Bildverarbeitung: Diffusion Filters

Diffusion – Idee

Motiviert durch physikalische Prozesse – Ausgleich der Konzentration eines Stoffes.

Konzentration ist eine Funktion im Raum d.h.
$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, oft zum Beispiel $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in der Physik.

Räumlicher Gradient der Konzentration $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots)$ verursacht „flux“ $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Massbewegung, Vektorfeld) – Ficksches Gesetz:

$$j = -D \cdot \nabla u,$$

D ist eine positiv definite symmetrische Matrix – **Diffusion Tensor**.

Aus der Erhaltung der Masse folgt (t ist die Zeit)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathrm{div}\ j = \mathrm{div}(D \cdot \nabla u)$$

mit **Divergenz**: div $j(x) = \frac{\partial j_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2(x)}{\partial x_2} + \dots$

Diffusion für Bilder

Das Bild wird als initiale Verteilung der Konzentration interpretiert:
$u(x, y, t = 0) = I(x, y)$

Das „Bild“ wird entsprechend $\partial u/\partial t = \mathrm{div}(D \nabla u)$ mit der Zeit geändert.

Diffusion Tensor D steuert die Entwicklung der Verteilung der Konzentration in Zeit.

Fälle nach D:

skalar	$\rightarrow$	isotropisch
allgemein	$\rightarrow$	anisotropisch
unabhängig von u	$\rightarrow$	linear
abhängig von u	$\rightarrow$	nichtlinear

$\Rightarrow$ Alle vier Varianten möglich.

Lineare Isotropische Diffusion

Diffusion Tensor ist eine Konstante, d.h. $D = c \cdot \mathbb{1}$ ($\mathbb{1}$ ist die Einheitsmatrix):

$$u(x,0) = I(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c \cdot \nabla u) = c \cdot \triangle u$$

mit dem **Laplace Operator** $\triangle u = \operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial u^2}{\partial x \partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y \partial y}$.

Fragen: $u(x,\infty) =$? Stationär?

$\triangle u = 0$ bei $t \to \infty \Rightarrow u(x,\infty) =$? (Linear, Bilinear ...)

Das hängt von c und von Regularisierung am Rand ab. In meist der Fälle – Glättung.

Der einfachste Fall (**Homogene Diffusion**): D ist die Einheitsmatrix (oder $c = 1$).
Es existiert die analytische Lösung:

$$u(x,t) = (G_{\sqrt{2t}} * I)(x)$$

d.h. Faltung des Ausgangsbildes I mit dem Gausschen Glättungskern mit $\sigma = \sqrt{2t}$

Finite Differenzen

Diskretisiere (Homogene Diffusion)

$$\frac{\partial u(x,u,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,y,t)^2}{\partial x \partial x} + \frac{\partial u(x,y,t)^2}{\partial x \partial x}$$

Ableitungen (kontinuierlich) $\rightarrow$ Differenzen (diskret):

$$\frac{\partial u(x,u,t)}{\partial t} = \frac{u(x,y,t{+}\tau) - u(x,y,t)}{\tau} + O(\tau)$$
$$\frac{\partial u(x,y,t)^2}{\partial x \partial x} = \frac{u(x{+}h,y,t) - 2u(x,y,t) + u(x{-}h,y,t)}{h^2} + O(h^2)$$
$$\frac{\partial u(x,y,t)^2}{\partial y \partial y} = \frac{u(x,y{+}h,t) - 2u(x,y,t) + u(x,y{-}h,t)}{h^2} + O(h^2)$$

τ ist der Zeitschritt, h – räumliche Auflösung.

$O(\cdot)$ werden vernachlässigt, alles wird zusammengesetzt und nach $u(x,y,t{+}\tau)$ umgestellt:

$$u(x,y,t{+}\tau) = \left(1 - \frac{4\tau}{h^2}\right) u(x,y,t) + \frac{\tau}{h^2}\Big(u(x{+}1,y,t) + u(x{-}1,y,t) + u(x,y{+}1,t) + u(x,y{-}1,t)\Big)$$

Explizites Schema: die neuen Werte werden direkt aus den alten berechnet.

Stabil, wenn alle „Gewichte“ nichtnegativ, d.h. $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{4}$.

Implizites Schema: Divergenzen für den **nächsten** Zeitpunkt werden verwendet

$$u(x,y,t{+}\tau) = \\ \left(1-\frac{4\tau}{h^2}\right)u(x,y,t) + \frac{\tau}{h^2}\Big(u(x{+}1,y,t) + u(x{-}1,y,t) + u(x,y{+}1,t) + u(x,y{-}1,t)\Big)$$

wird zu

$$u(x,y,t{+}\tau) = u(x,y,t) + \\ \frac{\tau}{h^2}\Big(u(x{+}1,y,t{+}\tau) + u(x{-}1,y,t{+}\tau) + u(x,y{+}1,t) + u(x,y{-}1,t{+}\tau) - 4u(x,y,t{+}\tau)\Big)$$

Die neuen Werte können nicht direkt berechnet werden, sondern
es entsteht ein System linearer Gleichungen.

Sehr groß – so viel Gleichungen wie viel Pixel, dafür aber dünn besetzt
⇒ spezielle iterative Methoden (Jakobi ...).

Explizit:	instabil, schnell
Implizit:	stabil, langsam (in jedem Zeitpunkt ein System lösen)

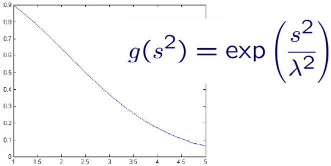
Lineare Isotropische Diffusion

Die Idee – bei Anwesenheit der Kanten weniger glätten

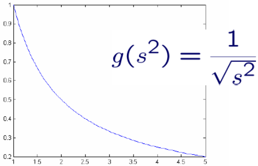
$$c \cdot \triangle u \equiv c(x,y,I) \cdot \triangle u$$

mit $c(x,y,I)$ vorberechnet aus dem Bild.

Sehr oft $c(x,y,I) = g(|\nabla I(x,y)|^2)$ – eine positive fallende Funktion (Diffusivität) der quadratischen Länge des Bildgradienten.



Perona-Malik



Total Variation

Nichtlineare Isotropische Diffusion

Die Idee – Kanten sind besser im entrauschten Bild (unbekannt)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla I|^2)\nabla u) \quad \text{wird zu} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u|^2)\nabla u)$$

Spezialfall – TV-flow: $\partial u/\partial t = \operatorname{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})$

- Keine weitere Kontrastparameter
- Stückweise konstante Grauwertverläufe – Segmentierung ähnlich

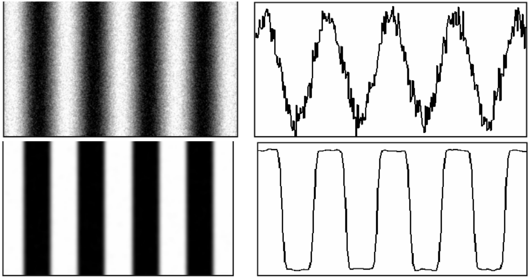
Problem: ∞ bei $|\nabla u| = 0 \rightarrow$ Regularisierung $g(s^2) = \frac{1}{\sqrt{s^2+\varepsilon}}$

(a) Verrauschtes Ausgangsbild (b) Gaussche Glättung (c) Nichtlineare Diffusion

Implizites Schema führt zum System **nichtlinearer** Gleichungen in jedem Zeitpunkt.

Die Idee: „dilation“ in der Nähe des Maximums und „erosion“ in der Nähe des Minimums

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathrm{sign}(\triangle u) \cdot |\nabla u|$$



Shock Filter