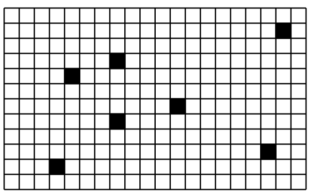
KLAUSUR MUSTERERKENNUNG
SOMMERSEMESTER 2011

Aufgabe 1. (3P) Für Muster $x \in \mathbb{R}$, die in zwei Klassen zu teilen sind, wird die Menge der Entscheidungsregeln

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \gtrless 0$$

(Polynome n. Ordnung) betrachtet. Dabei sind die Koeffizienten a_i, $i = 0 \dots n$ Parameter der Entscheidungsregel.
a) Gegeben sei eine klassifizierte Lernstichprobe $(x_1, k_1), \dots, (x_l, k_l)$. Wie kann man die Parameter der Entscheidungsregel mithilfe des Perzeptron-Algorithmus lernen?
b) Wie hoch muss der Grad n des Polynoms sein, damit eine beliebige Lernstichprobe aus L *verschiedenen* Mustern beliebig klassifizierbar ist.

Aufgabe 2. (3P) Man konstruiere ein Hopfield Netz, das die folgende Bildklasse modelliert. Die Bilder sind schwarzweiß und bestehen aus einer beliebigen Anzahl der einzelnen schwarzen Pixeln. Ein Beispiel eines solchen Bildes ist in der Abbildung unten dargestellt.



Verwenden Sie zwei Neuronen pro Pixel, die jeweils den Pixelwerten „schwarz“ und „weiß“ entsprechen. Sorgen Sie zunächst mithilfe der entsprechenden Verbindungen und Gewichten dafür, dass pro Pixel genau ein Neuron feuert. Wie sind die Gewichte zwischen den Neuronen unterschiedlicher Pixel und die Schwellwerte zu wählen, damit folgendes gilt. Alle Bilder aus der oben beschriebenen Klasse entsprechen Netzkonfigurationen maximaler Energie. Alle anderen Bilder entsprechen Netzkonfigurationen mit kleineren Werten der Energie.

Aufgabe 3. (1P) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der Augenzahlen zweier unabhängig gewürfelten Würfel durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 4. (3P) Ein Objekt kann sich in zwei Zuständen $k = 1,2$ befinden. Die a-priori Wahrscheinlichkeiten $p(k = 1)$ und $p(k = 2)$ seien bekannt. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Merkmale $x \in \mathbb{R}^n$ sind wie folgt definiert. Für die erste Klasse ist die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Merkmale ein mutivariater Gaussian:

$$p(x|k{=}1) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(A)}} \exp\Big[-(x-\mu)^T A^{-1}(x-\mu)\Big]$$

mit einem Zentrum $\mu \in \mathbb{R}^n$ und einer $n \times n$ Kovarianzmatrix A. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Merkmale unter der Bedingung zweiter Klasse ist eine Konstante in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ und 0 sonst:

$$p(x|k{=}2) = \begin{cases} a & \text{wenn} \quad x \in D \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Für dieses Modell soll ein Klassifikator nach dem Prinzip der Maximum Aposteriori Entscheidung konstruiert werden. Welche Form hat die Entscheidungsstrategie?
b) Ist es möglich, dass für eine der Klassen nie entschieden wird?

Aufgabe 5. (2P) Man betrachte die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Merkmale $x \in \mathbb{R}^n$ der zweiten Klasse aus der vorigen Aufgabe, d.h.

$$p(x) = \begin{cases} a & \text{wenn} \quad x \in D \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zusätzlich sei bekannt, dass das Gebiet D konvex ist. Wie ergibt sich aus einer Lernstichprobe der Muster $x^1, x^2, \ldots, x^L$ das Gebiet, das die Wahrscheinlichkeit der Lernstichprobe maximiert?