

STRUKTURELLE MODELLE IN DER BILDVERARBEITUNG

1. ÜBUNG – MARKOVSCHE KETTEN

Falls nichts anderes gesagt, werden als Wahrscheinlichkeitsmodelle Markovsche Ketten betrachtet, d.h. die Wahrscheinlichkeit einer Zustandsfolge $y = (y_1, y_2 \dots y_n)$ der Länge n mit $y_i \in K$ (endliche diskrete Zustandsmenge) ergibt sich als

$$p(y) = p(y_1) \prod_{i=2}^n p(y_i | y_{i-1}).$$

Aufgabe 1. Gegeben sei das folgende Wortmodell. Alle zu diesem Modell zugehörigen Worte haben gleiche Länge N . Die Worte bestehen aus den Buchstaben a und b . In den ersten n_a Positionen befinden sich Buchstaben a , der Rest ist mit Buchstaben b ausgefüllt. Worte, die nur aus den Buchstaben a oder nur aus den Buchstaben b bestehen, sind auch erlaubt ($0 \leq n_a \leq N$). Unten ist ein solches Wort schematisch angezeigt

$$\underbrace{a \dots a}_{n_a} b \dots b.$$

N

Informell gesagt, beschreibt das Modell alle mögliche Segmentierungen einer Folge der Länge N in zwei Teile.

a) Bilden Sie ein Markovsches Wahrscheinlichkeitsmodell, für das alle oben beschriebenen Worte gleichwahrscheinlich sind (die Wahrscheinlichkeiten aller anderen Worte sind Null). Nutzen Sie dabei die Parametrisierung des Modells durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zustände im ersten Zeitpunkt $p(y_1)$ und die Übergangswahrscheinlichkeiten $p(y_i | y_{i-1})$, $i = 2 \dots N$. Berücksichtigen Sie dabei, dass diese Matrizen nicht unbedingt dieselbe sein müssen.

b) Sei die „gewünschte“ Wahrscheinlichkeitsverteilung der Segmentierungen $p(n_a)$ bekannt. Wie ergeben sich daraus die Parameter des Markovschen Wahrscheinlichkeitsmodells $p(y_1)$ und $p(y_i | y_{i-1})$?

Aufgabe 2. Sei $K_A \subset K$ eine Teilmenge von Zuständen und $A = K_A^n$ die Menge aller Zustandsfolgen y mit $y_i \in K_A$ für alle $i = 1 \dots n$. Geben Sie einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $p(A)$ des Ereignisses A in diesem Wahrscheinlichkeitsmodell an.

Aufgabe 3. Die Menge der Zustände K sei vollständig geordnet, d.h. $k \in K = \{1, 2, \dots, m\}$. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten $p(y_i = k | y_{i-1} = k')$ ist für alle Positionen $i = 2 \dots n$ dieselbe und hat die Form:

$$p(k | k') = \begin{cases} a & \text{für } k = k', k' \neq m, \\ b & \text{für } k = k' + 1, k' \neq m, \\ 1 & \text{für } k = k' = m \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a, b > 0$ und $a + b = 1$. Die Verteilung $p(y_1)$ für den Startzustand sei 1 für $k = 1$ und 0 sonst.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p(y_i = 1)$ dass die Folge im Moment i durch den Zustand $k = 1$ geht?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p(y_i = k)$ dass die Folge im Moment i durch einen Zustand $k \neq 1$ geht?

Aufgabe 4. Man betrachte das folgende Markov Modell mit der Zustandsmenge aus zwei Zuständen: $K = \{0, 1\}$. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten $p(k | k')$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} p(k = 0 | k' = 0) &= 1 - \alpha \\ p(k = 1 | k' = 0) &= \alpha \\ p(k = 0 | k' = 1) &= 1 \\ p(k = 1 | k' = 1) &= 0 \end{aligned}$$

Die Verteilung für den Startzustand sei $p(y_1 = 0) = \beta$ und $p(y_1 = 1) = 1 - \beta$.

- a) Wie ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $p(y_i = 0)$ für den Zeitpunkt i aus der Wahrscheinlichkeit $p(y_{i-1} = 0)$ im vorhergehenden Zeitpunkt $i - 1$? Geben Sie die Abbildung $p(y_{i-1} = 0) \mapsto p(y_i = 0)$ explizit an.
- b) Wie ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $p(y_i = 0)$ für den Zeitpunkt i aus der Wahrscheinlichkeit $p(y_1 = 0) = \beta$ im ersten Zeitpunkt? Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeit für $i \rightarrow \infty$ nicht von β abhängt.
- c) Was ergibt sich für den stationären Wert $\lim_{i \rightarrow \infty} p(y_i = 0)$?

Aufgabe 5. Gegeben sei die „gewöhnlichen“ Parameter des Modells, d.h. $p(y_1)$ und $p(y_i | y_{i-1})$.

- a) Wären noch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $p(y_i)$ für die Zustände im i -ten Folgenglied für alle $i = 2 \dots n$ bekannt, so könnte man auch die „inversen“ Übergangswahrscheinlichkeiten $p(y_{i-1} | y_i)$ berechnen. Wie?
- b) Geben Sie einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der $p(y_i)$ für $i = 2 \dots n$ an.

Aufgabe 6. Einer der Zustände $k^* \in K$ sei ausgezeichnet. Es interessiert, wieviel mal eine mit diesem Modell generierte Folge y diesen Zustand im Mittel enthält. Geben Sie

einen effizientes Verfahren zur Berechnung dieses Mittelwerts an.

Hinweis: Nutzen Sie dabei den Fakt, dass der Erwartungswert einer Summe von zufälligen Größen gleich der Summe ihrer Erwartungswerte ist! Die Anzahl der Vorkommen von k^* in einer Folge y lässt sich offensichtlich in der Form

$$\delta_{y_1 k^*} + \delta_{y_2 k^*} + \dots + \delta_{y_n k^*}$$

schreiben (δ ist das Kronecker-Symbol, d.h. $\delta_{ab} = 1$, falls $a = b$ und 0 sonst).