

MUSTERERKENNUNG, 4. SEMINAR – WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

Aufgabe 1. Zwei Personen vereinbaren, sich in einem Zeitraum der Länge T zu treffen. Jeder kommt gleichwahrscheinlich in diesem Zeitintervall zum Treffpunkt. Die zuerst kommende Person wartet auf die zweite eine Zeit $a < T$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die zwei Personen treffen.

Aufgabe 2. Ein Punkt wird zufällig in das Quadrat $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ geworfen.

a) Man berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $x_1 + x_2 < y$:

$$P(\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 < y\}) = F(y)$$

Konstruieren Sie den Graph der Funktion $F(y)$.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die quadratische Gleichung für y

$$y^2 - x_1 \cdot y + x_2 = 0$$

reelle Wurzeln hat?

Aufgabe 3. (Buffon Aufgabe) Eine Nadel der Länge l wird auf ein regulär liniertes Blatt Papier zufällig geworfen. Der Abstand zwischen zwei Linien auf dem Blatt sei $a \geq l$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nadel mindestens eine Linie kreuzt.

Aufgabe 4. Eine Person behauptet, immer in Roulette gewinnen zu können. Die Strategie ist dabei die folgende:

Ich setze ein Chip auf Rot. Wenn ich gewinne, kriege ich zwei Chips¹ und verlasse das Casino. Sollte ich verlieren, setze ich wieder auf Rot, diesmal aber zwei Chips. Sollte ich wieder verlieren, setze ich vier Chips auf Rot. Ich verdoppele den Einsatz solange, bis ich gewinne. Am Ende habe ich ein Chip mehr als ich insgesamt eingesetzt habe. Ich habe immer 1023 Chips mit, d.h. ich verliere nur dann, wenn 10 mal nacheinander Schwarz kommt, was sehr unwahrscheinlich ist.

Beweisen Sie, dass diese Behauptung falsch ist, indem Sie den Erwartungswert des Gewinns berechnen.

¹Beim Gewinn mit der Farbe kriegt man die doppelte Anzahl der Chips zurück.

Aufgabe 5. Eine Nadel mit bekannter Länge l wird zufällig auf die Zahlenachse geworfen. Eine Messvorrichtung bestimmt unabhängig von einander die Lagen x_a und x_e des Anfangs- bzw. Endpunktes. Die Verteilung des Fehlers sei für beide Messgrößen gleich und Gaussch:

$$p(x_i|x_i^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x_i - x_i^*)^2}{2\sigma^2}\right], \quad i = a, e$$

(hier bezeichnen x_a^* , x_e^* die wahren Lagen des Anfangs- bzw. Endpunktes). Wie ergibt sich die a-posteriori Wahrscheinlichkeitsverteilung des Anfangspunktes x_a unter der Bedingung der bekannten Messwerte x_a und x_e ? Wie würden Sie die Position der Nadel anhand der Messwerte x_a und x_e schätzen?

Aufgabe 6. Zwei Spieler vereinbaren folgende Spielregel. Eine Münze wird solange geworfen bis ein Spieler gewinnt. Der erste Spieler wählt eine Kombination, die aus drei nach einander folgenden Ausgängen des Wurfs besteht (z.B. „Kopf,Zahl,Kopf“). Diese Kombination teilt er dem zweiten Spieler mit. Der Zweite entscheidet sich dann für eine andere Kombination. Derjenige gewinnt, dessen Kombination als erste auftritt.

- a) Wie muss der zweite Spieler seine Kombination wählen um die Wahrscheinlichkeit seines Gewinns zu maximieren?
- b) Wie muss der erste Spieler seine Kombination wählen?