STRUKTURELLE MODELLE IN DER BILDVERARBEITUNG
9. ÜBUNG – SUBMODULARE MINSUM AUFGABEN, ICM

Aufgabe 1. Zeigen Sie dass das Potts Modell

$$g_{rr'}(k,k') = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k = k' \\ a > 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit mehr als zwei Labels *nicht* submodular ist.

Aufgabe 2. Sei die Labelmenge $K = \{1,2,\dots,|K|\}$ d.h. $K \subset \mathbb{Z}$. Man betrachte Funktionen $g_{rr'}(k,k') = f(k-k')$, d.h. der Wert der Funktion hängt nur von der *Differenz* der Label ab. Zeigen Sie, dass eine solche Funktion $g_{rr'}$ genau dann submodular ist, wenn die Funktion f konvex ist (in diesem Fall heißt eine Funktion $f(x)$ konvex, wenn $f(x-1) - 2\cdot f(x) + f(x+1) \geq 0$ gilt).

Aufgabe 3. Man betrachte für eine Funktion $g_{rr'}(k,k')$ und Viertupel k_1, k_2, k'_1, k'_2 die Zahl

$$\alpha_{rr'}(k_1,k_2,k'_1,k'_2) = g_{rr'}(k_1,k'_1) + g_{rr'}(k_2,k'_2) - g_{rr'}(k_1,k'_2) - g_{rr'}(k_2,k'_1)$$

(siehe Vorlesung). Die Werte von $g_{rr'}$ seien dabei endlich.
a) Beweisen Sie

$$\begin{aligned} &\alpha_{rr'}(k_1,k_1,k'_1,k'_2) = 0, \\ &\alpha_{rr'}(k_1,k_2,k'_1,k'_2) = -\alpha_{rr'}(k_2,k_1,k'_1,k'_2) \\ &\alpha_{rr'}(k_1,k_2,k'_1,k'_2) = \alpha_{rr'}(k_1,k_3,k'_1,k'_2) + \alpha_{rr'}(k_3,k_2,k'_1,k'_2) \end{aligned}$$

b) Auf der Menge der Label sei eine Ordnung „$\preceq$“ definiert. Somit bedeutet zum Beispiel $k_1 \leq k_3 < k_2$: „alle Label k_3 zwischen k_1 und k_2 (einschließlich k_1) in der gewählten Ordnung“. Schlussfolgern Sie aus a)

$$\alpha_{rr'}(k_1,k_2,k'_1,k'_2) = \sum_{k_3=k_1}^{k_2-1} \sum_{k'_3=k'_1}^{k'_2-1} \alpha_{rr'}(k_3,k_3+1,k'_3,k'_3+1).$$

c) Aus b) folgt, dass eine Funktion $g_{rr'}(k,k')$ submodular ist, wenn

$$g_{rr'}(k,k') + g_{rr'}(k+1,k'+1) \leq g_{rr'}(k,k'+1) + g_{rr'}(k+1,k')$$

für alle k und k' gilt. Die Bedingungen für alle weiteren Viertupel k_1, k_2, k'_1, k'_2 sind automatisch wegen b) erfüllt und somit redundant. Gilt das, wenn die Funktion $g_{rr'}$ unendlich große Werte annehmen kann? Ist das nicht der Fall, konstruieren Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 4. Eine Funktion $g_{rr'}(k,k')$ heißt *supermodular* bezüglich einer Ordnung „$\preceq$“, wenn

$$g(k_1,k_1') + g(k_2,k_2') \geq g(k_1,k_2') + g(k_2,k_1')$$

für alle $k_1 \preceq k_2$ und $k_1' \preceq k_2'$ gilt. Beweisen Sie, dass sich eine beliebige Funktion $g_{rr'}(k,k')$ auf die Summe einer submodularen und einer supermodularen Funktionen zerlegen lässt, d.h. $g_{rr'}(k,k') = g^{sub}_{rr'}(k,k') + g^{sup}_{rr'}(k,k')$ für alle k,k' gilt (dabei sind g^{sub} eine submodulare und g^{sup} eine supermodulare Funktion).

Aufgabe 5. Man betrachte einen elementaren Schritt des ICM-Algorithmus, d.h. die Wahl des günstigsten Labels in einem Knoten beim fixierten Rest:

$$y_r = \arg\min_{k\in K}\Big[q_r(k) + \sum_{rr'\in E} g_{rr'}(k,y_{r'})\Big].$$

Die Zeitkomplexität dieses Schrittes ist im allgemeinen Fall $O(m|K|)$, wobei m die Anzahl der mit dem Knoten r inzidenten Kanten ist. Wie kann man den Schritt effizienter gestalten, wenn die Funktionen $g_{rr'}$

a) dem Potts Modell entsprechen, d.h. $g_{rr'}(k,k') = a_{rr'} \cdot \mathbb{1}(k \neq k')$;

b) quadratische Abstände zwischen Labeln repräsentieren, d.h. $g_{rr'}(k,k') = a_{rr'} \cdot (k-k')^2$.