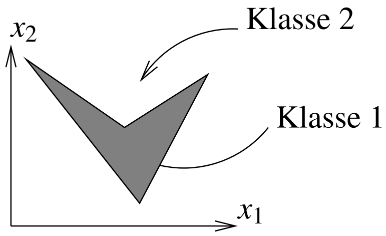
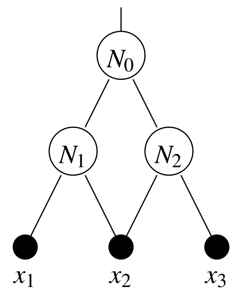
MUSTERERKENNUNG, 2. SEMINAR – NEURONALE NETZE

Aufgabe 1. Ein Feed-Forward Netz erhält als Inputs zwei reellwertige Signale x_1 und x_2. Dieses Netz soll alle diejenigen Muster der ersten Klasse zuordnen, die innerhalb des unten skizzierten Gebietes im $\mathbb{R}^2$ liegen. Alle anderen Muster sind der zweiten Klasse zuzuordnen.



Wieviel Schichten werden benötigt um einen solchen Klassifikator mit binären Schwellwertneuronen zu realisieren? Wie ist das Netz zu organisieren (d.h. wie sind die Neuronen in diesem Netz mit einander verbunden, welche Funktionen realisieren sie, welche Bedeutungen haben die Schichten des Netzes etc.)?

Aufgabe 2.
a) Für binäre Muster (x_1,x_2,x_3), $x_i \in \{0,1\}$ soll ein Klassifikator realisiert werden, der die Muster $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ der ersten Klasse – und alle anderen Muster der zweiten Klasse zuordnet. Dafür soll das abgebildete zweischichtige Feed-Forward Netz verwendet werden.



Wie muss man die Gewichte und Schwellen der 3 Neuronen wählen, damit das Netz den geforderten Klassifikator realisiert?
a) Verallgemeinern Sie die Aufgabe für den Fall, dass der Klassifikator für binäre Muster $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $x_i \in \{0,1\}$ realisiert werden soll. Zu der ersten Klasse gehören die Muster, für die $x_{i+1} \geq x_i$ für alle i gilt. Der zweiten Klasse werden alle anderen Muster zugeordnet.

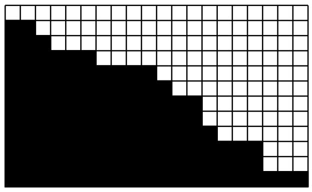
Aufgabe 3. Die Menge aller 3-Tupel (x_1, x_2, x_3) von reellen Zahlen $x_i \in \mathbb{R}$ soll wie folgt auf die Menge der 3-Tupel (y_1, y_2, y_3) von binären Zahlen $y_i \in \{0, 1\}$ abgebildet werden:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_i = \max_j x_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das heißt, das i-te Bit y_i wird genau dann gesetzt, wenn der i-te Inputwert x_i das Maximum aller 3 Werte ist. Realisieren Sie diese Abbildung durch ein Feed Forward Netz aus binären Schwellwertneuronen. Geben Sie die Struktur des Netzes und geeignete Gewichte und Schwellwerte für die Neuronen an.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst das einfachere Problem mit 2-Tupeln.

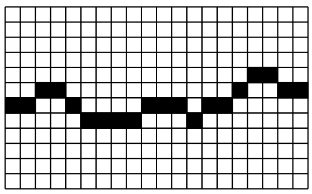
Aufgabe 4. (Aus der Vorlesung). Sei y eine Konfiguration eines Hopfield-Netzes und $n(y)$ die Anzahl der „Cracks" – d.h. die Anzahl der Paare benachbarter Neuronen unterschiedlicher Aktivitäten (z.B. $0 \leftrightarrow 1$). Man konstruiere das Netz derart, dass seine Energie proportional zur negativen Anzahl der Cracks ist, d.h. $E(y) \sim -n(y)$.

Aufgabe 5. Man konstruiere ein Hopfield-Netz, das die folgende Bildklasse modelliert. Die Bilder sind schwarzweiß. Die Grenze zwischen dem schwarzen bzw. dem weißen Gebiet (die Gebiete können jeweils leer sein) ist dabei eine monoton fallende Kurve. Ein Beispiel eines solchen Bildes ist in der Abbildung unten dargestellt.



Das Netz zur Modellierung diese Klasse soll folgende Eigenschaften haben. Die Neuronen sind zu je zwei in Kolumnen zusammengefasst und entsprechen den Pixelwerten schwarz/weiß. Gewichte verbinden Neuronen einer Kolumne als auch Neuronen benachbarter Kolumnen.
a) Wie ist das intrakolumnare Gewicht zu wählen, damit pro Kolumne höchstens ein Neuron aktiv ist?
b) Wie sind die Gewichte zwischen den Kolumnen und der Schwellwert zu wählen, damit folgendes gilt. Alle Bilder aus der oben beschriebenen Klasse entsprechen Netzkonfigurationen maximaler Energie. Alle anderen Bilder entsprechen Netzkonfigurationen mit kleineren Werten der Energie.

Aufgabe 6. Modellieren Sie mithilfe eines Hopfield-Netzes (ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe) die Klasse der Bilder, in denen eine schwarze, ein Pixel breite „fast horizontale" Linie gezeichnet ist. Ein Beispiel eines solchen Bildes ist in der Abbildung unten dargestellt.



Hinweis: Verwenden Sie drei Neuronen per Pixel, die jeweils eine semantische Bedeutung haben: „unten", „auf der Linie", „oben".