Bildverarbeitung: Diffusion Filters

D. Schlesinger – TUD/INF/KI/IS

Motiviert durch physikalische Prozesse – Ausgleich der Konzentration eines Stoffes.

Konzentration ist eine Funktion im Raum d.h.
$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, oft zum Beispiel $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in der Physik.

Räumlicher Gradient der Konzentration $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots)$ verursacht „flux“ $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Massbewegung, Vektorfeld) – Ficksches Gesetz:

$$j = -D \cdot \nabla u,$$

D ist eine positiv definite symmetrische Matrix – Diffusion Tensor.

Aus der Erhaltung der Masse folgt (t ist die Zeit)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathrm{div}\ j = \mathrm{div}(D \nabla u)$$

mit Divergenz: $\mathrm{div}\ j(x) = \frac{\partial j_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2(x)}{\partial x_2} + \ldots$

Diffusion für Bilder

Das Bild wird als initiale Verteilung der Konzentration interpretiert:
$u(x, y, t = 0) = I(x, y)$

Das „Bild“ wird entsprechend $\operatorname{div}(D\nabla u)$ mit der Zeit geändert.

Diffusion Tensor D steuert die Entwicklung der Verteilung der Konzentration in Zeit.

Fälle nach D:

skalar	$\rightarrow$	isotropisch
allgemein	$\rightarrow$	anisotropisch

unabhängig von u	$\rightarrow$	linear
abhängig von u	$\rightarrow$	nichtlinear

Lineare Isotropische Diffusion

$$u(x,0) = I(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(c \cdot \nabla u) = c \cdot \triangle u$$

mit dem Laplace Operator $\triangle u = \mathrm{div}(\nabla u) = \frac{\partial u^2}{\partial x \partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y \partial y}$.

$\triangle u = 0$ bei $t \to \infty$, d.h. $u(x,\infty)$ ist eine lineare Funktion im Raum (?)
$\to$ Glättung.

Der einfachste Fall (Homogene Diffusion): D ist die Einheitsmatrix (oder $c = 1$).
Es existiert die analytische Lösung:

$$u(x,t) = (G_{\sqrt{2t}} * I)(x)$$

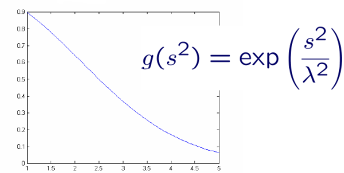
d.h. Faltung des Ausgangsbildes I mit dem Gausschen Glättungskern $\sigma = \sqrt{2t}$

Die Idee – bei Anwesenheit der Kanten weniger glätten

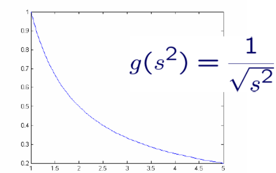
$$c \cdot \triangle u \equiv c(x, I) \cdot \triangle u$$

mit $c(x, I)$ vorberechnet aus dem Bild.

Sehr oft $c(x, I) = g(|\nabla I(x)|^2)$ – eine positive fallende Funktion (Diffusivität) von der quadratische Länge des Bildgradientes.



Perona-Malik



Total Variation

Nichtlineare Isotropische Diffusion

Die Idee – Kanten sind besser im entrauschten Bild (unbekannt)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla I|^2)\nabla u) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u|^2)\nabla u)$$

Spezialfall – TV-flow: $\partial u/\partial t = \operatorname{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})$

- Keine weitere Kontrastparameter
- Stückweise konstante Grauwertverläufe – Segmentierung ähnlich

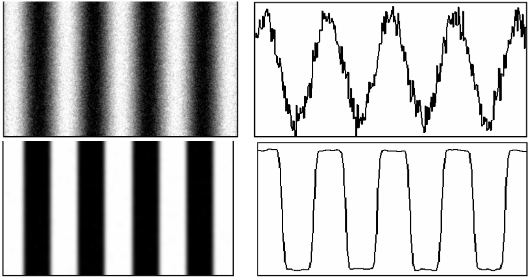
Ptoblem: ∞ bei $|\nabla u| = 0$, Regularisierung $g(s^2) = \frac{1}{\sqrt{s^2+\varepsilon}}$

(a) Verrauschtes Ausgangsbild (b) Gaussche Glättung (c) Nichtlineare Diffusion

Shock Filter

Die Idee: „dilation“ in der Nähe des Maximums und „erosion“ in der Nähe des Minimums

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathrm{sign}(\triangle u) \cdot |\nabla u|$$



Shock Filter