

**MUSTERERKENNUNG,  
6. SEMINAR – MAXIMUM-LIKELIHOOD PRINZIP**

**Aufgabe 1.** Ein Objekt kann sich in zwei Zuständen  $k = 1, 2$  befinden. Die a-priori Wahrscheinlichkeiten  $p(k = 1)$  und  $p(k = 2)$  seien bekannt. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Merkmale  $x \in \mathbb{R}^n$  sind Gaußsch verteilt:

$$p(x|k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma^k)^n} \exp\left[-\frac{\|x - \mu\|^2}{2\sigma^{k2}}\right].$$

Beide Verteilungen haben dasselbe Zentrum  $\mu$  aber unterschiedliche Streuungen  $\sigma_k$ . Gegeben sei eine klassifizierte Stichprobe  $L = ((x^1, k^1), \dots, (x^{|L|}, k^{|L|}))$ . Seien die Streuungen  $\sigma^k$  bekannt. Man schätze  $\mu$  mit Hilfe des Maximum-Likelihood Prinzips.

**Aufgabe 2.**

a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer skalaren Größe  $x \in \mathbb{R}$  ist

$$p(x) = C \cdot \exp[-\tau|x - \mu|]$$

mit reellen Parametern  $\tau$  und  $\mu$ . Sie sollen nach dem Maximum-Likelihood Prinzip anhand einer Lernstichprobe  $L = (x^1, \dots, x^{|L|})$  gelernt werden. Wie ergeben sich daraus die gesuchten Größen?

b) Lösen Sie diese Aufgabe für die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(x) = \begin{cases} C \cdot \exp[-\tau(x - \mu)] & \text{wenn } x \geq \mu, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Aufgabe 3.** Die Merkmale eines Objektes, welches sich in zwei Zuständen  $k = 1, 2$  befinden kann, sind Vektoren  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist

$$\begin{aligned} p(k=1) &= p(k=2), \\ p(x|k=1) &= C \cdot \exp\left[-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma^2}\right], \\ p(x|k=2) &= C \cdot \exp\left[-\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma^2}\right], \end{aligned}$$

mit den Parametern  $\mu_1, \mu_2, \sigma \in \mathbb{R}$ .

- a) Wie sieht die Klasse der Entscheidungsregeln für dieses Wahrscheinlichkeitsmodell aus?
- b) Seien die Parameter  $\mu_1$  und  $\mu_2$  unbekannt. Gegeben sei eine Lernstichprobe  $((x^1, k^1), \dots, (x^m, k^m))$ . Finden Sie die unbekannt Parameter nach dem Maximum Likelihood Prinzip.
- c) Finden Sie die Entscheidungsregel, die die Anzahl der Fehlklassifikationen auf der Lernstichprobe minimiert.