

MUSTERERKENNUNG, 9. SEMINAR – SUPPORT VECTOR MACHINES

Aufgabe 1. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ zwei reellwertige Variablen. Lösen Sie

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\rightarrow \min_{xy} \\ \text{s.t. } 2x + y &\geq 1. \end{aligned}$$

a) Geben Sie zunächst eine geometrische Interpretation der Aufgabe an und leiten Sie daraus die Lösung ab.

b) Lösen Sie die Aufgabe mittels der Methode der Lagrange-Koeffizienten.

Aufgabe 2. Für Muster $x \in \mathbb{R}_{++}^n$ (d.h. $x_i > 0, \forall i$), die in zwei Klassen zu teilen sind, wird die Menge der Entscheidungsregeln

$$\prod_i x_i^{w_i} \geq b$$

betrachtet. Dabei sind der Gewichtsvektor $w \in \mathbb{R}^n$ sowie der Schwellwert b Parameter der Entscheidungsregel.

a) Gegeben sei eine klassifizierte Lernstichprobe $(x^1, k_1), \dots, (x^\ell, k_\ell)$. Wie kann man die Parameter der Entscheidungsregel mithilfe des Perzeptron-Algorithmus lernen?

b) Wie groß ist die Vapnik-Červonenkis Dimension dieser Klasse von Strategien?

Aufgabe 3. Sei $k_1(x, x')$ und $k_2(x, x')$ zwei Kernel. Beweisen Sie, dass

a) $k_3(x, x') = k_1(x, x') + k_2(x, x')$ und

b) $k_3(x, x') = k_1(x, x') \cdot k_2(x, x')$ auch Kernel sind.

Sei $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ und \mathcal{H}_3 die Merkmalsräume der Kernel k_1 bzw. k_2 und k_3 . Wie ergeben sich die Dimensionen der jeweiligen Merkmalsräume \mathcal{H}_3 aus den Dimensionen der Merkmalsräume \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 ?

Aufgabe 4. Für Muster $x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}$ wird die folgende Abbildung $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}$ in den Merkmalsraum $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ definiert:

$$\Phi(x) = (\sin(\lambda_1 x), \cos(\lambda_2 x))$$

mit den Parametern der Abbildung $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwechseln Sie bitte nicht die Parameter der Abbildung λ_1, λ_2 und die Parameter w_1, w_2 der Entscheidungsregel im Merkmalsraum (siehe unten).

a) Wie sieht die Menge der der Input-Muster \mathcal{X} im Merkmalsraum \mathcal{H} aus?

b) Zur Klassifikation der Muster in zwei Klassen wird eine lineare Entscheidungsregel im Merkmalsraum verwendet, d.h.

$$\langle \Phi(x), w \rangle \geq b$$

mit den Parametern $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ und $b \in \mathbb{R}$. Gegeben sei eine Entscheidungsregel (d.h. ihre Parameter w und b). Wie sieht die Aufteilung des Input-Raumes \mathcal{X} in die Klassen aus?