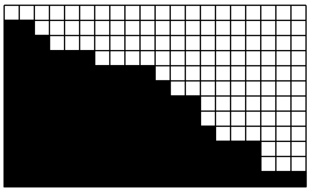
MUSTERERKENNUNG, 3. SEMINAR – HOPFIELD-NETZE, CLUSTERUNG

Aufgabe 1. Konstruieren Sie ein Hopfield-Netz, das die folgende Bildklasse modelliert. Die Bilder sind schwarzweiß und bestehen aus einzelnen schwarzen Pixeln auf dem weißen Hintergrund. Die Anzahl der schwarzen Pixel ist dabei beliebig. Verwenden Sie ein Neuron pro Pixel so dass das Feuern des Neurons einem schwarzen Pixel entspricht. Wie sind die Gewichte und Schwellwerte des Netzes zu wählen, damit nur die wie oben beschriebenen Bilder Netzkonfigurationen maximaler Energie entsprechen?

Aufgabe 2. Man konstruiere ein Hopfield-Netz, das die folgende Bildklasse modelliert. Die Bilder sind schwarzweiß. Die Grenze zwischen dem schwarzen bzw. dem weißen Gebiet (die Gebiete können jeweils leer sein) ist dabei eine monoton fallende Kurve. Ein Beispiel eines solchen Bildes ist in der Abbildung unten dargestellt.

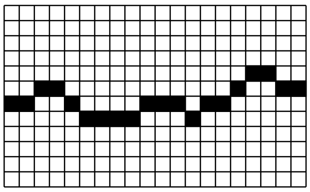


Das Netz zur Modellierung diese Klasse soll folgende Eigenschaften haben. Die Neuronen sind zu je zwei in Kolumnen zusammengefasst (d.h. zwei Neuronen per Pixel) und entsprechen den Pixelwerten schwarz/weiß. Gewichte verbinden Neuronen einer Kolumne als auch Neuronen benachbarter Kolumnen.

a) Wie ist das intrakolumnare Gewicht zu wählen, damit pro Kolumne genau ein Neuron aktiv ist?

b) Wie sind die Gewichte zwischen den Kolumnen und die Schwellwerte zu wählen, damit alle Bilder aus der oben beschriebenen Klasse Netzkonfigurationen maximaler Energie entsprechen (alle anderen Bilder entsprechen Netzkonfigurationen mit kleineren Werten der Energie)?

Aufgabe 3. Modellieren Sie mithilfe eines Hopfield-Netzes (ähnlich wie bei den vorigen Aufgaben) die Klasse der Bilder, in denen eine schwarze, ein Pixel breite „fast horizontale“ Linie gezeichnet ist. Ein Beispiel eines solchen Bildes ist in der Abbildung unten dargestellt.



Hinweis: Verwenden Sie drei Neuronen per Pixel, die jeweils eine semantische Bedeutung haben: „unten“, „auf der Linie“, „oben“.

Aufgabe 4. Konstruieren Sie ein möglichst einfaches Beispiel (d.h. mit nur zwei Clustern und wenigen Datenpunkten), bei dem der K-Means Algorithmus nicht zum globalen Optimum konvergiert.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die Clusterungsaufgabe

$$\sum_k \sum_{ij \in I_k} d(i,j) \to \min_C$$

(siehe Vorlesung) der Aufgabe

$$\sum_{ij:C(i) \neq C(j)} d(i,j) \to \max_C$$

äquivalent ist. Mit anderen Worten, statt die Summe der Abstände innerhalb der Clusters zu minimieren wird die Summe der Abstände zwischen den Clustern maximiert.