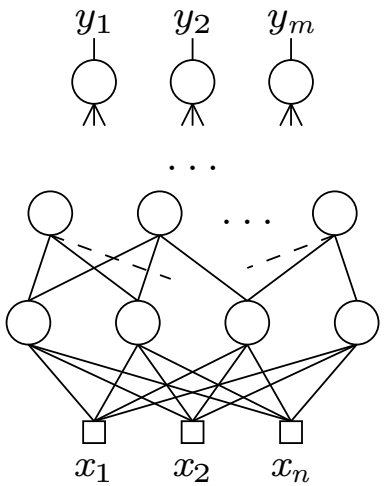
Mustererkennung: Neuronale Netze

Feed-Forward Netze



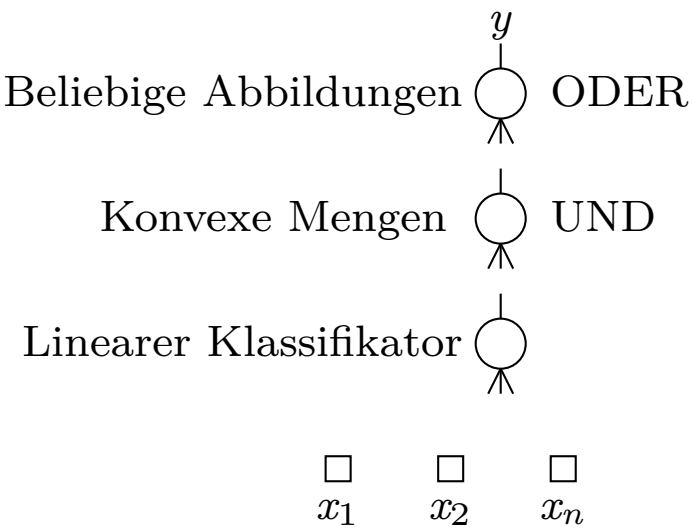
i – Nummer der Schicht
$i = 0$ – Input Schicht
$i = i_{max}$ – Output Schicht
j – Nummer des Neurons
y_i – Output der i-ten Schicht (Vektor)
y_{ij} – eine Komponente davon
$y_0 = x$ – Input Signal
w_i – Gewichtsmatrix, $i = 1 \dots i_{max}$
$w_{ijj'}$ – Gewicht, das (i, j) mit $(i-1, j')$ verbindet
b_{ij} – Schwellwerte

$$y_{ij} = f\left(\sum_{j'} w_{ijj'}\, y_{i-1\,j'} - b_{ij}\right)$$

Spezialfall: $m = 1$, Schwellwertneuronen – Realisiert eine Abbildung $\mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$

Welche Abbildungen sind realisierbar?

Funktionalität



1 Schicht – ein einzelnes Neuron →
→ linearer Klassifikator

2 Schichten (was auf jeden Fall geht) –
– UND-Neuron in Output Schicht →
→ Schnitt der Halbräume → konvexe Gebiete
Wenn die Anzahl der Neuronen nicht beschränkt ist – beliebige konvexe Gebiete (beliebig gut approximierbar)

3 Schichten – beliebige Abbildungen überhaupt als ODER über eine beliebige Anzahl der konvexen Gebiete

RBF-Neuron (Radial Basis Function) – „ersetzt eine Schicht“:

$$y = f(\|x - \mu\| - b)$$

Neuronales Netz mit nur einer Zwischenschicht aus RBF-Neuronen und einem ODER-Neuron als Output
⇒ beliebige Abbildungen $\mathbb{R} \to \{0, 1\}$!!!

Error Backpropagation

Das Verfahren zum Lernen Feed-Forward Netze mit Sigmoid-Neuronen
– Gradient Methode

Gegeben: Lernstichprobe $\Big((x^1, k^1) \dots (x^l, k^l)\Big)$, $x^l \in \mathbb{R}^n$, $k^l \in \mathbb{R}$
Gesucht: Gewichte und Schwellwerte aller Neuronen

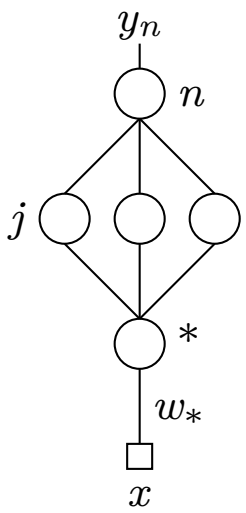
Sei $y(x; w, b)$ das Output des Netzes (mit aktuellen Parametern (w, b)) beim Input x
Die zu minimierende Zielfunktion ist:

$$F(w, b) = \sum_l \Big(k^l - y(x^l; w, b)\Big)^2$$

Ableitung (zunächst für nur ein Neuron und ein Paar (x, k))
– Anwendung der Kettenregel:

$$\frac{\partial F(w, b)}{\partial w_j} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial w_j} = (y - k) \cdot \frac{\exp(-y')}{\Big(1 + \exp(-y')\Big)^2} \cdot x_j = \delta \cdot d(y') \cdot x_j$$

Error Backpropagation



$$\frac{\partial F}{\partial w_*} =$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial y'_n} \cdot \left[\sum_j \frac{\partial y'_n}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial y'_j} \cdot \frac{\partial y'_j}{\partial y_*} \right] \cdot \frac{\partial y_*}{\partial y'_*} \cdot \frac{\partial y'_*}{\partial w_*} =$$

$$\left[\sum_j \delta_n \cdot d(y'_n) \cdot w_{nj} \cdot d(y'_j) \cdot w_{j*} \right] \cdot d(y'_*) \cdot x =$$

$$\left[\sum_j \delta_j \cdot d(y'_j) \cdot w_{j*} \right] \cdot d(y'_*) \cdot x =$$

$$\delta_* \cdot d(y'_*) \cdot x$$

mit

$$\delta_j = \delta_n \cdot d(y'_n) \cdot w_{nj}$$

$$\delta_* = \left[\sum_j \delta_j \cdot d(y'_j) \cdot w_{j*} \right]$$

Error Backpropagation

Allgemein:
Berechne die „Fehler“ δ_{ij} in der i-ten Schicht aus den Fehlern $\delta_{i+1\ j}$ in der $i+1$-ten Schicht (bei den aktuellen Parametern des Netzes) – propagiere die Fehler zurück.

Algorithmus zur Berechnung des Gradienten für ein Paar (x, k):

1) Forward: Berechne alle y' und y (wende das Netz an),
   berechne den Output-Fehler $\delta_n = y_n - k$
2) Backward: Berechne die Fehler für Neuronen in Zwischenschichten:

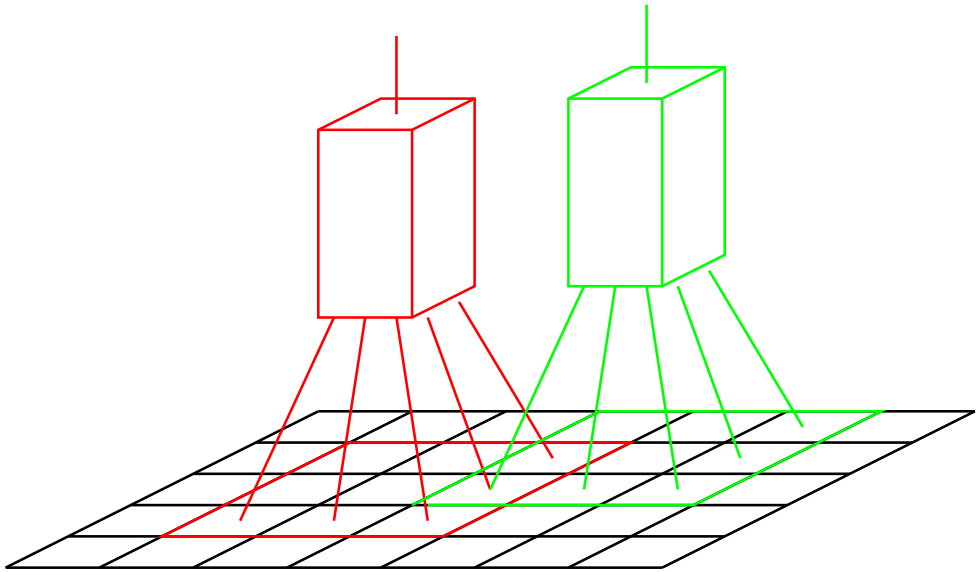
$$\delta_{ij} = \sum_{j'} \delta_{i+1\ j'} \cdot d(y_{i+1\ j'}) \cdot w_{i+1\ j'j}$$

3) Berechne den Gradient:

$$\frac{\partial F}{\partial w_{ijj'}} = \delta_{ij} \cdot d(y'_{ij}) \cdot y_{i-1\ j'}$$

Für mehrere Paare (x^l, k^l) – summiere die Gradienten.

Time Delay Neural Networks (TDNN) – Convolutional Networks

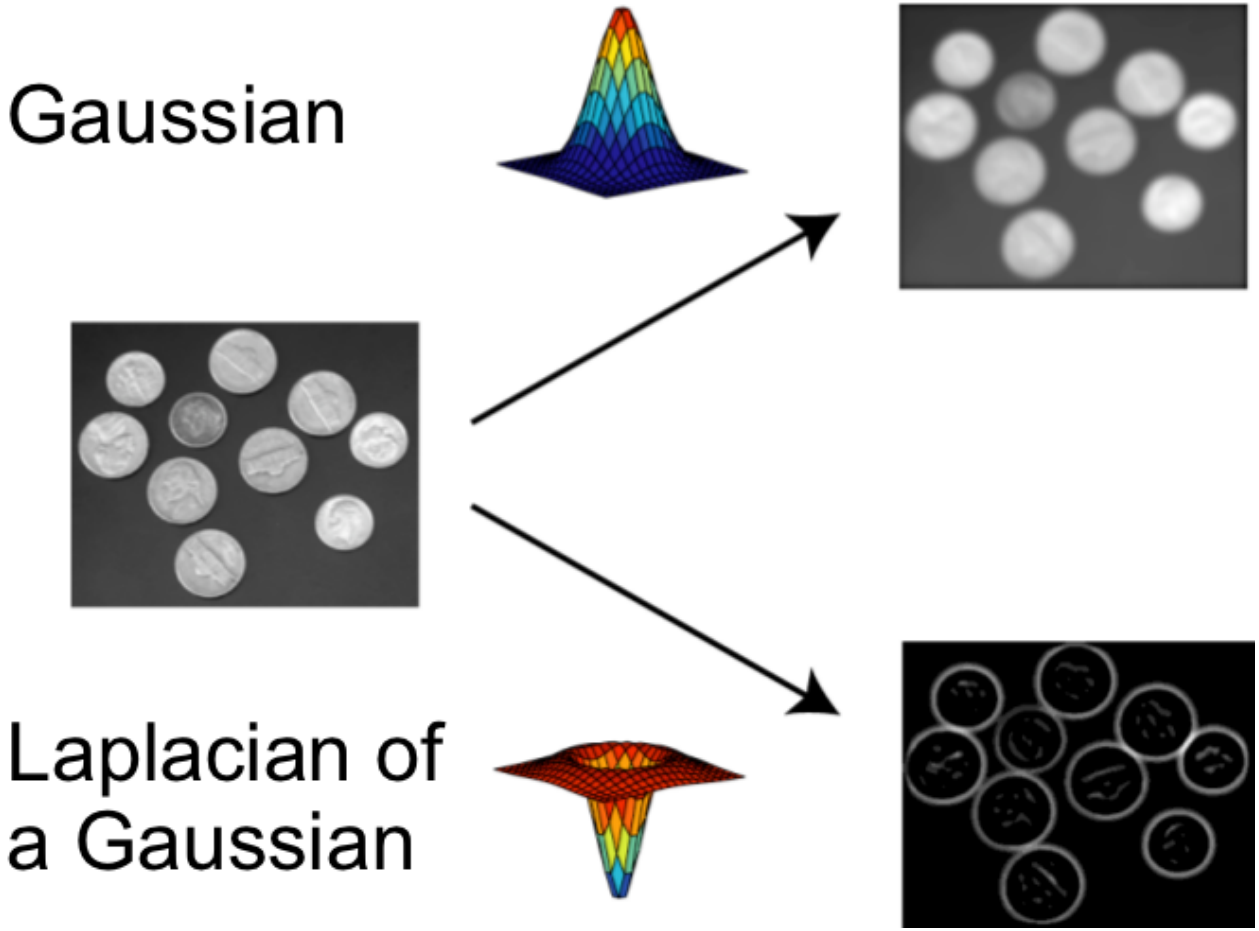


Feed-Forward Netz einer bestimmten Architektur:
Mehrere äquivalente „Teile“, die allerdings unterschiedliche **Rezeptive Felder** haben.

Die Output-Schicht eines Teiles in einer Position (i, j) des Bildes liefert Information über die Umgebung um (i, j) – Berechnung lokaler Merkmale.

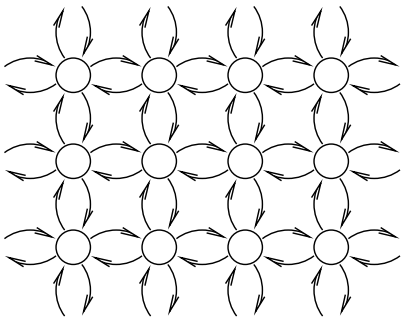
Beim Lernen eines solches Netzes geht die Äquivalenz der Teile verloren (siehe Error Backpropagation). Um sie zu erhalten, wird eine zusätzliche Mittlung der Gewichte/Schwellwerte nach jedem Gradient-Schritt des Lernens notwendig.

Faltung (Filterung):



Hopfield Netze

Es gibt eine symmetrische Nachbarschaftsrelation (Beispiel – Gitter).
Das Output jedes Neurons ist das Input für die benachbarten Neuronen.



$$y_r = f\Big(\sum_{r' \in N(r)} w_{rr'} \cdot y_{r'} + b_r \Big)$$

mit symmetrischen Gewichten, d.h. $w_{rr'} = w_{r'r}$.

Eine Konfiguration ist eine Zuordnung $y : D \to \{0, 1\}$ – „Zustandsfeld“.
Energie einer Konfiguration ist:

$$E(y) = \sum_{rr'} w_{rr'} \cdot y_r \cdot y_{r'} + \sum_{r} b_r \cdot y_r$$

Hopfield Netz mit externem Input x:

$$E(y, x) = \sum_{rr'} w_{rr'} \cdot y_r \cdot y_{r'} + \sum_{r} b_r \cdot y_r + \sum_{r} q(y_r, x)$$

Realisiert eine Abbildung $X \to Y$ nach dem Prinzip maximaler Energie:

$$y = \arg\max_{y'} E(y', x)$$

Dynamik des Netzes: ausgehend von einer Konfiguration $y^{(0)}$ werden Neuronen in andere Zustande entsprechend

$$y_r = f\Big(\sum_{r' \in N(r)} w_{rr'} \cdot y_{r'} + b_r \Big)$$

gesetzt. Somit steigt die Energie des Netzes

$$E(y) = \sum_{rr'} w_{rr'} \cdot y_r \cdot y_{r'} + \sum_r b_r \cdot y_r .$$

Man betrachte die neue Energie nach der Zustandsänderung eines einzelnes Neurons:

$$\begin{aligned} E^{(t+1)}(y) - E^{(t)}(y) = \\ = \Big(y_r^{(t+1)} - y_r^{(t)} \Big) \cdot \Big[\sum_{r' \in N(r)} w_{rr'} \cdot y_{r'} + b_r \Big] \end{aligned}$$

Ist $[\cdot] > 0$, so wird y_r ins 1 gesetzt (laut oberste Formel)
$\Rightarrow$ die Energie wird nicht verringert.

Diese Dynamik ist die einfachste Methode zum finden der Zustandskonfiguration maximaler Energie (Synonym – „Iterated Conditional Modes“). Sie ist aber nicht global optimal !!!

Die Methode konvergiert zum lokalen Optimum der Energie. Selbst das nur dann, wenn die Zustände der Neuronen sequentiell geändert werden – bei der Änderung eines Neurons sind alle anderen fixiert (Sequenzielle Dynamik).

Im Falle paralleler Dynamik kann unter Umständen ein oszillierendes Verhalten entstehen. Beispiel: $b_1 = b_2 = 1$, $w_{12} = -2$

$$E(y_1, y_2) = y_1 - 2 \cdot y_1 \cdot y_2 + y_2$$

Die Suche nach dem Zustandsfeld optimaler Energie (bei gegebener Beobachtung x) ist eine schwierige (im Allgemeinen NP-vollständige) Aufgabe.
Energy Minimization Methods – bekannte polynomiell lösbare Klassen:

- Die Nachbarschaftsstruktur ist ein (k-breiter Baum). Spezialfall – Ketten. Dynamische Programmierung.
- Die Energie ist supermodular – entspricht positiven Gewichten $w_{rr'}$.

Es gibt viele approximative Lösungen für allgemeinen Fall.

Hopfield Netze – Beispiel

Idee: Hopfield Netze modellieren Muster – Netzkonfigurationen optimaler Energie.

Sei y eine Konfiguration des Netzes und
$n(y)$ die Anzahl der „Cracks“
– die Anzahl der Paare benachbarter Neuronen unterschiedlicher Aktivität (z.B. $0 \leftrightarrow 1$).

Man konstruiere das Netz derart, dass seine Energie proportional zur negativen Anzahl der Cracks ist, d.h. $E(y) \sim -n(y)$.

Lösung: $w_{rr'} = 2,\ b_r = -4$

Vielmehr: mit Hopfield Netzen ist es manchmal möglich,
eine Menge der Muster explizit zu definieren nach dem Prinzip:

„Alle Muster in dieser Menge entsprechen Netzkonfigurationen optimaler Energie“.

(Weitere Beispiele beim Seminar)