STRUKTURELLE MODELLE IN DER BILDVERARBEITUNG
11. ÜBUNG – MRF

Aufgabe 1. Sei $p(y)$ eine (a-posteriori) Wahrscheinlichkeitsverteilung von Labellings $y : R \to K$ eines Graphen $V = (R, E)$. Eine Erkennungsaufgabe wird als Aufgabe der Bayesschen Entscheidung formuliert:

$$R(y^*) = \sum_{y} p(y) C(y, y^*) \to \min_{y^*}.$$

Die Kostenfunktion ist dabei die additive Deltakostenfunktion für *Kanten*:

$$C(y, y^*) = \sum_{(rr') \in E} \mathbb{1}\big((y_r, y_{r'}) \neq (y^*_r, y^*_{r'})\big),$$

d.h. sie bewertet Übereinstimmung der *Labelpaare* in allen Kanten (vergleiche mit der additiven Kostenfunktion $\sum_r \mathbb{1}(y_r \neq y^*_r)$, die die Übereinstimmung der Label in den Knoten bewertet).

Leiten Sie die daraus folgende Entscheidungsstrategie ab.

Hinweis: Berücksichtigen Sie, dass es in diesem Fall nicht möglich ist, die Entscheidungen auf den Kanten anhand der marginalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Labelpaare von einander unabhängig zu treffen. Zeigen Sie, dass die gesuchte Entscheidungsstrategie der Lösung eines MaxSum Problems entspricht.

Aufgabe 2. In der Vorlesung wurde das Potts Modell

$$p(y) = \frac{1}{Z} \exp\left[-\alpha \sum_{rr' \in E} \mathbb{I}(y_r \neq y_{r'})\right]$$

betrachtet. Die Lernaufgabe bestand darin, die Wahrscheinlichkeit eines gegebenen Labellings y^* bezüglich α zu maximieren. Der Gradient des Likelihoods ist in diesem Fall

$$\frac{\partial \ln p(y^*)}{\partial \alpha} = -n(y^*) + \sum_y p(y) \cdot n(y),$$

wobei $n(y)$ die Anzahl der Kanten $(r, r') \in E$ mit $y_r \neq y_{r'}$ im Labelling y ist.

a) Zeigen Sie

$$\sum_y p(y) \cdot n(y) = \sum_{rr' \in E} p(y_r \neq y_{r'}).$$

b) Gegeben sei eine *Lernstichprobe* von Labellings $L = (y^1, y^2 \dots y^l)$. Wie ergibt sich der Gradient des Likelihoods der Lernstichprobe $\frac{\partial \ln p(L)}{\partial \alpha}$?

c) Verallgemeinern Sie **b)** auf den Fall eines allgemeinen homogenen Modells

$$p(y) = \frac{1}{Z} \exp\left[\sum_{rr' \in E} g(y_r, y_{r'})\right]$$

mit einer Funktion $g : K \times K \to \mathbb{R}$. Wie ergibt sich in diesem Fall der Gradient des Likelihoods der Lernstichprobe $\frac{\partial \ln p(L)}{\partial g(k,k')}$?