr, die $w_r(k)$ und $w_{rr'}(k, k')$ verbinden – Summanden (unter $\sum_r$ und $\sum_{rr'}$) können von einander getrennt bezüglich w optimiert werden.

Bezeichnen wir $\lambda_r(k) = - \sum_{r'} \lambda_{rr'}(k)$, für jeden Knoten lösen wir

$$\begin{aligned} \sum_k w_r(k) \cdot [q_r(k) + \lambda_r(k)] &\rightarrow \min_w \\ \text{s.t.} \quad \sum_k w_r(k) &= 1, \quad w_r(k) \in [0, 1] \end{aligned}$$

Der Wert der Lösung ist

$$\min_k [q_r(k) + \lambda_r(k)]$$

Analog für die Kanten, der Wert der Lösung für jede Kante ist

$$\min_{kk'} [g_{rr'}(k, k') + \lambda_{rr'}(k) + \lambda_{r'r}(k')]$$

Jetzt gilt das alles bezüglich λ -s zu **maximieren**:

$$\begin{aligned} \sum_r \min_k [q_r(k) + \lambda_r(k)] + \sum_{rr'} \min_{kk'} [g_{rr'}(k, k') + \lambda_{rr'}(k) + \lambda_{r'r}(k')] &\rightarrow \max_{\lambda} \\ \text{s.t.} \quad \lambda_r(k) + \sum_{r'} \lambda_{rr'}(k) &= 0 \quad \forall r, k \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Aufgabe des Maximierens der scheinbaren Qualität.

Die LP-Aufgabe und Aufgabe des Maximierens der SQ bilden ein **Dualitätspaar**.

LP: $O(EK^2)$ Variables, $O(EK)$ Nebenbedingungen

SQ: $O(EK)$ Variables, $O(RK)$ Nebenbedingungen $\Rightarrow$ einfacher

Weitere Themen:

- Boros, Hammer: Quadratic Pseudo-Boolean Optimization
- Belief Propagation für MinSum – im Grunde Diffusion
- Kolmogorov: Message Passing, TRWS („gezielte“ äquivalente Transformationen)
- Komodakis, M. Schlesinger: Subgradient Algorithmus
- Rother ..., Fusion Moves Algorithmus ?
- Werner: Cutting Plane Algorithmus
- Shechovtsov?, ...: Sub-/Supermodular Decomposition
- Savchynskyy, Kappes, Schmidt, Schnörr: Nesterov's Scheme ... ?
- ...