ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Август 2009 **Выпуск 42. С. 83-94**

Дирк Паули

Университет Дуйсбурга и Эссена, Германия
Universitätsstr. 2, 45117 Essen, Germany

Ювяскюльский университет, Финляндия
P.O. Box 35 (Agora), FI-40014 Jyväskylä, Finland

dirk.pauly@uni-due.de

Сергей Репин

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
27, Фонтанка, С.-Петербург 191011, Россия

Ювяскюльский университет, Финляндия
P.O. Box 35 (Agora), FI-40014 Jyväskylä, Finland

repin@pdmi.ras.ru

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ВО ВНЕШНИХ ОБЛАСТЯХ

Получены вычислимые гарантированные верхние оценки разности между точным и приближенным решениями внешней краевой задачи для линейного эллиптического уравнения. Анализ основан на чисто функциональном подходе и не привлекает специфические свойства метода аппроксимации, поэтому оценки, полученные в данной статье, применимы к любому приближенному решению из соответствующего энергетического пространства. Такие оценки (называемые также мажорантами погрешности функционального типа) получены ранее для задач в ограниченных областях пространства $\mathbb{R}^N$. Библиография: 4 назв. Иллюстрации: 1 рис.

1. Введение

Целью наших исследований является разработка метода вывода гарантированных и вычислимых верхних оценок разности между точным решением u эллиптической краевой задачи во внешней области и любой аппроксимации из соответствующего энергетического пространства. Заметим, что такие оценки (называемые также мажорантома погрешности функционального типа) были получены для задач в ограниченных областях пространства $\mathbb{R}^N$ в [**2, 3**].

Метод демонстрируется на примере эллиптической задачи

$$-\operatorname{div} A\nabla u = f, \qquad \text{в } \Omega, \tag{1.1}$$

$$u|_\gamma = g, \qquad \text{на } \gamma := \partial\Omega. \tag{1.2}$$

Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, — внешняя область, т.е. $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ компактно и имеет липшицеву непрерывную границу γ (см. рис. 1).

В статье используются весовые функциональные пространства Лебега

$$L^2_s(\Omega) := \left\{\varphi \;\mid\; \rho^s\varphi \in L^2(\Omega)\right\}, \quad s \in \mathbb{R},$$

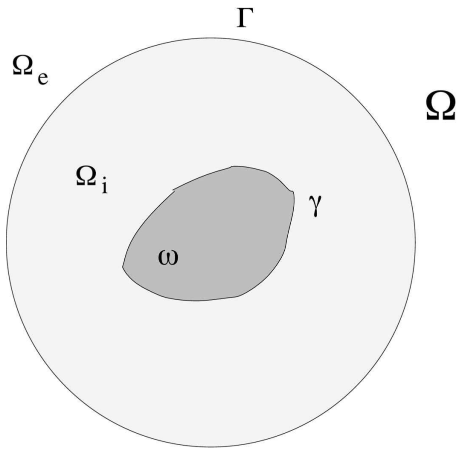

Рис. 1. Внешняя область Ω с искусственной границей Γ.

где $\rho := (1+r^2)^{1/2}$ и $r(x) := |x|$ — радиус-вектор, $L^2_s(\Omega)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{s,\Omega} := \langle \rho^s \varphi, \rho^s \psi \rangle_\Omega := \int\limits_\Omega \rho^{2s} \varphi \psi \, \mathrm{d}\lambda,$$

где φ и ψ принадлежат $L^2_s(\Omega)$ и λ — мера Лебега. Соответствующие нормы обозначаются $\|\varphi\|_{s,\Omega} = \|\rho^s \varphi\|_\Omega$. Если $s = 0$, то $L^2_s(\Omega)$ совпадает с обычным пространством Лебега $L^2(\Omega)$. Для упрощения изложения то же обозначение используется для пространств вектор-функций. Кроме того, введем весовое пространство Соболева

$$H^1_{-1}(\Omega) := \left\{ \varphi \in L^2_{-1}(\Omega) \mid \nabla \varphi \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Это гильбертово гильбертово относительно скалярного произведения

$$(\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi, \psi \rangle_{-1,\Omega} + \langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle_\Omega .$$

Обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$ замыкание пространства $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ финитных функций по норме $H^1_{-1}(\Omega)$. При рассмотрении пространств Соболева в ограниченных областях мы используем обычные (невесовые) L^2-скалярные произведения и L^2-нормы.

При размерности $N \geqslant 3$ теория разрешимости для задачи (1.1)–(1.2) основана на весовой оценке Пуанкаре — Фридрихса (см. следствие 4.2 (i) и замечание 4.3 в приложении)

$$\|\varphi\|_{-1,\Omega} \leqslant \frac{2}{N-2} \|\nabla \varphi\|_\Omega \quad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega), \tag{1.3}$$

лемме Лакса — Мильграма и, при необходимости, адекватном операторе продолжения для граничных данных. Пусть u_γ — функция из $H^1_{-1}(\Omega)$, удовлетворяющая граничному условию (1.2). Слабое решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega) + u_\gamma \subset H^1_{-1}(\Omega)$ задачи (1.1)–(1.2) тогда определяется вариационной постановкой

$$\langle A \nabla u, \nabla w \rangle_\Omega = \langle f, w \rangle_\Omega \quad \forall\, w \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega). \tag{1.4}$$

В силу (1.3) левая часть (1.4) является сильно коэрцитивной полуторалинейной формой над $\overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$, если вещественная матричная функция A измерима, ограничена почти всюду, симметрична и равномерно сильно эллиптическая, т.е.

$$\exists\, c_A > 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \quad \forall\, x \in \Omega \quad c_A|\xi|^2 \leqslant A(x)\xi \cdot \xi. \tag{1.5}$$

Если $f \in L^2_1(\Omega)$, то в силу неравенства Коши — Шварца правая часть (1.4) является линейным непрерывным функционалом на $\overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$. Таким образом, при сделанных предположениях задача (1.4) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega) + u_\gamma$ в силу леммы Лакса — Мильграма.

В случае $N = 1, 2$ рассуждения такие же, но с некоторой модификацией (1.3). При $N = 1$ и, например, $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ ввиду следствия 4.2 (iii) и замечания 4.3 имеем

$$\|\varphi\|_{-1,\Omega} \leqslant 2\,\|\varphi'\|_\Omega \quad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega). \tag{1.6}$$

Поэтому получаем разрешимость при незначительных ограничениях на Ω, которые легко устранить при помощи сдвигов. В случае $N = 2$ сингулярности оказываются более сильными, кроме того следует использовать логарифмические члены. В силу следствия 4.2 (ii) и замечания 4.3 для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ таких, что дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ содержит единичный шар, имеем

$$\|\varphi/(r\ln r)\|_\Omega \leqslant 2\,\|\nabla\varphi\|_\Omega \quad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1,\ln}(\Omega), \tag{1.7}$$

где

$$H^1_{-1,\ln}(\Omega) := \big\{\varphi \mid \varphi/(r\ln r), \nabla\varphi \in L^2(\Omega)\big\}$$

является гильбертовым пространством с естественным скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) \mapsto \langle\varphi/(r\ln r), \psi/(r\ln r)\rangle_\Omega + \langle\nabla\varphi, \nabla\psi\rangle_\Omega$$

и, как и выше, $\overset{\circ}{H}{}^1_{-1,\ln}(\Omega)$ обозначает замыкание $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ в норме пространства $H^1_{-1,\ln}(\Omega)$. Следовательно, для всех f таких, что $r\ln r f \in L^2(\Omega)$ и u_γ из $H^1_{-1,\ln}(\Omega)$, удовлетворяющей граничному условию (1.2) имеем единственное решение u класса $\overset{\circ}{H}{}^1_{-1,\ln}(\Omega) + u_\gamma$.

Подведем итог вышеприведенных результатов в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Предположим, что $N \geqslant 3$, $f \in L^2_1(\Omega)$ и $u_\gamma \in H^1_{-1}(\Omega)$ удовлетворяют граничному условию* (1.2). *Тогда внешняя краевая задача* (1.1)–(1.2) *однозначно слабо разрешима в $\overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega) + u_\gamma$. Оператор решения непрерывен.*

Ввиду вышесказанного можно также установить существование слабых решений в соответствующих пространствах при $N = 1, 2$.

Замечание 1.2. Можно описать более подробно граничные данные g, продолжающие u_γ. Известно, что в случае ограниченной области существует ограниченный линейный оператор следа и соответствующей ограниченный линейный оператор продолжения (правый обратный), отображающий $H^1(\Omega)$ в $H^{1/2}(\gamma)$ и наоборот. Поэтому с помощью сужения получаем ограниченный линейный оператор следа

$$\tau_\gamma : H^1_{-1}(\Omega) \to H^{1/2}(\gamma)$$

и с помощью продолжения и техники срезок получаем ограниченный линейный оператор продолжения

$$E : H^{1/2}(\gamma) \to H^1_{-1}(\Omega)$$

для нашей внешней области Ω, который отображает даже на функции с (произвольно тонким) компактным носителем. Как и в случае ограниченной области, E является правым обратным для

τ_γ. Тогда можно уточнить $g \in H^{1/2}(\gamma)$ и $u_\gamma := Eg \in H^1_{-1}(\Omega)$, а также вариационную постановку для $u = \widetilde{u} + Eg$: Найти $\widetilde{u} \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$ такую, что

$$B(\widetilde{u}, w) := \langle A\nabla\widetilde{u}, \nabla w\rangle_\Omega = \langle f, w\rangle_\Omega - \langle A\nabla Eg, \nabla w\rangle_\Omega =: F(w) \quad \forall\, w \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega).$$

Наконец, введем гильбертово пространство

$$D(\Omega) := \left\{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \operatorname{div}\varphi \in L^2_1(\Omega)\right\}$$

относительно канонического скалярного произведения

$$(\varphi, \psi) \mapsto \langle\varphi, \psi\rangle_\Omega + \langle\operatorname{div}\varphi, \operatorname{div}\psi\rangle_{1,\Omega}\,.$$

2. Верхние оценки отклонения от точного решения в размерностях $N \geqslant 3$

Пусть v — приближение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega) + u_\gamma \subset H^1_{-1}(\Omega)$, где v предполагается лишь из класса $H^1_{-1}(\Omega)$, поскольку граничное условие не обязательно будет выполняться в точном смысле. Наша цель состоит в выводе верхних оценок разности между ∇u и ∇v в терминах нормы

$$\|\varphi\|_{A,\Omega} := \left\|A^{1/2}\varphi\right\|_\Omega = \langle A\varphi, \varphi\rangle_\Omega^{1/2}\,.$$

Используя (1.4), получаем для всех $w \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$

$$\langle A\nabla(u - v), \nabla w\rangle_\Omega = \langle f, w\rangle_\Omega - \langle A\nabla v, \nabla w\rangle_\Omega\,. \tag{2.1}$$

Прежде всего отметим два полезных утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть $u, v \in H^1_{-1}(\Omega)$ такие же, как выше. Кроме того, пусть Φ — линейный непрерывный функционал над $\overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$ и $c_\Phi > 0$ такое, что для всех $w \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$*

$$\langle A\nabla(u - v), \nabla w\rangle_\Omega = \Phi(w) \leqslant c_\Phi\, \|\nabla w\|_{A,\Omega}\,.$$

Тогда

$$\|\nabla(u - v)\|_{A,\Omega} \leqslant c_\Phi + 2\, \|\nabla(\widehat{u} - \widehat{v})\|_{A,\Omega} \tag{2.2}$$

для всех $\widehat{u}, \widehat{v} \in H^1_{-1}(\Omega)$ таких, что $\widehat{u} - \widehat{v}$ совпадает с $u - v$ на границе γ. Если, кроме того, $u - v$ принадлежит $\overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$, то

$$\|\nabla(u - v)\|_{A,\Omega} \leqslant c_\Phi. \tag{2.3}$$

Доказательство. Положим

$$w := u - v - (\widehat{u} - \widehat{v}) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega).$$

В силу неравенства Коши — Шварца

$$\|\nabla w\|^2_{A,\Omega} = \langle A\nabla(u - v), \nabla w\rangle_\Omega - \langle A\nabla(\widehat{u} - \widehat{v}), \nabla w\rangle_\Omega \leqslant \Big(c_\Phi + \|\nabla(\widehat{u} - \widehat{v})\|_{A,\Omega}\Big)\, \|\nabla w\|_{A,\Omega}$$

и тем самым

$$\|\nabla w\|_{A,\Omega} \leqslant c_\Phi + \|\nabla(\widehat{u} - \widehat{v})\|_{A,\Omega}\,.$$

В силу неравенства треугольника получаем (2.2). Заметим, что (2.3) тривиально, так как можно положить $w := u - v$, т.е. $\widehat{u} := \widehat{v} := 0$. $\square$

Можно уточнить результат, используя операторы следа и продолжения из замечания 1.2.

Следствие 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда*

$$\|\nabla(u-v)\|_{A,\Omega} \leqslant c_\Phi + 2\,\|\nabla E(g-\tau_\gamma v)\|_{A,\Omega} \leqslant c_\Phi + 2c_\gamma\,\|g-\tau_\gamma v\|_{H^{1/2}(\gamma)}\,,$$

где $c_\gamma > 0$ *— константа в неравенстве*

$$\|\nabla E\varphi\|_{A,\Omega} \leqslant c_\gamma\,\|\varphi\|_{H^{1/2}(\gamma)} \quad \forall\varphi \in H^{1/2}(\gamma). \tag{2.4}$$

Доказательство. Полагая $\widehat{u} := Eg$ и $\widehat{v} := E\tau_\gamma v$ и используя (2.4), мы получим требуемые неравенства. Заметим, что (2.3) непосредственно вытекает также из следствия. □

В следующих разделах мы введем и рассмотрим иные функционалы Φ и соответствующие им константы c_Φ.

2.1. Первая оценка. Для любых $y \in D(\Omega)$ и $w \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$

$$\langle \operatorname{div} y, w\rangle_\Omega + \langle y, \nabla w\rangle_\Omega = 0. \tag{2.5}$$

Комбинируя (2.1) и (2.5), для всех $w \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$ и $y \in D(\Omega)$ получим

$$\langle A\nabla(u-v), \nabla w\rangle_\Omega = \langle f + \operatorname{div} y, w\rangle_\Omega + \langle y - A\nabla v, \nabla w\rangle_\Omega =: \Phi(w). \tag{2.6}$$

В силу неравенства Коши — Шварца, (1.3) при $c_N := 2/(N-2)$ и (1.5) можно оценить правую часть $\Phi(w)$ в (2.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} |\langle f + \operatorname{div} y, w\rangle_\Omega| &\leqslant \|f + \operatorname{div} y\|_{1,\Omega}\,\|w\|_{-1,\Omega} \leqslant c_N\,\|f + \operatorname{div} y\|_{1,\Omega}\,\|\nabla w\|_\Omega \\ &\leqslant \frac{c_N}{\sqrt{c_A}}\,\|f + \operatorname{div} y\|_{1,\Omega}\,\|\nabla w\|_{A,\Omega}\,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$|\langle y - A\nabla v, \nabla w\rangle_\Omega| \leqslant \|y - A\nabla v\|_{A^{-1},\Omega}\,\|\nabla w\|_{A,\Omega}\,. \tag{2.8}$$

В силу следствия 2.2 получаем такой результат.

Предложение 2.3. *Пусть u и v такие же, как в теореме* 2.1. *Тогда*

$$\|\nabla(u-v)\|_{A,\Omega} \leqslant \frac{c_N}{\sqrt{c_A}}\,\|f + \operatorname{div} y\|_{1,\Omega} + \|y - A\nabla v\|_{A^{-1},\Omega} + 2c_\gamma\,\|g - \tau_\gamma v\|_{H^{1/2}(\gamma)}\,, \tag{2.9}$$

где y — произвольное векторное поле в $D(\Omega)$.

Замечание 2.4. Если v удовлетворяет заданному граничному условию, то из (2.9) следует

$$\|\nabla(u-v)\|_{A,\Omega} \leqslant \frac{c_N}{\sqrt{c_A}}\,\|f + \operatorname{div} y\|_{1,\Omega} + \|y - A\nabla v\|_{A^{-1},\Omega}\,. \tag{2.10}$$

Оценки (2.9) и (2.10)) показывают, что отклонения от точных решений внешних краевых задач имеет такую же структуру, как и в случае задач в ограниченных областях, а именно они содержат весовые невязки основных соотношений с весами, заданными константами в соответствующих неравенствах вложения.

2.2. Вторая оценка. Предположим, что Ω разлагается на две подобласти Ω_i и Ω_e с границей $\Gamma := \partial\Omega_e$ (см. рис. 1) и поля $y \in D(\Omega)$ удовлетворяют следующему соотношению в точном смысле:

$$\operatorname{div} y + f = 0 \quad \text{in } \Omega_e. \tag{2.11}$$

В частности, такая ситуация может возникнуть, если f имеет компактный носитель и y представимо (во внешней области Ω_e) Как линейная комбинация соленоидальных полей, затухающих на бесконечности. В этом случае оценка из предложения 2.3 оказывается тривиально следующей оценкой:

$$\|\nabla(u-v)\|_{A,\Omega} \leqslant c_o \|f + \operatorname{div} y\|_{\Omega_i} + \|y - A\nabla v\|_{A^{-1},\Omega} + 2c_\gamma \|g - \tau_\gamma v\|_{H^{1/2}(\gamma)} \tag{2.12}$$

для всех $y \in D(\Omega)$, удовлетворяющих (2.11), где весовая константа имеет вид

$$c_o := \frac{c_N(1 + \|r\|_{\infty,\Omega_i})}{\sqrt{c_A}}, \tag{2.13}$$

что вытекает непосредственно из неравенств

$$\|f + \operatorname{div} y\|_{1,\Omega} = \|f + \operatorname{div} y\|_{1,\Omega_i} \leqslant |\rho|_{\infty,\Omega_i} \|f + \operatorname{div} y\|_{\Omega_i} \leqslant (1 + |r|_{\infty,\Omega_i}) \|f + \operatorname{div} y\|_{\Omega_i}.$$

Однако мы можем также вывести другую оценку. Запишем (2.7) и воспользуемся неравенством Коши — Шварца в Ω_i

$$|\langle f + \operatorname{div} y, w\rangle_\Omega| = \left|\langle f + \operatorname{div} y, w\rangle_{\Omega_i}\right| \leqslant \|f + \operatorname{div} y\|_{\Omega_i} \|w\|_{\Omega_i} \tag{2.14}$$

и оценкой

$$\|w\|_{\Omega_i} \leqslant c_{\Omega_i} \|\nabla w\|_{\Omega_i} \leqslant \frac{c_{\Omega_i}}{\sqrt{c_A}} \|\nabla w\|_{A,\Omega}, \tag{2.15}$$

где c_{Ω_i} обозначает константу из неравенства Пуанкаре — Фридрихса, ассоциированную с ограниченной областью Ω_i, т.е. наилучшая константа неравенства

$$\|\varphi\|_{\Omega_i} \leqslant c_{\Omega_i} \|\nabla\varphi\|_{\Omega_i} \quad \forall\, \varphi \in \left\{\psi \in H^1(\Omega_i) \;\middle|\; \tau_{\partial\Omega_i}\psi|_\gamma = 0 \text{ на } \gamma\right\},$$

где $\tau_{\partial\Omega_i} : H^1(\Omega_i) \to H^{1/2}(\partial\Omega_i)$ обозначает оператор следа. В этом случае мы опять получаем (2.12), но теперь с (оптимальной) весовой константой

$$c_o := \frac{c_{\Omega_i}}{\sqrt{c_A}}. \tag{2.16}$$

Заметим, что константу (2.13) можно также получить с помощью (2.7) и (2.14), заменив оценку (2.15) следующей:

$$\|w\|_{\Omega_i} \leqslant (1 + |r|_{\infty,\Omega_i}) \|w\|_{-1,\Omega_i} \leqslant (1 + |r|_{\infty,\Omega_i}) \|w\|_{-1,\Omega} \leqslant \frac{c_N}{\sqrt{c_A}}(1 + |r|_{\infty,\Omega_i}) \|\nabla w\|_{A,\Omega}.$$

Суммируя сказанное, получаем вторую апостериорную оценку

Предложение 2.5. *Для всех $y \in D(\Omega)$ с (2.11)*

$$\|\nabla(u-v)\|_{A,\Omega} \leqslant c_o \|f + \operatorname{div} y\|_{\Omega_i} + \|y - A\nabla v\|_{A^{-1},\Omega} + 2c_\gamma \|g - \tau_\gamma v\|_{H^{1/2}(\gamma)},$$

где c_o определено либо (2.13), *либо* (2.16).

Замечание 2.6. В общем случае, число c_{Ω_i} будет меньше и тем самым получаем оценку лучше, чем $c_N(1+\|r\|_{\infty,\Omega_i})$. С другой стороны, число $c_N(1+\|r\|_{\infty,\Omega_i})/\sqrt{c_A}$ является легко вычислимой верхней оценкой для наилучшей из возможных констант c_o.

2.3. Третья оценка. Пусть y_i и y_e — сужения некоторого $y\in L^2(\Omega)$ на Ω_i и Ω_e соответственно. Предполагая, что $y_i\in D(\Omega_i)$ и $y_e\in D(\Omega_e)$, но не обязательно $y\in D(\Omega)$, воспользуемся уравнениями

$$\langle y_i,\nabla w\rangle_{\Omega_i}+\langle \operatorname{div} y_i,w\rangle_{\Omega_i}=\langle \tau_{n,\Gamma}y_i,\tau_\Gamma w\rangle_\Gamma\,, \tag{2.17}$$

$$\langle y_e,\nabla w\rangle_{\Omega_e}+\langle \operatorname{div} y_e,w\rangle_{\Omega_e}=-\langle \tau_{n,\Gamma}y_e,\tau_\Gamma w\rangle_\Gamma\,, \tag{2.18}$$

которые выполнены для всех $w\in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$ и в смысле следов $\tau_\Gamma : H^1_{-1}(\Omega)\to H^{1/2}(\Gamma)$ и $\tau_{n,\Gamma} : D(\Omega_i)\to H^{-1/2}(\Gamma)$ соответственно $\tau_{n,\Gamma} : D(\Omega_e)\to H^{-1/2}(\Gamma)$. Сейчас мы предполагаем, что Γ липшицева (чтобы гарантировать, что следы определены корректно). Обозначим через $\langle\varphi,\psi\rangle_\Gamma$ двойственность между $H^{-1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$. Напомним, что нормали следов $\tau_{n,\Gamma}y_i$ и $\tau_{n,\Gamma}y_e$ имеют слабые поверхностные дивергенции в $H^{-1/2}(\Gamma)$. Если $y\in D(\Omega)$, то $\operatorname{div} y_i=\operatorname{div} y$ в Ω_i и $\operatorname{div} y_e=\operatorname{div} y$ в Ω_e. Поэтому в рассматриваемом случае, складывая (2.17) и (2.18), получаем

$$\langle \tau_{n,\Gamma}y_i-\tau_{n,\Gamma}y_e,\tau_\Gamma w\rangle_\Gamma=\langle y,\nabla w\rangle_{\Omega_i}+\langle \operatorname{div} y,w\rangle_\Omega=0$$

для всех $w\in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$ в силу (2.5). Поэтому

$$\tau_{n,\Gamma}y_i=\tau_{n,\Gamma}y_e$$

для всех $y\in D(\Omega)$ ввиду сюръективности τ_Γ.

Чтобы найти Φ, как в (2.6), мы подставим (2.17), (2.18) вместо (2.5) в (2.1). Тогда получаем

$$\begin{aligned}\langle A\nabla(u-v),\nabla w\rangle_\Omega&=\langle f+\operatorname{div} y_i,w\rangle_{\Omega_i}+\langle f+\operatorname{div} y_e,w\rangle_{\Omega_e}\\&\quad+\langle y-A\nabla v,\nabla w\rangle_\Omega+\langle \tau_{n,\Gamma}y_e-\tau_{n,\Gamma}y_i,\tau_\Gamma w\rangle_\Gamma=:\Phi(w).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Третий член в $\Phi(w)$ будет оцениваться через (2.8), а для последнего члена мы можем воспользоваться непрерывностью оператора следа τ_Γ в комбинации с оценкой Пуанкаре — Фридрихса, т.е.

$$\|\tau_\Gamma\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\leqslant c_\Gamma\,\|\nabla\varphi\|_{A,\Omega}\quad \forall\varphi\in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega). \tag{2.20}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left|\langle \tau_{n,\Gamma}y_e-\tau_{n,\Gamma}y_i,\tau_\gamma w\rangle_\Gamma\right|&\leqslant\|\tau_{n,\Gamma}y_e-\tau_{n,\Gamma}y_i\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,\|\tau_\Gamma w\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\\&\leqslant c_\Gamma\,\|\tau_{n,\Gamma}y_e-\tau_{n,\Gamma}y_i\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,\|\nabla w\|_{A,\Omega}\,.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Для оценки второго члена в of $\Phi(w)$ мы опять воспользуемся (1.3) и (1.5):

$$\begin{aligned}\left|\langle f+\operatorname{div} y_e,w\rangle_{\Omega_e}\right|&\leqslant\|f+\operatorname{div} y_e\|_{1,\Omega_e}\,\|w\|_{-1,\Omega_e}\leqslant\|f+\operatorname{div} y_e\|_{1,\Omega_e}\,\|w\|_{-1,\Omega}\\&\leqslant\frac{c_N}{\sqrt{c_A}}\,\|f+\operatorname{div} y_e\|_{1,\Omega_e}\,\|\nabla w\|_{A,\Omega}\,.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Для первого (и последнего) члена в $\Phi(w)$ у нас по меньшей мере две возможности, как в п. 2.2, получения оценки

$$\left|\langle f+\operatorname{div} y_i,w\rangle_{\Omega_i}\right|\leqslant c_o\,\|f+\operatorname{div} y_i\|_{\Omega_i}\,\|\nabla w\|_{A,\Omega} \tag{2.23}$$

где c_o определено либо (2.13), либо (2.16).

Наконец, с помощью (2.19), (2.8), (2.21), (2.22), (2.23) ввиду следствия 2.2 получаем третью оценку.

Предложение 2.7. *Для всех $y \in L^2(\Omega)$ таких, что $y_i \in D(\Omega_i)$ и $y_e \in D(\Omega_e)$*

$$\|\nabla(u-v)\|_{A,\Omega} \leqslant c_o \|f + \operatorname{div} y_i\|_{\Omega_i} + \frac{c_N}{\sqrt{c_A}} \|f + \operatorname{div} y_e\|_{1,\Omega_e} + \|y - A\nabla v\|_{A^{-1},\Omega}$$
$$+ c_\Gamma \|\tau_{n,\Gamma} y_e - \tau_{n,\Gamma} y_i\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + 2c_\gamma \|g - \tau_\gamma v\|_{H^{1/2}(\gamma)} \tag{2.24}$$

где c_o взято из предложения 2.5. *Правая часть* (2.24) *обращается в нуль тогда и только тогда, когда v совпадает с u и y совпадает с $A\nabla u$.*

Замечание 2.8. Имеется много возможностей вывода (2.20). Мы здесь лишь отметим, что $\tau_\Gamma\varphi$ можно рассматривать как след функции, определенной в Ω_i или Ω_e, или даже как след функции, определенной лишь в малой окрестности Γ. Таким образом, можно подобрать константу c_Γ согласно нашим требованиям.

Замечание 2.9. Благодаря этой оценке можно предложить метод решения. Мы строим приближения с помощью пробных функций локально с носителями в Ω_i, например, FEM, и используем глобальные приближения для учета поведения на бесконечности в Ω_e. Обычно эти два типа приближений не согласуются на искусственной границе Γ. Однако в силу предложения 2.7 это и не требуется, так как мы можем использовать штрафной коэффициент c_Γ вместо штрафного члена. Кроме того, мы располагаем еще одним параметром: "радиусом" границы Γ. Поскольку Γ искусственная и произвольная, можно использовать этот параметр в алгоритме, чтобы достичь лучшие результаты.

Замечание 2.10. Теперь отметим, что все наши оценки неулучшаемы, в чем легко убедиться, положив $v := u \in H^1_{-1}(\Omega)$ и $y := A\nabla u \in D(\Omega)$.

Замечание 2.11. В предложениях 2.3, 2.5, 2.7 можно всегда заменить последнее слагаемое в правой части на $2\|\nabla(\widehat{u} - \widehat{v})\|_{A,\Omega}$ или $2\|\nabla E(g - \tau_\gamma v)\|_{A,\Omega}$ в силу теоремы 2.1 и следствия 2.2.

3. Верхние оценки в размерности $N = 2$

Теорема 2.1 верна также для $N = 2$ и, чтобы убедиться в этом, надо лишь использовать оценку Пуанкаре — Фридрихса и затем очевидным образом неравенство Коши — Шварца. Таким образом, следующее утверждение имеет место.

Предложение 3.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ такая, что $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ содержит единичный шар.*

(i) *Для всех $y \in D(\Omega)$*

$$\|\nabla(u-v)\|_{A,\Omega} \leqslant \frac{2}{\sqrt{c_A}} \|r \ln r (f + \operatorname{div} y)\|_\Omega + \|y - A\nabla v\|_{A^{-1},\Omega} + 2c_\gamma \|g - \tau_\gamma v\|_{H^{1/2}(\gamma)}.$$

(ii) *Для всех $y \in D(\Omega)$ таких, что $\operatorname{div} y + f = 0$ в Ω_e*

$$\|\nabla(u-v)\|_{A,\Omega} \leqslant c_o \|f + \operatorname{div} y\|_{\Omega_i} + \|y - A\nabla v\|_{A^{-1},\Omega} + 2c_\gamma \|g - \tau_\gamma v\|_{H^{1/2}(\gamma)},$$

где

$$c_o = \min\left\{2\|r \ln r\|_{\infty,\Omega_i}, c_{\Omega_i}\right\} / \sqrt{c_A}.$$

(iii) *Для всех* $y \in L^2(\Omega)$ *таких, что* $y_i \in D(\Omega_i)$ *и* $y_e \in D(\Omega_e)$,

$$\|\nabla(u-v)\|_{A,\Omega} \leqslant c_o \|f + \operatorname{div} y_i\|_{\Omega_i} + \frac{2}{\sqrt{c_A}} \|r \ln r(f + \operatorname{div} y_e)\|_{1,\Omega_e} + \|y - A\nabla v\|_{A^{-1},\Omega}$$
$$+ c_\Gamma \|\tau_{n,\Gamma} y_e - \tau_{n,\Gamma} y_i\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + 2c_\gamma \|g - \tau_\gamma v\|_{H^{1/2}(\gamma)}.$$

Аналогично справедливы также замечания 2.6, 2.8–2.11.

4. Приложение

4.1. Нижние оценки погрешности. Заметим, что ввиду стандартных вариационных рассуждений имеем

$$\|\nabla(u-v)\|^2_{A,\Omega} = \sup_{y \in L^2(\Omega)} \Big(2 \langle A\nabla(u-v), y\rangle_\Omega - \|y\|^2_{A,\Omega} \Big).$$

Таким образом, для всех $w \in H^1_{-1}(\Omega)$ получаем оценку

$$\|\nabla(u-v)\|^2_{A,\Omega} \geqslant 2 \langle A\nabla(u-v), \nabla w\rangle_\Omega - \|\nabla w\|^2_{A,\Omega} = 2 \langle A\nabla u, \nabla w\rangle_\Omega - \langle A\nabla(2v+w), \nabla w\rangle_\Omega,$$

которая неулучшаема, поскольку можно положить $w = u - v$. Однако, чтобы исключить неизвестное точное решение u из правой части, нам надо $w \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$, поскольку тогда в силу (1.4)

$$\|\nabla(u-v)\|^2_{A,\Omega} \geqslant 2 \langle f, w\rangle_\Omega - \langle A\nabla(2v+w), \nabla w\rangle_\Omega. \tag{4.1}$$

Однако эта оценка уже не будет точной, поскольку подстановка $w = u - v$ неправомерна. Фактически, для $A\nabla u \in D(\Omega)$ и $\operatorname{div} A\nabla u = -f$ при $w \in H^1_{-1}(\Omega)$ получаем

$$\langle A\nabla u, \nabla w\rangle_\Omega = \langle f, w\rangle_\Omega + \langle \tau_{n,\gamma} A\nabla u, \tau_\gamma w\rangle_\gamma.$$

Поэтому получаем оценку

$$\|\nabla(u-v)\|^2_{A,\Omega} \geqslant 2 \langle f, w\rangle_\Omega - \langle A\nabla(2v+w), \nabla w\rangle_\Omega + 2 \langle \tau_{n,\gamma} A\nabla u, \tau_\gamma w\rangle_\gamma$$

для всех $w \in H^1_{-1}(\Omega)$, которая точная и совпадает с (4.1) для $w \in \overset{\circ}{H}{}^1_{-1}(\Omega)$. Однако неизвестное точное решение u будет еще присутствовать в правой части, т.е. нормальный след $A\nabla u$ на γ. Более того, если $\langle \tau_{n,\gamma} A\nabla u, \tau_\gamma w\rangle_\gamma > 0$, то (4.1) не может быть точной.

4.2. Оценки типа Пуанкаре для внешних областей. Определим радиальную производную $\partial_r := \xi \cdot \nabla$, где $\xi(x) := x/r(x)$. Пусть B_ε и S_ε обозначают открытый шар и сферу радиуса ε с центром в начале координат в $\mathbb{R}^N$ соответственно. Мы воспользуемся идеями из [**4**, лемма 4.1] и [**1**, Оценка Паункаре III, с. 57], модифицируя их для нашего случая.

Лемма 4.1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, *— область и* $\beta \in \mathbb{R}$. *Для всех* $u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ *справедливы следующие оценки Пуанкаре*:

(i) *Если* $\beta > 1 - N/2$, *то*

$$(2\beta + N - 2) \left\|r^{\beta-1} u\right\|_\Omega \leqslant 2 \left\|r^\beta \partial_r u\right\|_\Omega.$$

(ii) *Пусть* $B_1 \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. *Если* $\beta \geqslant (3-N)/2$ *или* $\beta \leqslant 1 - N/2$, *то*

$$|2\beta+N-3|\left\|\frac{r^{\beta-1}}{\ln r}u\right\|_{\Omega}\leqslant 2\left\|r^{\beta}\partial_r u\right\|_{\Omega}.$$

(iii) *Если* $N=1$, *то*

$$|2\beta-1|\left\|(1+r)^{\beta-1}u\right\|_{\Omega}\leqslant 2\left\|(1+r)^{\beta}\partial_r u\right\|_{\Omega}+|2\min\{0,2\beta-1\}|^{1/2}\,|u(0)|,$$

где u *будет продолжена нулем на* $\mathbb{R}$.

Для оценок, полученных в данной статье, можно считать, что $\beta=0$. В этом частном случае приведенная выше лемма формулируется следующим образом.

Следствие 4.2. *Пусть Пусть* $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, $N\geqslant 1$, *— область. Для всех* $u\in\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ *справедливые следующие оценки Пуанкаре*:

(i) *Если* $N\geqslant 3$, *то*

$$\|u\|_{-1,\Omega}\leqslant\|u/(1+r)\|_{\Omega}\leqslant\|u/r\|_{\Omega}\leqslant\frac{2}{N-2}\|\partial_r u\|_{\Omega}\leqslant\frac{2}{N-2}\|\nabla u\|_{\Omega}.$$

(ii) *Если* $N=2$ *и* $B_1\subset\mathbb{R}^2\setminus\Omega$, *то*

$$\|u/(r\ln r)\|_{\Omega}\leqslant 2\|\partial_r u\|_{\Omega}\leqslant 2\|\nabla u\|_{\Omega}.$$

(iii) *Если* $N=1$, *то*

$$\|u\|_{-1,\Omega}\leqslant\|u/(1+r)\|_{\Omega}\leqslant 2\|\partial_r u\|_{\Omega}+\sqrt{2}|u(0)|\leqslant 2\|u'\|_{\Omega}+\sqrt{2}|u(0)|.$$

Поэтому, если $\Omega\subset\mathbb{R}_{\pm}$, *то*

$$\|u\|_{-1,\Omega}\leqslant\|u/(1+r)\|_{\Omega}\leqslant 2\|\partial_r u\|_{\Omega}\leqslant 2\|u'\|_{\Omega}.$$

Замечание 4.3. По непрерывности, все эти оценки обобщаются для подходящих весовых H^1-пространств Соболева.

Доказательство. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, $N\geqslant 1$, — область и $u\in\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$. Интегрируя по частям, для всех $\alpha\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ получаем

$$2\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon} r^{\alpha}u\partial_r u\,\mathrm{d}\lambda=\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon} r^{\alpha}\partial_r|u|^2\,\mathrm{d}\lambda=-(\alpha+N-1)\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon} r^{\alpha-1}|u|^2\,\mathrm{d}\lambda-\varepsilon^{\alpha}\int\limits_{S_\varepsilon}|u|^2\,\mathrm{d}\sigma.$$

Таким образом, для всех $\gamma\in\mathbb{R}$ и $\beta:=(\alpha+1)/2$

$$\left\|r^{\beta}\partial_r u+\gamma r^{\beta-1}u\right\|^2_{\Omega\setminus B_\varepsilon}=\left\|r^{\beta}\partial_r u\right\|^2_{\Omega\setminus B_\varepsilon}+|\gamma|^2\left\|r^{\beta-1}u\right\|^2_{\Omega\setminus B_\varepsilon}+2\gamma\underbrace{\left\langle r^{\beta}\partial_r u,r^{\beta-1}u\right\rangle_{\Omega\setminus B_\varepsilon}}_{=\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon} r^{\alpha}u\partial_r u\,\mathrm{d}\lambda}$$

$$=\left\|r^{\beta}\partial_r u\right\|^2_{\Omega\setminus B_\varepsilon}+\gamma(\gamma-2\beta-N+2)\left\|r^{\beta-1}u\right\|^2_{\Omega\setminus B_\varepsilon}-\gamma\varepsilon^{2\beta-1}\int\limits_{S_\varepsilon}|u|^2\,\mathrm{d}\sigma.$$

Левая часть этого равенства сходится ввиду теоремы о монотонной сходимости. Поскольку $r^\nu \in L^1(U_1)$ тогда и только тогда, когда $\nu > -N$ и

$$\Big| \int\limits_{S_\varepsilon} |u|^2 \,\mathrm{d}\sigma \Big| \leqslant c\varepsilon^{N-1},$$

правая часть сходится при $\beta > 1 - N/2$ в силу теоремы Лебега в $\mathbb{R}$. Поэтому при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\left\| r^\beta \partial_r u + \gamma r^{\beta-1} u \right\|_\Omega^2 = \left\| r^\beta \partial_r u \right\|_\Omega^2 + \gamma(\gamma - 2\beta - N + 2) \left\| r^{\beta-1} u \right\|_\Omega^2 .$$

Полагая $\gamma := 2\beta + N - 2 > 0$ и используя неравенство треугольника, находим

$$\gamma \left\| r^{\beta-1} u \right\|_\Omega \leqslant 2 \left\| r^\beta \partial_r u \right\|_\Omega .$$

Поскольку нас интересует случай $\beta = 0$, эта оценка применима лишь при размерности $N \geqslant 3$.

При $N = 1$ мы рассуждаем следующим образом. Для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$2 \int\limits_{\mathbb{R}_\pm} (1+r)^\alpha u \partial_r u \,\mathrm{d}\lambda = \pm 2 \int\limits_{\mathbb{R}_\pm} (1 \pm t)^\alpha u(t) u(t)' \,\mathrm{d}\,t = \pm 2 \int\limits_{\mathbb{R}_\pm} (1 \pm t)^\alpha \big(|u(t)|^2 \big)' \,\mathrm{d}\,t$$

$$= -\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_\pm} (1 \pm t)^{\alpha-1} |u(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t - |u(0)|^2$$

и тем самым

$$2 \int\limits_{\mathbb{R}} (1+r)^\alpha u \partial_r u \,\mathrm{d}\lambda = -\alpha \int\limits_{\mathbb{R}} (1+r)^{\alpha-1} |u(t)|^2 \,\mathrm{d}\lambda - 2|u(0)|^2.$$

Поэтому для всех $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\beta := (\alpha+1)/2$

$$\begin{aligned}
&\left\| (1+r)^\beta \partial_r u + \gamma (1+r)^{\beta-1} u \right\|_\Omega^2 \\
&= \left\| (1+r)^\beta \partial_r u \right\|_\Omega^2 + |\gamma|^2 \left\| (1+r)^{\beta-1} u \right\|_\Omega^2 + 2\gamma \underbrace{\big\langle (1+r)^\beta \partial_r u, (1+r)^{\beta-1} u \big\rangle_\Omega}_{= \int\limits_\Omega (1+r)^\alpha u \partial_r u \,\mathrm{d}\lambda} \\
&= \left\| (1+r)^\beta \partial_r u \right\|_\Omega^2 + \gamma(\gamma - 2\beta + 1) \left\| (1+r)^{\beta-1} u \right\|_\Omega^2 - 2\gamma |u(0)|^2.
\end{aligned}$$

Как и выше, в силу неравенства треугольника и выбора $\gamma := 2\beta - 1$, но теперь без каких-либо ограничений на β, получаем

$$\begin{aligned}
|\gamma| \left\| (1+r)^{\beta-1} u \right\|_\Omega &\leqslant \left\| (1+r)^\beta \partial_r u \right\|_\Omega + \Big(\left\| (1+r)^\beta \partial_r u \right\|_\Omega^2 - 2\gamma |u(0)|^2 \Big)^{1/2} \\
&\leqslant 2 \left\| (1+r)^\beta \partial_r u \right\|_\Omega + |2 \min\{0, \gamma\}|^{1/2} \, |u(0)|.
\end{aligned}$$

Для оставшегося случая $N = 2$ потребуется использование логарифмов. Более того, в данном случае начало координат является сингулярной точкой, подлежащей удалению из области рассмотрения. Поэтому будем считать, что $B_1 \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ и $N \geqslant 1$, имея в виду $N = 2$. Для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ рассмотрим сначала

$$2\int\limits_{\Omega}\frac{r^{\alpha}}{\ln r}u\partial_r u\,\mathrm{d}\lambda=\int\limits_{\Omega}\frac{r^{\alpha}}{\ln r}\partial_r|u|^2\,\mathrm{d}\lambda=-(\alpha+N-1)\int\limits_{\Omega}\frac{r^{\alpha-1}}{\ln r}|u|^2\,\mathrm{d}\lambda+\int\limits_{\Omega}\frac{r^{\alpha-1}}{\ln^2 r}|u|^2\,\mathrm{d}\lambda.$$

Обычной процедурой для $\gamma\in\mathbb{R}$ и $\beta:=(\alpha+1)/2\geqslant 0$ получаем

$$\left\|r^{\beta}\partial_r u+\gamma\frac{r^{\beta-1}}{\ln r}u\right\|_{\Omega}^2=\left\|r^{\beta}\partial_r u\right\|_{\Omega}^2+|\gamma|^2\left\|\frac{r^{\beta-1}}{\ln r}u\right\|_{\Omega}^2+2\gamma\underbrace{\left\langle r^{\beta}\partial_r u,\frac{r^{\beta-1}}{\ln r}u\right\rangle_{\Omega}}_{=\int\limits_{\Omega}\frac{r^{\alpha}}{\ln r}u\partial_r u\,\mathrm{d}\lambda}$$

$$=\left\|r^{\beta}\partial_r u\right\|_{\Omega}^2+\gamma(\gamma+1)\left\|\frac{r^{\beta-1}}{\ln r}u\right\|_{\Omega}^2-\gamma(N+2\beta-2)\left\|\frac{r^{\beta-1}}{\sqrt{\ln r}}u\right\|_{\Omega}^2.$$

Таким образом, для $\gamma(N+2\beta-2)\geqslant 0$ можно получить оценку

$$\left\|r^{\beta}\partial_r u+\gamma\frac{r^{\beta-1}}{\ln r}u\right\|_{\Omega}^2\leqslant\left\|r^{\beta}\partial_r u\right\|_{\Omega}^2+\gamma(\gamma-2\beta-N+3)\left\|\frac{r^{\beta-1}}{\ln r}u\right\|_{\Omega}^2,$$

из которой следует

$$\left\|r^{\beta}\partial_r u+\gamma\frac{r^{\beta-1}}{\ln r}u\right\|_{\Omega}^2\leqslant\left\|r^{\beta}\partial_r u\right\|_{\Omega}^2,$$

если положить $\gamma:=2\beta+N-3$ с дополнительным ограничением $\gamma(\gamma+1)\geqslant 0$, т.е. $\gamma\geqslant 0$ или $\gamma\leqslant -1$. Наконец, опять же по неравенству треугольника

$$|\gamma|\left\|\frac{r^{\beta-1}}{\ln r}u\right\|_{\Omega}\leqslant 2\left\|r^{\beta}\partial_r u\right\|_{\Omega}$$

для всех $\beta\geqslant(3-N)/2$ или $\beta\leqslant(2-N)/2$. □

Благодарность. Авторы выражают благодарность Институту математических информационных технологий Ювяскюльского университета (Финляндия) за финансовую поддержку.

Литература

1. R. Leis, *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics*, Teubner, Stuttgart (1986).
2. S. Repin, "A posteriori error estimates for variational problems with uniformly convex functionals," *Math. Comp.* **69**, 481–500 (2000).
3. S. Repin, *A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations, Walter de Gruyter*, Berlin (2008).
4. J. Saranen, K.-J. Witsch, "Exterior boundary value problems for elliptic equations," *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **8**, No. 1, 3–42 (1983).

Статья поступила в редакцию 1 июля 2009 г.