STRUKTURELLE MODELLE IN DER BILDVERARBEITUNG
8. ÜBUNG – ÄQUIVALENTE TRANSFORMATIONEN, MINCUT

Aufgabe 1. Gegeben sei eine binäre MinSum Aufgabe (d.h. $K = \{0,1\}$)

$$y^* = \arg\min_y \Big[\sum_r q_r(y_r) + \sum_{rr'} g_{rr'}(y_r, y_{r'})\Big].$$

Man überführe sie mithilfe äquivalenter Transformationen in die Form

$$y^* = \arg\min_y \Big[\sum_r q_r(y_r) + \sum_{rr'} \alpha_{rr'} \cdot y_r \cdot (1 - y_{r'})\Big].$$

mit kantenspezifischen Zahlen $\alpha_{rr'}$.

Hinweis: alle Werte der Funktionen $g_{rr'}$ sind gleich 0 außer $g_{rr'}(1,0) = \alpha_{rr'}$.

Aufgabe 2. Gegeben sei eine binäre MinSum Aufgabe in der kanonischen Form

$$y^* = \arg\min_y \Big[\sum_r q_r(y_r) + \sum_{rr'} \alpha_{rr'} \cdot \mathbb{I}(y_r \neq y_{r'})\Big].$$

Die Zahlen $\alpha_{rr'}$ sind dabei nichtnegativ (d.h. $\alpha_{rr'} \geq 0$) und die Funktionen q_r sind beliebig. Zeigen Sie, wie sich eine solche Aufgabe in eine MinCut Aufgabe mit **nur nichtnegativen** Kantenkosten überführen lässt.

Aufgabe 3. Man betrachte einen azyklischen Graph $V = (R, E)$ (einen Baum) mit zwei ausgezeichneten Knoten $s \in R$ und $t \in R$ und nichtnegativen Kantenkosten $c_{rr'}$ für $(r, r') \in E$. Sei $(s = r_1, r_2, \dots, r_m = t)$ der Pfad vom s nach t in diesem Graphen. Beweisen Sie, dass der Wert des optimalen Schnitts C^* den minimalen Kantenkosten entlang dieses Pfades gleich ist, d.h.

$$\min_C \sum_{rr' \in C} c_{rr'} = \min_{i=1}^{m-1} c_{r_i r_{i+1}}.$$

Aufgabe 4.

a) Gegeben sei eine binäre MinSum Aufgabe, deren Graph eine Kette ist. Wie sieht der Graph der entsprechenden MinCut Aufgabe aus, wie groß ist (im Allgemeinen Fall) seine Baumbreite?

b) Wie sieht der Graph einer MinSum Aufgabe aus, wenn der Graph der entsprechenden MinCut Aufgabe eine Kette ist?

Vereinbarung: In einer MinCut Aufgabe bezeichnen wir eine Kante nur dann als „anwesend“, wenn ihre Kosten ungleich 0 sind.