Bildverarbeitung: Fourier-Transformation

Allgemeines

Bilder sind keine Vektoren.
Bilder sind Funktionen $x : D \to C$ (Menge der Pixel in die Menge der Farbwerte).

Allerdings kann man eine Funktion auch als ein Vektor verstehen (darstellen).

Zum Beispiel:
eine Funktion $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}$, d.h. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein Vektor im $\mathbb{R}^\infty$

Somit kann man mit den Funktionen alles machen, was man mit Vektoren machen kann: addieren, multiplizieren, Skalarprodukt etc.

Beispiel:
Skalarprodukt zweier Funktionen ist (bis auf paar Details) der Korellationskoeffizient.

Man kann über Funktionsräume sprechen, Basisfunktionen, zu einander orthogonale Funktionen, linear unabhängige Funktionen etc.

Konsequenz: Bilder sind mehr als Vektoren, Vektoren sind sie aber auch.

Allgemeines

Die Aufgabe – zerlege einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ auf seine „Komponenten“ in einem Basis

$$x = \sum_i v_i \cdot \lambda_i,$$

mit den Basisvektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$ und den Koeffizienten $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
Äquivalent – löse ein lineares Gleichungssystem $x = V \cdot \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^n$

Wichtig (Eigenschaften des Basis):

- Die Basisvektoren sollen den Raum aufspannen, d.h. eine solche Zerlegung existiert für alle x.
- Die Vektoren sind linear unabhängig, d.h. ein Vektor v_i lässt sich nicht als eine lineare Kombination anderer Vektoren v_j darstellen – die Zerlegung eines x ist dann eindeutig.

Spezialfall – orthonormierter Basis:

- alle v_i sind zu einander orthogonal, d.h. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$.
- alle v_i haben dieselbe Länge ($= 1$), d.h. $\langle v_i, v_i \rangle = 1$.

Dann gilt: $\lambda_i = \langle x, v_i \rangle$.

Übergang zu Funktionen:
Der Funktionsraum ist unendlichdimensional $\rightarrow$
$\rightarrow$ unendlich viele Basisfunktionen $v_i(x)$, d.h. $v(x,y)$ (y ersetzt i) sowie
$\rightarrow$ eine kontinuierliche Funktion $\lambda(y)$.

Die Aufgabe ist, eine gegeben Funktion $f(x)$ auf Basisfunktionen zu zerlegen:

$$f(x) = \int_y v(x,y)\lambda(y)\,dy$$

Orthonormierter Basis heißt:

– Orthogonal:

$$\int_x v(x,y')v(x,y'')\,dx = 0 \quad \text{für alle } y' \neq y'' \ .$$

– Normiert:

$$\int_x v(x,y)v(x,y)\,dx = const \quad \text{für alle } y.$$

Dann gilt:

$$\lambda(y) = \text{„}\langle\rangle\text{“} = \int_x f(x)v(x,y)\,dx$$

Fourier-Transformation

Funktionsraum:
alle periodische Funktionen mit der Periode 2π, d.h $f(x) = f(x + k \cdot 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Basisfunktionen: $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$, $k = 0, \ldots, \infty$

Eigenschaften:

– orthonormiert (trivial),
– spannen den Funktionsraum auf (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1822)

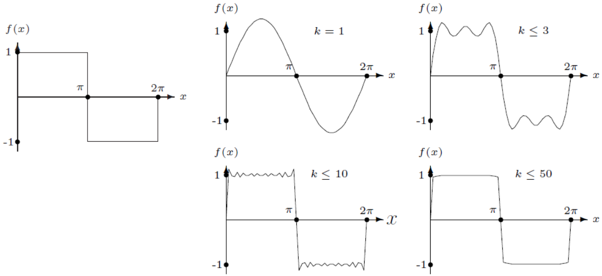
Zerlegung:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big]$$

mit

$$a_0 = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$
$$a_k = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\,dx$$
$$b_k = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\,dx$$

Ersetzt man $\sum_{1}^{\infty}$ durch $\sum_{1}^{k_{max}}$, so wird die Ausgangsfunktion $f(x)$ approximiert.



Komplexe Schreibweise:

Grundlage – Euler Identität:

$$\begin{aligned} e^{ikx} &= \cos(kx) + i \cdot \sin(kx) \\ e^{-ikx} &= \cos(kx) - i \cdot \sin(kx) \end{aligned}$$

Zerlegung:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Koeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \begin{cases} a_0/2 & k = 0 \\ 1/2 \cdot (a_k - ib_k) & k > 0 \\ 1/2 \cdot (a_{-k} + ib_{-k}) & k < 0 \end{cases}$$

Erweiterung auf beliebige periodische Signale: $\cos(kx) \rightarrow \cos(\frac{2\pi kx}{T})$

Erweiterung auf nichtperiodische Signale (Grenzübergang $T \rightarrow \infty$)
$\rightarrow$ die Koeffizienten werden kontinuierlich
$\rightarrow$ die Reihe $c_0, c_1, \ldots$ wird zur komplexen Funktion reellwertiges Argumentes

$$F(u) = R(u) + I(u)$$

Amplitudenspektrum:

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

Phasenspektrum:

$$\phi(u) = \tan^{-1} \frac{I(u)}{R(u)}$$

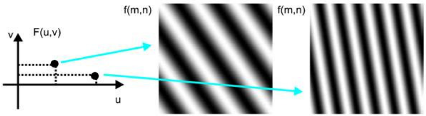
2D Diskrete Fourier-Transformation:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi(xu/M+yv/N)}$$

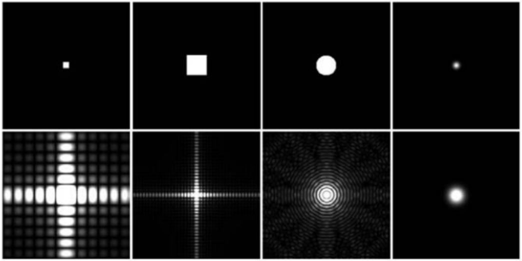
mit M und N – Breite und Höhe, x und y – Bildkoordinaten, u und v – Frequenzen.

Inverse dazu:

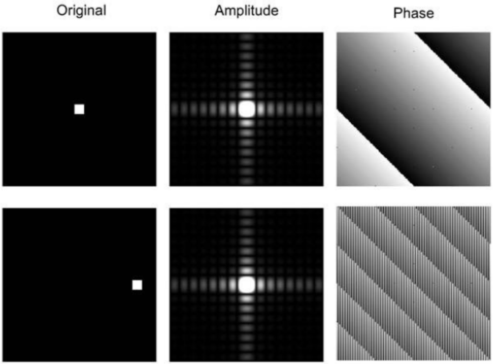
$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{i2\pi(xu/M+yv/N)}$$



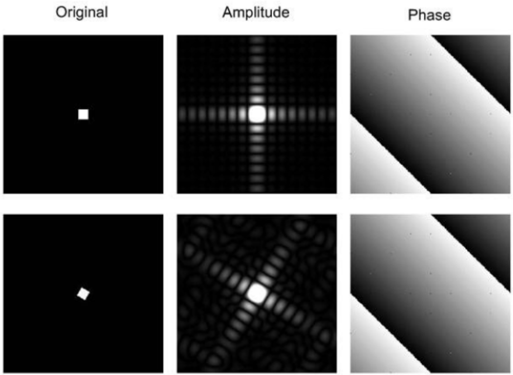
Beispiele – charakteristische Amplitudenspektren:



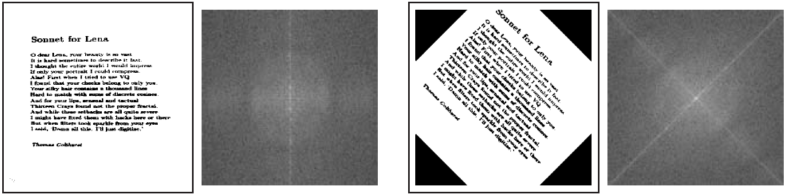
Beispiele – Amplitude vs. Phase:



Beispiele – Richtungen:



Beispiele – Erkennung der Richtung:



Faltungstheorem

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$$

$\mathcal{F}$ – Operator (Fourier-Transformation),
$F(v) = \mathcal{F}[f]$ – das Abbild der Funktion f im Fourier-Raum.

Beweis:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(v)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{2\pi i v x} dv, \quad g(x) = \text{ ... analog}$$

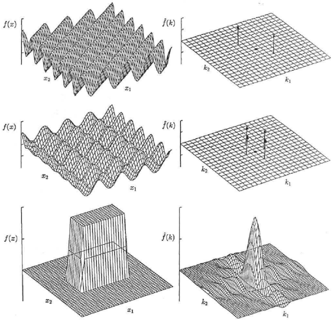
$$\begin{aligned}
f * g = & \int_{-\infty}^{\infty} g(x') f(x - x') dx' = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} g(x') \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{2\pi i v (x - x')} dv \right] dx' = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x') e^{-2\pi i v x'} dx' \right] e^{2\pi i v x} dv = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \cdot G(v) e^{2\pi i v x} dv = \mathcal{F}^{-1}[F(v) \cdot G(v)]
\end{aligned}$$

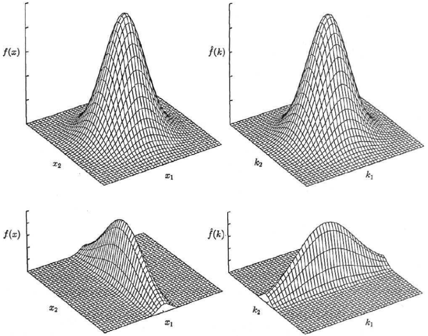
$$\Rightarrow \mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$$

Faltungstheorem

Konsequenz 1:
Eine Faltung $f * g$ kann durch $f * g = \mathcal{F}^{-1}[F(v) \cdot G(v)]$ implementiert werden.
Zeitkomplexität – $O(n \log n)$.

Konsequenz 2:
Jeder Filter hat seine Spektralcharakteristika im Fourier-Raum





→ Spektralanalyse,
→ Entwicklung der Filter mit bestimmten Spektralcharakteristika.

Andere Transformationen

Die Bilder sagen **„Wo“**, aber nicht **„Was“**.
Die Spektren sagen **„Was“**, aber nicht **„Wo“**.

Windowed Fourier-Transformation, Schnelle Fourier-Transformation (FFT – nur schnell)
Cosine Transformation (1D, Diskret, DCT-II):

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot \cos\left[\frac{\pi}{N}\left(x + \frac{1}{2}\right) u\right]$$

Wavelet Transformation (1D, Kontinuierlich):

$$F(a, b) \sim \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \psi\left(\frac{x - b}{a}\right) dx$$

mit der „Mutter“-Funktion $\psi(\cdot)$
(z.B. „Complex mexican hat wavelet“ etc.).