

**STRUKTURELLE MODELLE IN DER BILDVERARBEITUNG**  
**5. ÜBUNG – EXPECTATION-MAXIMIZATION ALGORITHMUS**

**Aufgabe 1.** Man betrachte „Mixtur der Gaussiane“ als Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$p(x) = \sum_k w_k \cdot \mathcal{N}(x; \mu_k, \sigma) = \sum_k w_k \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp \left[ -\frac{\|x - \mu_k\|^2}{2\sigma^2} \right],$$

mit  $w_k \geq 0$  für alle  $k$  und  $\sum_k w_k = 1$ . Alle unbekannte Parameter der Mixtur (d.h. die Gewichte  $w_k$ , die Zentren  $\mu_k$  und die Streuung  $\sigma$ ) sollen anhand einer Lernstichprobe von Punkten  $L = (x^1, x^2 \dots x^l)$  angelernt werden.

*Hinweis:* das Modell kann als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Paare  $p(k, x) = p(k) \cdot p(x|k)$  verstanden werden, in der die Klassen  $k$  den Gaussianen entsprechen, d.h.  $p(k) = w_k$  und  $p(x|k) = \mathcal{N}(x; \mu_k, \sigma)$ . Die Lernaufgabe besteht somit im unüberwachten Lernen der Parameter (die Daten in der Lernstichprobe sind unvollständig – die Klassen fehlen). Lösen Sie diese mittels Expectation-Maximization Algorithmus.