MUSTERERKENNUNG
3. SEMINAR – BAYESSCHE ENTSCHEIDUNGEN

Aufgabe 1. Ein Objekt kann sich mit den a-priori Wahrscheinlichkeiten $p(k)$ in den zwei Zuständen $k = 1,2$ befinden. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Merkmale $x \in \mathbb{R}^n$ sind Gaussch verteilt:

$$p(x \mid k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left[-\frac{\|x-\mu^k\|^2}{2\sigma^2}\right].$$

Beide Verteilungen haben dieselbe Streuung σ. Die Kosten für Fehlklassifikationen $C(k,k')$ sind als eine (allgemeine) 2×2 Matrix $C_{kk'}$ angegeben. Leiten Sie die zugehörige Bayes-Strategie ab und geben Sie eine geometrische Interpretation.

Aufgabe 2. Ein Objekt kann sich in zwei Zuständen $k = 1,2$ befinden. Die a-priori Wahrscheinlichkeiten $p(k)$ seien bekannt. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Merkmale $x \in \mathbb{R}^n$ sind Gaussch verteilt:

$$p(x \mid k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma^k)^n} \exp\left[-\frac{\|x-\mu\|^2}{2\sigma^{k2}}\right].$$

Beide Verteilungen haben dasselbe Zentrum μ und unterschiedliche Streuungen σ^k. Für dieses Wahrscheinlichkeitsmodell soll der Bayessche Klassifikator konstruiert werden. Die Kostenfunktion für Fehlklassifikationen ist die Deltafunktion $\mathbb{1}(k \neq k')$. Welche geometrische Form hat die Entscheidungsregel? Wie ergeben sich die Parameter der Entscheidungsregel aus den bekannten Parametern des Wahrscheinlichkeitsmodells $p(k=1)$, $p(k=2)$, σ^1, σ^2, μ?

Aufgabe 3. Ein Objekt kann sich mit den a-priori Wahrscheinlichkeiten $p(k)$ in den Zuständen $k = 1,2$ befinden. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für das skalare Merkmal $x \in \mathbb{R}$ sind

$$p(x|k) = C \cdot \exp\left[-\tau \cdot |x-\mu^k|\right]$$

(τ und die μ^k, $k = 1,2$ sind reellwertige Parameter).

a) Bestimmen Sie den Normierungskoeffizient C.
b) Wie ergibt sich die Bayessche Entscheidung für den Objektzustand bei bekannten τ, μ^k und $p(k)$?
c) Geben Sie die Parameter an, bei den für eine der Klassen nie entschieden wird. Kann man eine solche Situation auch bei Gausschen bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen konstruieren?

Aufgabe 4. Ein Objekt (x,k), dessen beobachtbare Merkmale $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ Punkte im zweidimensionalen Raum sind, kann sich in zwei Zuständen $k=1,2$ befinden. Seine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x,k)=p(k)\cdot p(x\mid k)$ sei bekannt, wobei die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(x\mid k)$ wie folgt definiert sind:

$$p(x\mid k)=C\cdot\exp\Big(-\frac{\max\big[(x_1-\mu_1^k)^2,(x_2-\mu_2^k)^2\big]}{2\sigma^2}\Big),$$

mit den Zentren $\mu^k=(\mu_1^k,\mu_2^k)\in\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie den Normierungskoeffizient C.

b) Wie sieht die Bayessche Entscheidungsstrategie (mit $C(k,k')=\mathbb{I}(k\neq k')$) aus?

Aufgabe 5. Ein Objekt (x,k), dessen beobachtbare Merkmale $x\in\mathbb{R}^2$ Punkte im zweidimensionalen Raum sind, kann sich a-priori gleichwahrscheinlich in zwei Zuständen $k=1,2$ befinden. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(x\mid k)$ sind Gaussche Verteilungen:

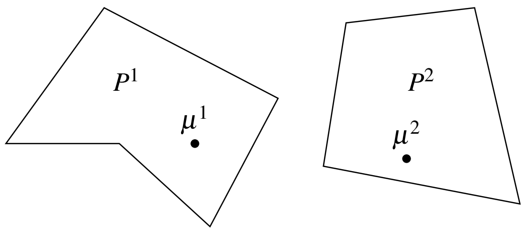
$$p(x\mid k)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^2}\exp\left[-\frac{||x-\mu^k||^2}{2\sigma^2}\right].$$

a) Wie ergibt sich den Wert des Risikos

$$R(e)=\int_{\mathbb{R}^2}\sum_k p(x,k)\cdot C\big(e(x),k\big)dx \tag{1}$$

für die im Bayesschen Sinne (mit $C(k,k')=\mathbb{I}(k\neq k')$) optimale Entscheidungsstrategie e^*?

b)



Von den Zentren μ^k, $k=1,2$ sei nur bekannt, dass jedes von ihnen in einem Polyeder P^k, $k=1,2$ liegt (siehe Skizze). Bei welchen Lagen der Zentren wird das Risiko der Bayesschen Entscheidung maximal?