

Bildverarbeitung: Reste

D. Schlesinger – TUD/INF/KI/IS

$$y = x * g$$
$$y_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_{i-j} \cdot g_j$$

Eigenschaften:

- kommutativ, d.h. $x * g = g * x$;
- assoziativ, d.h. $(x * g^1) * g^2 = x * (g^1 * g^2)$;
- distributiv, d.h. $x * (g_1 + g_2) = x * g_1 + x * g_2$.

Identische Faltung (ändert das Signal nicht): $g_j^I = \mathbb{I}(j = 0)$

Inverse Faltungen: $g * g^{-1} = g^I$

Beispiel ($j = 0$ ist fett gekennzeichnet):

$$\begin{aligned} g^{diff} &= [\dots, 0, 0, 0, \mathbf{1}, -1, 0, \dots] && \text{Differential Operator} \\ g^{int} &= [\dots, 0, 0, 0, \mathbf{1}, \quad 1, 1, \dots] && \text{Integral Operator} \end{aligned}$$

Der Trick zur effizienten Berechnung basiert auf der folgenden Umwandlung:

$$x * g = x * g^I * g = x * g^{int} * g^{diff} * g = (x * g^{int}) * (g * g^{diff})$$

oder sogar mehr

$$x * g = (x * g^{int} * \dots * g^{int}) * (g * g^{diff} * \dots * g^{diff})$$

Die Faltung $x * g^{int}$ braucht lineare Zeitkomplexität,

mit $\tilde{g} = g * g^{diff} * \dots * g^{diff}$ (Vorberechnung) wird erreicht, dass $\tilde{g}$ schwach besetzt ist.

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$$

$\mathcal{F}$ – Operator (Fourier-Transformation),

$F(v) = \mathcal{F}[f]$ – das Abbild der Funktion f im Fourier-Raum.

Beweis:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(v)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{2\pi i v x} dv, \quad g(x) = \dots \text{ analog}$$

$$\begin{aligned} f * g &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x') f(x - x') dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x') \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{2\pi i v (x - x')} dv \right] dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x') e^{-2\pi i v x'} dx' \right] e^{2\pi i v x} dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \cdot G(v) e^{2\pi i v x} dv = \mathcal{F}^{-1}[F(v) \cdot G(v)] \\ &\Rightarrow \mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \end{aligned}$$

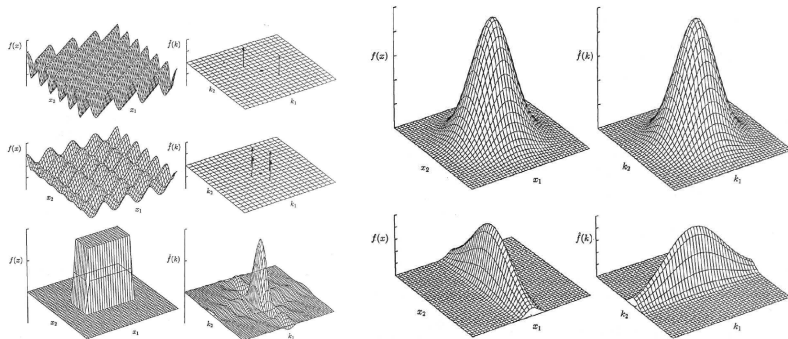
Konsequenz 1:

Eine Faltung $f * g$ kann durch $f * g = \mathcal{F}^{-1}[F(v) \cdot G(v)]$ implementiert werden.

Zeitkomplexität – $O(n \log n)$.

Konsequenz 2:

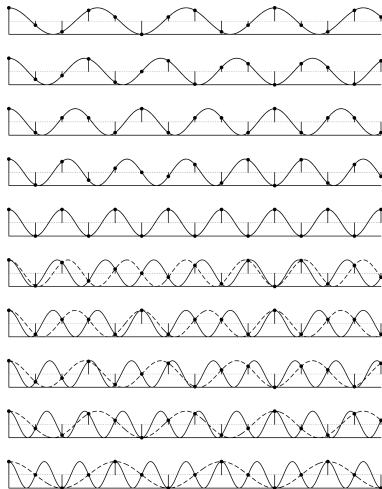
Jeder Filter hat seine Spektralcharakteristika im Fourier-Raum



→ Spektralanalyse,

→ Entwicklung der Filter mit bestimmten Spektralcharakteristika.

Nyquist-Shannon-Abtasttheorem



Das Abtasttheorem besagt, dass ein kontinuierliches, bandbegrenztes Signal, mit einer Minimalfrequenz von 0 Hz und einer Maximalfrequenz f_{max} , mit einer Frequenz größer als $2 \cdot f_{max}$ gleichförmig abgetastet werden muss, damit man aus dem so erhaltenen zeitdiskreten Signal das Ursprungssignal ohne Informationsverlust, aber mit unendlich großem Aufwand, exakt rekonstruieren oder - mit endlichem Aufwand - beliebig genau approximieren kann.

Beispielaufgabe:

Gegeben sei Punkte im $\mathbb{R}^2$, d.h. $((x^1, y^1), (x^2, y^2) \dots (x^n, y^n))$.

Man such nach Teilmengen der Punkte, die jeweils eine Gerade repräsentieren (eine Gerade sei durch die Gleichung $ax + by = 1$ gegeben, d.h. durch ein Paar der Parameter (a, b)).

Lösungsansatz:

- Man betrachte die Menge aller Koeffizienten a und b – „Parameterraum“ $\mathbb{R}^2$.
- Für jedes Paar (x^i, y^i) wird nach denjenigen Paaren (a, b) gesucht, die diesem Punkt entsprechen – jedes Paar „stimmt“ für eine Teilmenge der Paare.
- Diejenige Paare (a, b) werden gewählt, die meistens Stimmen gesammelt haben.

Für Kreise – analog ($\mathbb{R}^3$ als Parameterraum).

Nachteil: Zeitkomplexität bei komplexen Objekten – Dimension des Parameterraumes.

Verallgemeinerte Hough-Transformation:

Der Objekt wird indirekt durch eine Look-up Tabelle definiert.