

STRUKTURELLE MODELLE IN DER BILDVERARBEITUNG

3. ÜBUNG – MARKOVSCHE KETTEN

Aufgabe 1. Sei x und y zwei diskrete Zufallsvariablen. Konstruieren Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x, y)$ derart, dass die Maximum Marginal Entscheidung

$$x^* = \arg \max_x \sum_y p(x, y)$$

$$y^* = \arg \max_y \sum_x p(x, y)$$

die Wahrscheinlichkeit $p(x^*, y^*) = 0$ hat.

Aufgabe 2. Man betrachte das Markovsche Modell mit verborgenen Variablen

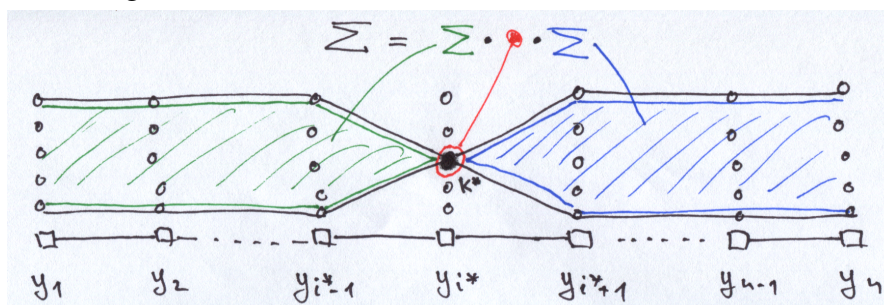
$$p(y, x) = p(y_1) \prod_{i=2}^n p(y_i | y_{i-1}) \cdot \prod_{i=1}^n p(x_i | y_i).$$

Geben Sie einen effizienten Algorithmus für die Berechnung der marginalen a-posteriori Wahrscheinlichkeiten der Zustände $p(y_{i^*} = k^* | x)$ für alle i^* und k^* an.

Hinweis: Nutzen Sie die folgende Eigenschaft:

$$\begin{aligned} p(y_{i^*} = k^* | x) &= \sum_{y: y_{i^*} = k^*} \left[p(y_1) \prod_{i=2}^n p(y_i | y_{i-1}) \cdot \prod_{i=1}^n p(x_i | y_i) \right] = \\ &= \sum_{y_1} \sum_{y_2} \dots \sum_{y_{i^*-1}} \left[p(y_1) \cdot \prod_{i=2}^{i^*-1} p(y_i | y_{i-1}) \cdot \prod_{i=1}^{i^*-1} p(x_i | y_i) \cdot p(y_{i^*} = k^* | y_{i^*-1}) \right] \cdot p(x_{i^*} | y_{i^*} = k^*) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{y_{i^*+1}} \sum_{y_{i^*+2}} \dots \sum_{y_n} \left[p(y_{i^*+1} | y_{i^*} = k^*) \cdot \prod_{i=i^*+2}^n p(y_i | y_{i-1}) \cdot \prod_{i=i^*+1}^n p(x_i | y_i) \right]. \end{aligned}$$

(unten ist diese Eigenschaft schematisch skizziert).



Aufgabe 3. Man betrachte das in der vorigen Aufgabe beschriebene Markovsche Modell. Für dieses Modell soll ein Bayesscher Klassifikator gebildet werden. Die Besonderheit besteht darin, dass die Kostenfunktion für Fehlklassifikation nur von den Zuständen in bestimmten Zeitpunkten abhängt. Präzisieren wir die obige Aussage. Sei $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, $i_j \in \{1 \dots n\}$, $m < n$ die Menge der „relevanten“ Zeitpunkte. Bezeichnen wir mit y_I die Teilfolge $(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m})$ der Zustände in diesen Zeitpunkten. Die obige Aussage bedeutet, dass die Kostenfunktion $C(y, y')$ eine Funktion der Teilfolgen y_I und y'_I ist, d.h. $C(y, y') = C(y_I, y'_I)$. Wie ergibt sich die Bayessche Entscheidung für derartige Kostenfunktionen?

a) Betrachten Sie zunächst als Beispiel die Deltafunktion

$$C(y_I, y'_I) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } y_I = y'_I \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(y_I|x)$ auch Markovsch ist. Schlussfolgern Sie die Vorgehensweise für Bayessche Entscheidung für beliebige Kostenfunktionen dieser Art.