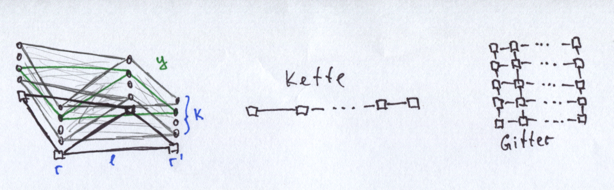
Strukturelle Modelle in der Bildverarbeitung
Labelling Probleme

D. Schlesinger – TUD/INF/KI/IS

– Constraint Satisfaction Probleme
– Energieminimierung
– Partition Funktion
– Allgemein
– Der Plan ...



Gegeben ist ein Graph mit der Menge R der Knoten (Definitionsbereich) und der Menge $E = \{\{r, r'\}\}$ der Kanten.

Jedem Knoten $r \in R$ entspricht eine Variable y_r, die die Werte aus K (Wertebereich, Labelmenge) annehmen kann.

Ein Labelling $y : R \to K$ ist eine Abbildung, die jedem Knoten einen Label aus K zuordnet (y_r bezeichnet den Label des r-ten Knotens).

Ergänzungen/Varianten:
Hypergraphen statt Graphen, $K \subset \mathbb{R}$ (kontinuierlich) etc.

Constraint Satisfaction Probleme

In jedem Knoten sind manche Labels „verboten“,
d.h. gibt es boolesche Funktionen $q_r : K \to \{0,1\}$

Außerdem sind manche Labelpaare entlang jeder Kanten verboten
– Funktionen $g_{rr'} : K \times K \to \{0,1\}$

Diese Funktionen repräsentieren lokale Einschränkungen.

Ein Labelling gilt als „zulässig“ (konsistent), wenn er keine Einschränkungen verletzt:

$$Q(y) = \bigwedge_{r \in R} q_r(y_r) \wedge \bigwedge_{rr' \in E} g_{rr'}(y_r, y_{r'})$$

Die Aufgabe ist zu prüfen, ob es ein konsistenten Labelling gibt:

$$Q = \bigvee_y Q(y) = \bigvee_y \left[\bigwedge_{r \in R} q_r(y_r) \wedge \bigwedge_{rr' \in E} g_{rr'}(y_r, y_{r'}) \right]$$

n-Damen Problem: auf einem $n \times n$ Schachbrett werden n Damen so positioniert, dass sie einander nicht schlagen.

Knoten – Felder, Variablen – $\{0, 1\}$ (eine Dame ist da oder nicht).
Paarweise Einschränkungen:
zwei Felder r und r', die einander schlagen, werden mit einer Kante verbunden.
Die Funktion g ist:

$$g_{rr'}(k, k') = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad k = k' = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(dies stimmt nicht ganz, warum?)

Sudoku, nSAT-Probleme usw.

CSP, Relaxation Labelling Algorithmus

Man untersucht lokal die Umgebung eines Knotens und verbietet explizit alles, was offensichtlich nicht sein kann (Wegstreichen Algorithmus).

Man wiederhole

$$q_r(k) = q_r(k) \wedge \bigwedge_{rr'} \bigvee_{kk'} g_{rr'}(k,k')$$

$$g_{rr'}(k,k') = g_{rr'}(k,k') \wedge q_r(k) \wedge q_{r'}(k')$$

solange sich was ändert.

Nach dem Anhalten des Algorithmus sind drei Fälle möglich:

1) In einem Knoten ist alles verboten: es gibt kein konsistenter Labelling
2) In jedem Knoten bleibt genau ein Label: es gibt ein konsistenter Labelling, der aus den übrig gebliebenen Labels besteht
3) In manchen Knoten bleiben mehr als ein Label übrig: die Aufgabe bleibt ungelöst

(Beispiele an der Tafel).

Allgemeiner Fall – die Aufgabe ist NP-vollständig.
Basis Graph ist eine Kette – im 3) Fall existiert ein konsistenter Labelling.
Bei manchen Funktionen g ist dies auch der Fall
– die Aufgabe ist polynomiell lösbar für allgemeine Graphen.

Energieminimierung

Funktionen $q_r : K \to \mathbb{R}$ und $g_{rr'} : K \times K \to \mathbb{R}$ „verbieten“ nichts, sondern „bestrafen“.

Die Qualität eines Labellings ergibt sich als:

$$Q(y) = \sum_r q_r(y_r) + \sum_{rr'} g_{rr'}(y_r, y_{r'})$$

Gesucht wird der Labelling minimaler Qualität:

$$Q = \min_y Q(y) = \min_y \left[\sum_r q_r(y_r) + \sum_{rr'} g_{rr'}(y_r, y_{r'}) \right]$$

Beispiel: Maximum a-posteriori Entscheidungen in MRF.

CSP ist ein Spezialfall der Energieminimierung
– alle lokale Qualitäten (die Werte der q und g Funktionen) sind

- 0 – entspricht boolescher 1, d.h. „erlaubt“ oder
- ∞ – entspricht boolescher 0, d.h. „nicht erlaubt“.

Synonyme für Energieminimierung – „SoftCSP“, „ValuedCSP“

Partition Funktion

Aus der Physik: Wahrscheinlichkeit des Zustandes eines Systems ist
$p(y) \sim \exp\big(-E(y)\big)$ mit der Energie $E(y)$.

Die resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung (Markovsches Zufallsfeld) ist

$$p(y) = \frac{1}{Z} \exp\left[\sum_r q_r(y_r) + \sum_{rr'} g_{rr'}(y_r, y_{r'})\right] = \frac{1}{Z} \prod_r \tilde{q}_r(y_r) \cdot \prod_{rr'} \tilde{g}_{rr'}(y_r, y_{r'})$$

mit $\tilde{q}(\cdot) = \exp q(\cdot)$ und $\tilde{g}(\cdot) = \exp g(\cdot)$ – Produkt lokaler Bewertungen.

Die Normierungskonstante (damit $\sum_f p(y) = 1$)

$$Z = \sum_y \left[\prod_r \tilde{q}_r(y_r) \cdot \prod_{rr'} \tilde{g}_{rr'}(y_r, y_{r'})\right]$$

heißt Partition Funktion.

Anwendung: Berechnung marginaler Wahrscheinlichkeitsverteilungen
(z.B. für die Bayesschen Entscheidungen, beim Lernen mit EM-Algorithmus etc.).

Allgemeine Formulierung

$$Q = \bigvee_{f} \left[\bigwedge_{r \in R} q_r(y_r) \wedge \bigwedge_{rr' \in E} g_{rr'}(y_r, y_{r'}) \right]$$

$$Q = \min_{y} \left[\sum_{r} q_r(y_r) + \sum_{rr'} g_{rr'}(y_r, y_{r'}) \right]$$

$$Q = \sum_{y} \left[\prod_{r} q_r(y_r) \cdot \prod_{rr'} g_{rr'}(y_r, y_{r'}) \right]$$

$$Q = \bigoplus_{f} \left[\bigotimes_{r} q_r(y_r) \otimes \bigotimes_{rr'} g_{rr'}(y_r, y_{r'}) \right]$$

d.h. dieselbe Aufgaben in unterschiedlichen Semiringen $(W, \oplus, \otimes)$
$q_r : K \to W$ und $g_{rr'} : K \times K \to W$

Spezialfälle:
OrAnd (CSP), MinSum (Energieminimierung), SumProd (Partition Funktion)

Stand der Technik

Alle Labelling Probleme sind NP-vollständig im allgemeinen Fall.

Alle Labelling Probleme sind durch Dynamische Programmierung polynomiell lösbar, wenn der Graph einfach ist (partielle w-Bäume niedriger Breite).

OrAnd Probleme auf allgemeinen Graphen sind bezüglich der Eigenschaften der Funktionen g vollständig klassifiziert (polynomiell $\leftrightarrow$ NP).

Submodulare MinSum Probleme (eine spezielle Eigenschaft der g Funktionen) auf allgemeinen Graphen sind polynomiell lösbar.

Es gibt viele näherungsweise effiziente Algorithmen für MinSum Probleme auf allgemeinen Graphen.

Es gibt näherungsweise weniger effiziente Algorithmen für SumProd Probleme auf allgemeinen Graphen.

Der Plan ...

Binäre (d.h. $K = \{0, 1\}$) submodulare MinSum Probleme, MinCut

Multilabel submodulare MinSum Probleme

Multilabel spezielle MinSum Probleme – „Suchtechniken“

Allgemeine MinSum Probleme – LP-Relaxationen

Lernen von MRF-s nach dem Maximum Likelihood Prinzip (überwacht, unüberwacht)

SumProd Probleme – Belief Propagation, Tree Decomposition, Mean-Field Approximation

SumProd Probleme und Marginalisierungen durch Sampling

CRF-s, diskriminatives Lernen