Bildverarbeitung: Energieminimierung I

D. Schlesinger – TUD/INF/KI/IS

Idee

Statt zu sagen, wie die Lösung geändert werden muss (explizite Algorithmus, Diffusion), werden die erwünschten Eigenschaften der Lösung explizit formuliert.

Die Ausprägungen eines Objektes werden durch Abbildungen repräsentiert
Beispiele:
„Menge der Pixel“ $\rightarrow$ „Menge der Farben“(alles diskret).
„Menge der Pixel“ $\rightarrow$ „Kontinuierlicher Grauwertbereich“.

Definitionsbereich: kontinuierlich, diskret
Wertebereich: kontinuierlich, diskret

Eigenschaften des Modells werden mittels „Energie“ dargestellt
– Funktion, die „ungünstige“ Abbildungen bestraft.

Die Aufgebe wird zu einem Optimierungsproblem
– suche nach der günstigsten Abbildung.

$R \in \mathbb{Z}^2$

Der Definitionsbereich ist diskret, der Wertebereich ist kontinuierlich.
Beispiel: Bildrestauration (Entrauschung)

$R \in \mathbb{Z}^2$ – die Pixelmenge, $E \subset R^2$ – die Nachbarschaftstruktur (z.B. 4-Nachbarschaft)
$x : R \to \mathbb{Z}$ – das Ausgangsbild, $y : R \to \mathbb{R}$ – die gesuchte Abbildung (das restaurierte Bild).

Energie $E : \mathbb{R}^{|R|} \to \mathbb{R}$ besteht (normalerweise) aus zwei Teilen:

1) Der Daten-Term:

$$E_d(y) = \sum_{r \in R} (x_r - y_r)^2$$

(entspricht Gausschem Rauschen).

2) Der Modell-Term:

$$E_m(y) = \sum_{rr' \in E} (y_r - y_{r'})^2$$

Annahme: der rekonstruierte Grauwertverlauf (die Abbildung y) soll glatt sein

Die Optimierungsaufgabe:

$$y^* = \arg\min_y \Big[E_d(y) + \alpha E_m(y) \Big]$$

Lösungsweg:

$$\frac{\partial}{\partial y_{r^*}} \left[\sum_{r \in R} (x_r - y_r)^2 + \alpha \sum_{rr' \in E} (y_r - y_{r'})^2 \right] =$$

$$y_{r^*} - x_{r^*} + \alpha \sum_{r: rr^* \in E} (y_{r^*} - y_r) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y_{r^*}(1 + 4\alpha) - \alpha y_{r'} - \alpha y_{r''} - \alpha y_{r'''} - \alpha y_{r''''} = x_{r^*} \quad \forall r^*$$

System linearer Gleichungen mir $n = |R|$ Variablen und n Gleichungen:

$$A \cdot y = x$$

mit
$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ – die Lösung,
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ – das Ausgangsbild,
$a_{ii} = 1 + 4\alpha$, $a_{ij} = -\alpha$ wenn die entsprechenden Pixel benachbart sind, sonst 0.

Das System kann bezüglich y mithilfe Standardmethoden (Gaussche Eliminierung, LU-Dekomposition, A invertieren usw.) gelöst werden – das ist aber leider sehr Zeitaufwendig (nur im 1D-Fall effizient).

$R \in \mathbb{Z}^2$

Die Matrix A ist schwach besetzt $\rightarrow$ iterative Methoden.

Jacobi Methode (konvergiert nur wenn die Matrix streng diagonal dominant ist, d.h. $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, was glücklicherweise für das Beispiel gerade der Fall ist).

Man zerlege $A = D + M$ mit einer diagonalen Matrix M:

$$Ay = x \;\Leftrightarrow\; (D+M)y = x \;\Leftrightarrow\; Dy = x - My \;\Leftrightarrow\; y = D^{-1}(x - My)$$
$$y^{(k+1)} = D^{-1}(x - My^{(k)})$$

Vorteile: extrem einfach, parallelisierbar
Nachteile: immer noch zu langsam, konvergiert nur bei $k \rightarrow \infty$

Andere Algorithmen:
Gauss-Seidel, Successive Over-relaxation (schneller), Konjugierte Gradienten (bessere Konvergenz), Multigrid Methoden (viel schneller aber komplizierter) etc.

Probleme wenn:

- nicht eindeutig
- nicht differenzierbar
- nicht quadratisch oder sogar gar nicht konvex

$R \in \mathbb{R}^2$

Beide Definitionsbereich und Wertebereich sind kontinuierlich.

Definitionsbereich wird zu $R \subset \mathbb{R}^2$,
die Abbildung $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist somit eine Funktion,
Die Energie wird zu Energiefunktional $E : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$.
„Calculus of Variations“, Variationelle Ansätze.

Beispiel – wieder das Entrauschen:

$$E(y) = \int_R \left[\Big(y(r) - x(r) \Big)^2 + \alpha |\nabla y(r)|^2 \right] dr \to \min_y$$

Gâteaux Ableitungen entlang „Richtungen“ $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial E(y)}{\partial y}\bigg|_h = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E(y + \varepsilon h) - E(y)}{\varepsilon} = \frac{dE(y + \varepsilon h)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon = 0} = 0 \quad \forall h$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_R \left[(y+\varepsilon h-x)^2+\alpha|\nabla(y+\varepsilon h)|^2\right]dr\Big|_{\varepsilon=0} =$$

// koordinatenweise in $\mathbb{R}^2$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_R \left[(y+\varepsilon h-x)^2+\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}(y+\varepsilon h)\Big)^2+\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial r_2}(y+\varepsilon h)\Big)^2\right]dr\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$2\int_R \left[(y+\varepsilon h-x)h+\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}(y+\varepsilon h)\frac{\partial h}{\partial r_1}\Big)+\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial r_2}(y+\varepsilon h)\frac{\partial h}{\partial r_2}\Big)\right]dr\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$2\int_R \left[(y-x)h+\alpha\Big(\frac{\partial y}{\partial r_1}\frac{\partial h}{\partial r_1}\Big)+\alpha\Big(\frac{\partial y}{\partial r_2}\frac{\partial h}{\partial r_2}\Big)\right]dr =$$

// partielle Integration

$$2\int_R \left[(y-x)h-\alpha\Big(\frac{\partial^2 y}{\partial r_1^2}h\Big)-\alpha\Big(\frac{\partial^2 y}{\partial r_2^2}h\Big)\right]dr + \ldots(\text{Grenzeffekte}) =$$

$$2\int_R (y-x-\alpha\triangle y)h\ dr + \ldots(\text{Grenzeffekte}) = 0 \quad \forall h$$

$\Downarrow$

$$\Rightarrow \quad y - x - \alpha \triangle y = 0 \;\; \forall r \in R \quad \text{, und für die Grenzen } \frac{\partial \langle n, \nabla y \rangle}{\partial R} = 0$$

Relation zum Fall diskretes Definitionsbereichs:

Diskretisiert man die Bedingungen und schreibt sie für alle Pixel (i, j) auf, d.h.

$$y_{i,j} - x_{i,j} - \alpha\Big((y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}) + (y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1})\Big) = 0$$

so kriegt man den Fall 1 (eine lineare Gleichungssystem):

$$y_{i,j}(1 + 4\alpha) - \alpha y_{i-1,j} - \alpha y_{i+1,j} - \alpha y_{i,j-1} - \alpha y_{i,j+1} = x_{i,j} \quad \forall (i, j).$$

Relation zur Diffusion:

(Anti)Gradient Verfahren zur Minimierung einer Zielfunktion $F(y)$:
$y^{(t+1)} = y^{(t)} - \frac{\partial F(y)}{\partial y}$, $t = 0 \ldots \infty$.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \triangle y - \frac{1}{\alpha}(y - x)$$

(fast lineare isotropische Diffusion).

$R \in \mathbb{R}^2$

Erweiterungen (kompakte Schreibweise):

$$E(y) = \int_R \Big[(y-x)^2 + \alpha \Psi(|\nabla y|^2) \Big] dr \rightarrow \min_y$$

mit einem Regularisator Ψ:

$\Psi(s^2) = s^2$	– Tikhonov
$\Psi(s^2) = \sqrt{s^2}$	– Total Variation
$\Psi(s^2) = 1 - \lambda^2 \exp(-\frac{s^2}{\lambda^2})$	– Perona-Malik
$\Psi(s^2) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } s^2 = 0 \\ 1 & \text{else} \end{cases}$	– Potts-Modell

Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\operatorname{div}\Big(\Psi'(|\nabla y|^2)\nabla y\Big) - \frac{y-x}{\alpha} = 0$$