Bildverarbeitung: Morphologische Filterung

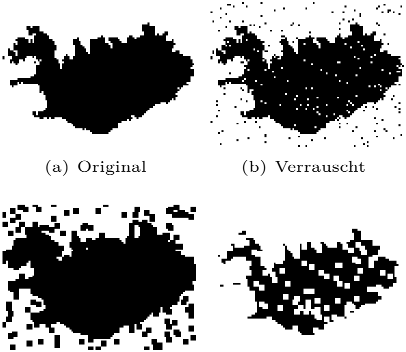
Dilation und Erosion

Zunächst für binäre Bilder $x : D \to \{0, 1\}$

UND (Erosion): $$y_r = \bigwedge_{r' \in W(r)} x_{r'} \qquad y = x \ominus W$$

ODER (Dilation): $$y_r = \bigvee_{r' \in W(r)} x_{r'} \qquad y = x \oplus W$$

W wird „Strukturelement“ genannt (Kreis, Rechteck usw.)



(a) Original (b) Verrauscht

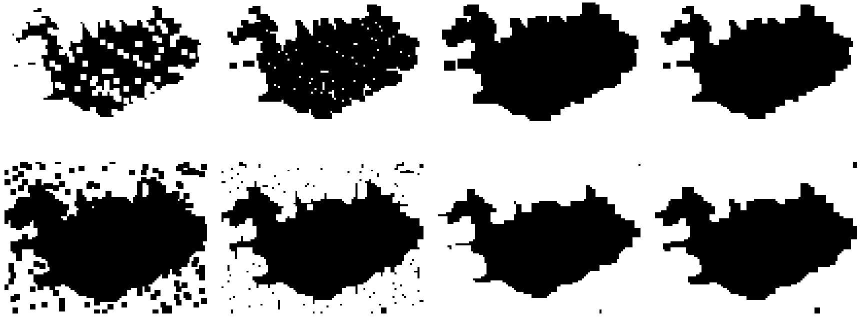
(c) Erosion (d) Dilation

Opening und Closing

Opening: $x \circ W = \Big((x \ominus W) \oplus W \Big)$

Closing: $x \bullet W = \Big((x \oplus W) \ominus W \Big)$

(nicht kommutativ)



Erweiterung auf Grau(Farb)wertbilder

Erosion: $y_r = \min_{r' \in W(r)} x_{r'}$

Dilation: $y_r = \max_{r' \in W(r)} x_{r'}$

RGB – zum Beispiel Getrennt für R, G und B (andere Varianten auch möglich)

(m) Original

(n) Verrauscht

(o) min

(p) max

(q) max

(r) min

1D-min-Algorithmus

Aufgabe in 1D: $y_r = \min\limits_{r'=r-W}^{r+W} x_{r'}$

Naiver Algorithmus: laut der Formel – probiere alle W Elemente und wähle das minimale.
Zeitkomplexität – $O(nW)$

Die Idee zur Beschleunigung:

– Aktualisiere die „geordnete" Menge der Werte $[x_{r'} \ldots]$.

– In jedem Schritt soll ein Element aus der Menge entfernt werden und ein Element hinzugefügt werden.

– Nutze die Datenstrukturen, die es erlauben diese zwei Operationen in $O(\ln W)$ durchzuführen.

$\Rightarrow$ Zeitkomplexität – $O(n \ln W)$

(Erklärung an der Tafel)

Verallgemeinerung

Strukturelement $W \subset \mathbb{R}^2$ wird durch Strukturfunktion $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ersetzt:

Erosion: $y_r = \min\limits_{r' \in \Omega} \Big(x_{r'} + w(r - r') \Big)$

Das Vorige ist ein Spezialfall:

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \; x \in W \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Vergleiche mit der linearen Filterung $y_r = \sum\limits_{r'} x_{r'} \cdot g(r - r')$

Ist dasselbe bis auf die verwendeten Operationen.

$\Rightarrow$ Morphologische Filterung ist „lineare Filterung im $(\min, +)$ Semiring".
(z.B. die Erosion entspricht dem Mittelwertfilter)

Separierbare (lineare) Filter

(Achtung!!! – etwas andere Bezeichnungen)

Sei eine Maske $g(i,j)$ als Produkt $g_1(i) \cdot g_2(j)$ darstellbar.

Beispiel: Gaussche Glättung

$$g(i,j) \sim \exp[-(i^2+j^2)/2\sigma^2] = \exp[-i^2/2\sigma^2] \cdot \exp[-j^2/2\sigma^2] = g_1(i) \cdot g_2(j)$$

Die Faltung $x * g$:

$$\sum_{ij} x(i,j) \cdot g_1(i) \cdot g_2(j) = \sum_i g_1(i) \cdot \Big[\sum_j x(i,j) \cdot g_2(j)\Big] = \sum_i g_1(i) \cdot \tilde{x}(i)$$

$$x * g = x * (g_1 * g_2) = (x * g_1) * g_2$$

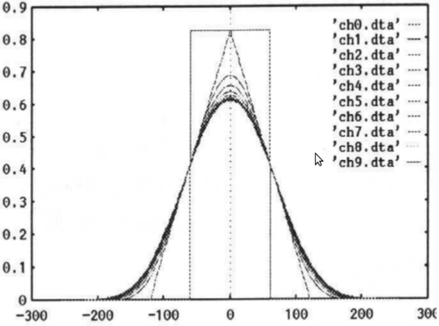
Sei W ein Fenster der Größe $m \times m$. Zeitkomplexität: $O(m^2) \rightarrow O(m)$.

Mittelwertfilter ist separierbar, viele andere auch, z.B. Gaussche Glättung.

min-Filter ist auch „separierbar“, d.h. die Zeitkomplexität in 2D ist $O(n \ln W)$,
Median – leider nicht.

Box-Filter

Die sequenzielle Anwendung der Mittelfilter approximiert die Gaussche Glättung.
(basiert auf Central Limit Theorem)



$$x * g_{Gauss} \approx (((x * g_M) * g_M) \ldots) * g_M$$

Zeitkomplexität:
$O(nW) \to O(nm)$ mit m die Anzahl der Anwendung von Mittelwertfilter (5-6 Mal).