MUSTERERKENNUNG
4. SEMINAR – MAXIMUM-LIKELIHOOD PRINZIP

Aufgabe 1. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer skalaren Größe $x \in \mathbb{R}$ ist

$$p(x) = C \cdot \exp\big[-\tau|x-\mu|\big]$$

mit reelen Parametern τ und μ. Sie sollen nach dem Maximum-Likelihood Prinzip anhand einer Lernstichprobe $L = (x^1, \dots, x^{|L|})$ gelernt werden. Wie ergeben sich daraus die gesuchten Größen?

Lösen Sie diese Aufgabe für die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(x) = \begin{cases} C \cdot \exp\big[-\tau(x-\mu)\big] & \text{wenn } x \geq \mu, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 2. Ein Objekt kann sich in zwei Zuständen $k = 1, 2$ befinden. Die a-priori Wahrscheinlichkeiten $p(k=1)$ und $p(k=2)$ seien bekannt. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Merkmale $x \in \mathbb{R}^n$ sind Gaußsch verteilt:

$$p(x|k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_k)^n} \exp\Big[-\frac{||x-y||^2}{2\sigma_k^2}\Big].$$

Beide Verteilungen haben dasselbe Zentrum y aber unterschiedliche Streuungen σ_k. Gegeben sei eine klassifizierte Stichprobe $L = \big((x^1, k^1), \dots, (x^{|L|}, k^{|L|})\big)$. Seien die Streuungen σ_k bekannt. Man schätze y mit Hilfe des Maximum-Likelihood Prinzips.

Aufgabe 3. Die Merkmale eines Objektes, welches sich in zwei Zuständen $k = 1,2$ befinden kann, sind Vektoren $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist

$$\begin{aligned} &p(k=1) = p(k=2), \\ &p(x|k=1) = C \cdot \exp\left[-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma^2}\right], \\ &p(x|k=2) = C \cdot \exp\left[-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma^2}\right], \end{aligned}$$

mit den Parametern $\mu_1, \mu_2, \sigma \in \mathbb{R}$.

a) Wie sieht die Klasse der Entscheidungsregeln für dieses Wahrscheinlichkeitsmodell aus?

b) Seien die Parameter μ_1 und μ_2 unbekannt. Gegeben sei eine Lernstichprobe $\big((x^1, k^1), \dots, (x^m, k^m)\big)$. Finden Sie die unbekannten Parameter nach dem Maximum Likelihood Prinzip.

c) Finden Sie die Entscheidungsregel, die die Anzahl der Fehlklassifikationen auf der Lernstichprobe minimiert.