Mustererkennung: Labelling Probleme

D. Schlesinger – TUD/INF/KI/IS

Gemeinsames

Gegeben ist ein Graph mit der Menge R der Knoten (Definitionsbereich) und der Menge $E = \{\{r, r'\}\}$ der Kanten.

Jedem Knoten $r \in R$ entspricht eine Variable, die die Werte aus K (Wertebereich, Labelmenge) annehmen kann.

Ein Labelling $f : R \to K$ ist eine Abbildung, die jedem Knoten einen Label aus K zuordnet. f_r bezeichnet den Label des r-ten Knotens.

Ergänzungen/Varianten:
Hypergraphen statt Graphen, $K \subset \mathbb{R}$ (kontinuierlich) etc.

In jedem Knoten sind manche Labels „verboten“, d.h. gibt es boolesche Funktionen $q_r : K \to \{0,1\}$

Außerdem sind manche Labelpaare entlang jeder Kanten verboten – Funktionen $g_{rr'} : K \times K \to \{0,1\}$

Diese Funktionen repräsentieren lokale Einschränkungen.

Ein Labelling gilt als „zulässig“ (konsistent), wenn er keine Einschränkungen verletzt:

$$Q(f) = \bigwedge_{r \in R} q_r(f_r) \wedge \bigwedge_{rr' \in E} g_{rr'}(f_r, f_{r'})$$

Die Aufgabe ist zu prüfen, ob es ein konsistenten Labelling gibt:

$$Q = \bigvee_f Q(f) = \bigvee_f \left[\bigwedge_{r \in R} q_r(f_r) \wedge \bigwedge_{rr' \in E} g_{rr'}(f_r, f_{r'}) \right]$$

CSP, Beispiele

n-Damen Problem: auf einem $n \times n$ Schachbrett werden n Damen so positioniert, dass sie einander nicht schlagen.

Knoten – Felder, Variablen – $\{0, 1\}$ (eine Dame ist da oder nicht).
Paarweise Einschränkungen:
zwei Felder r und r', die einander schlagen, werden mit einer Kante verbunden.
Die Funktion g ist:

$$g_{rr'}(k, k') = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad k = k' = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sudoku, nSAT-Probleme usw.

CSP, Relaxation Labelling Algorithmus

Man untersucht lokal die Umgebung eines Knotens und verbietet explizit alles, was offensichtlich nicht sein kann (Wegstreichen Algorithmus).

Man wiederhole

$$q_r(k) = q_r(k) \wedge \bigwedge_{rr'} \bigvee_{kk'} g_{rr'}(k, k')$$
$$g_{rr'}(k, k') = g_{rr'}(k, k') \wedge q_r(k) \wedge q_{r'}(k')$$

solange sich was ändert.

Nach dem Anhalten des Algorithmus sind drei Fälle möglich:

1) In einem Knoten ist alles verboten: es gibt kein konsistenter Labelling
2) In jedem Knoten bleibt genau ein Label: es gibt ein konsistenter Labelling, der aus den übrig gebliebenen Labeln besteht
3) In manchen Knoten bleiben mehr als ein Label übrig: die Aufgabe bleibt ungelöst

Allgemeiner Fall – die Aufgabe ist NP-vollständig.
Basis Graph ist eine Kette – im 3) Fall existiert ein konsistenter Labelling.
Bei manchen Funktionen g ist dies auch der Fall – die Aufgabe ist polynomiell lösbar.

Energieminimierung

Funktionen $q_r : K \to \mathbb{R}$ und $g_{rr'} : K \times K \to \mathbb{R}$ verbieten nichts, sondern bestrafen.

Die Qualität eines Labellings ergibt sich als:

$$Q(f) = \sum_r q_r(f_r) + \sum_{rr'} g_{rr'}(f_r, f_{r'})$$

Gesucht wird der Labelling minimaler Qualität:

$$Q = \min_f Q(f) = \min_f \left[\sum_r q_r(f_r) + \sum_{rr'} g_{rr'}(f_r, f_{r'}) \right]$$

Beispiel: Segmentierung (siehe Vorlesung BV).

Relaxation Labelling Algorithmus für CSP entspricht dem Diffusion Algorithmus für Energieminimierung.

CSP ist ein Spezialfall der Energieminimierung – alle lokale Qualitäten (die Werte der q und g Funktionen sind 0 oder ∞).

Energieminimierung – „SoftCSP“, „ValuedCSP“

Partition Funktion

Aus der Physik: Wahrscheinlichkeit des Zustandes eines Systems ist $p(f) \sim \exp\Big(-E(f)\Big)$.

Sei die Energie als in der Energieminimierung (Summe lokaler Bewertungen).
Die resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung (Markovsches Zufallsfeld) ist

$$p(f) = \frac{1}{Z} \exp\left[\sum_r q_r(f_r) + \sum_{rr'} g_{rr'}(f_r, f_{r'})\right] = \frac{1}{Z} \prod_r \tilde{q}_r(f_r) \cdot \prod_{rr'} \tilde{g}_{rr'}(f_r, f_{r'})$$

mit $\tilde{q}(\cdot) = \exp q(\cdot)$ und $\tilde{g}(\cdot) = \exp g(\cdot)$ – Produkt lokaler Bewertungen.

Die Normierungskonstante (damit $\sum_f p(f) = 1$)

$$Z = \sum_f \left[\prod_r \tilde{q}_r(f_r) \cdot \prod_{rr'} \tilde{g}_{rr'}(f_r, f_{r'})\right]$$

heißt Partition Funktion.

Anwendung: marginalisierung (z.B. beim Lernen mit EM-Algorithmus).

Analog der Diffusion Algorithmus für Energieminimierung – Belief Propagation.

Allgemeine Formulierung

$$Q = \bigvee_{f} \left[\bigwedge_{r \in R} q_r(f_r) \wedge \bigwedge_{rr' \in E} g_{rr'}(f_r, f_{r'}) \right]$$

$$Q = \min_{f} \left[\sum_{r} q_r(f_r) + \sum_{rr'} g_{rr'}(f_r, f_{r'}) \right]$$

$$Q = \sum_{f} \left[\prod_{r} q_r(f_r) \cdot \prod_{rr'} g_{rr'}(f_r, f_{r'}) \right]$$

$$Q = \bigoplus_{f} \left[\bigotimes_{r} q_r(f_r) \otimes \bigotimes_{rr'} g_{rr'}(f_r, f_{r'}) \right]$$

d.h. dieselbe Aufgaben in unterschiedlichen Semiringen $(W, \oplus, \otimes)$
$q_r : K \to W$ und $g_{rr'} : K \times K \to W$

Spezialfälle:
OrAnd (CSP), MinSum (Energieminimierung), SumProd (Partition Funktion)

Stand der Technik

Alle Labelling Probleme sind NP-vollständig im allgemeinen Fall.

Alle Labelling Probleme sind durch Dynamische Programmierung polynomiell lösbar, wenn der Graph einfach ist (z.B. Kette).

OrAnd Probleme auf allgemeinen Graphen sind bezüglich der Eigenschaften der Funktionen g vollständig klassifiziert (polynomiell $\leftrightarrow$ NP).

Submodulare MinSum Probleme auf allgemeinen Graphen sind polynomiell lösbar.

Es gibt viele näherungsweise effiziente Algorithmen für MinSum Probleme auf allgemeinen Graphen.

Es gibt wenige näherungsweise nicht effiziente Algorithmen für SumProd Probleme auf allgemeinen Graphen.