Niederfrequenzasymptotik der Maxwell–Gleichung im inhomogenen und anisotropen Außengebiet

Dissertation

zur
Erlangung des Grades
eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

Dem
Fachbereich 6 – Mathematik und Informatik
der
Universität Essen

vorgelegt im November 2002
von

Dirk Pauly†

aus
Essen

†Diese Arbeit wurde durch das Projekt „We 2394: Untersuchungen der Spektralschar verallgemeinerter Maxwell-Operatoren in unbeschränkten Gebieten" der *Deutschen Forschungsgemeinschaft* unterstützt.

Vorlage der Dissertation:	14.11.2002
Tag der Disputation:	11.03.2003
Vorsitzender des Prüfungsausschusses:	Prof. Dr. Dieter Schmidt, Essen
Gutachter:	Prof. Dr. Rainer Picard, Dresden Prof. Dr. Norbert Weck, Essen Prof. Dr. Karl-Josef Witsch, Essen

für

Lukas

Danksagungen

Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei Herrn Prof. Dr. N. Weck und Herrn Prof. Dr. K.-J. Witsch bedanken, die mich an dieses wunderbare Thema herangeführt haben und mir stets mit Rat und Diskussion zur Seite standen.

Zusammenfassung

Wir behandeln das Strahlungsproblem der Totalreflexion zum verallgemeinerten zeitharmonischen Maxwell–System

$$\operatorname{div} H + \mathrm{i}\,\omega\varepsilon E = F \qquad , \qquad \operatorname{rot} E + \mathrm{i}\,\omega\mu H = G \qquad , \qquad \iota^* E = 0$$

(rot : Cartansche Ableitung; div : Co–Ableitung; $\iota : \partial\Omega \hookrightarrow \overline{\Omega}$: natürliche Einbettung) in einem Außengebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mit inhomogenen, anisotropen Koeffizienten und wollen seine Niederfrequenzasymptotik bestimmen.

Zunächst entwickeln wir eine Fredholm–Theorie zu der obigen zeitharmonischen Maxwell–Gleichung. Wir sind in der Lage, Daten aus gewichteten L^2–Räumen zu behandeln. Mit Hilfe einer Zerlegung des elektrischen Feldes E und magnetischen Feldes H gelingt es, das polynomiale Abklingen der Eigenlösungen und eine a–priori–Abschätzung durch Rückführung auf die entsprechenden Ergebnisse der skalaren Helmholtz–Gleichung zu zeigen. Die Methode der Grenzabsorption liefert dann für Frequenzen aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die gesuchten Strahlungslösungen. Wir müssen endlichdimensionale Kerne für gewisse Eigenwerte einräumen, wobei sich diese Eigenwerte bei Null nicht häufen können. Fordern wir stärkere Differenzierbarkeitsvoraussetzungen (C^2) an die Koeffizienten ε und μ, so müssen etwaige Eigenlösungen sogar exponentiell fallen.

Nach der Lösungstheorie des zeitharmonischen Problems wird die Niederfrequenzasymptotik in Angriff genommen. Hier wird zunächst eine exakte statische Lösungstheorie in gewichteten Räumen benötigt. Diese ist im Vergleich zur z. B. Helmholtz–Gleichung wesentlich komplizierter, da die Lösungen im Fall $\omega = 0$ völlig entkoppeln und außerdem zu $\operatorname{rot} E = G$ und $\operatorname{div} H = F$ zusätzliche Bedingungen der Art

$$\operatorname{div} \varepsilon E = f \qquad , \qquad \operatorname{rot} \mu H = g$$

hinzutreten. Desweiteren besitzt dieses statische Problem, bestehend aus jenen Gleichungen und geeigneten Rand– sowie Integrierbarkeitsbedingungen, einen nichttrivialen Kern, die Räume der harmonischen Dirichlet–Formen. Es ist auf einem Teilraum $\mathrm{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ eines geeignet gewichteten L^2–Raumes lösbar. Die Lösung ist nach Einführung geeigneter Orthogonalitätsbedingungen eindeutig bestimmt. Wir erhalten Lösungen, welche bis auf endliche Summen spezieller verallgemeinerter „spherical harmonics” in dem natürlichen gewichteten Lösungsraum liegen. Ziel ist es nun, diesen statischen Lösungsoperator $\mathcal{L}_0$ zu iterieren und damit eine verallgemeinerte Neumann–Reihe zu definieren. Dies gelingt mit Hilfe explizit angegebener iterierter Lösungen des statischen Problems im Ganzraum.

Auf einem Teilraum endlicher Kodimension $\mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega)$ von $\mathrm{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ approximiert diese verallgemeinerte Neumann–Reihe dann den Lösungsoperator $\mathcal{L}_\omega$ des zeitharmonischen Problems bis zu einer vorgegebenen Ordnung $\mathbf{J}$. Die exakte Niederfrequenzasymptotik von $\mathcal{L}_\omega$ auf $\mathrm{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ erhalten wir dann, indem wir degenerierte Korrekturoperatoren Γ_j konstruieren, die sich aus den Projektoren auf $\mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega)$ und Iterierten spezieller „wachsender" statischer Lösungen ergeben.

Wir erhalten mit Λ aus (1.29) eine Asymptotik der Gestalt

$$\mathcal{L}_\omega - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^j \mathcal{L}_0 (\Lambda \mathcal{L}_0)^j - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-N} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{N+j} \Gamma_j = \mathcal{O}\big(|\omega|^{\mathbf{J}+1}\big)$$

in (abhängig von $\mathbf{J}$) geeigneten gewichteten L^2–Räumen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Einleitung und Hauptergebnisse

James Clerk Maxwell (1831–1879) erkannte wohl als Erster die völlige Symmetrie zwischen elektrischem und magnetischem Feld (bis auf die Tatsache, daß es keine magnetischen Ladungen und Ströme gibt):

„Ein sich zeitlich änderndes elektrisches (magnetisches) Feld erzeugt ein magnetisches (elektrisches) Wirbelfeld."

Der vollständige differentielle Feldgleichungssatz im $\mathbb{R}^3$ lautet:

- $$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{D} = \mathbf{I} \tag{1.1}$$
- $$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{B} = 0 \tag{1.2}$$
- $$\operatorname{div}\mathbf{D} = \boldsymbol{\rho} \tag{1.3}$$
- $$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \tag{1.4}$$

Hierbei bedeuten

$$\begin{aligned} (\mathbf{E},\mathbf{H}) &: \text{elektrische und magnetische Feldstärke} \quad , \\ \mathbf{B} &: \text{Induktionsflußdichte} \quad , \\ \mathbf{D} &: \text{dielektrische Verschiebung} \quad , \\ \mathbf{I} &: \text{Stromdichte} \quad , \\ \boldsymbol{\rho} &: \text{Ladungsdichte} \end{aligned}$$

und $\operatorname{rot} := \nabla\wedge$ bzw. $\operatorname{div} := \nabla\cdot$ bezeichne den klassischen Rotations– bzw. Divergenzoperator der Vektoranalysis. Seien desweiteren ε die Dielektrizität und μ die Permeabilität des Mediums, so gelten die Beziehungen

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad .$$

Nehmen wir an, daß ε und μ linear und zeitunabhängig sind, so gehen (1.1)–(1.4) in

- $$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{E} = \mathbf{I} \quad , \tag{1.5}$$
- $$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{H} = 0 \quad , \tag{1.6}$$
- $$\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = \boldsymbol{\rho} \quad , \tag{1.7}$$
- $$\operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 0 \tag{1.8}$$

über. Ein zeitharmonischer Ansatz (bzw. Fourier–Transformation bzgl. der Zeit) liefert sodann das zeitharmonische Maxwell–System mit Frequenz ω

- $$\operatorname{rot}H - \mathrm{i}\,\omega\varepsilon E = I \quad , \tag{1.9}$$
- $$\operatorname{rot}E + \mathrm{i}\,\omega\mu H = 0 \quad , \tag{1.10}$$
- $$\operatorname{div}\varepsilon E = \rho \quad , \tag{1.11}$$
- $$\operatorname{div}\mu H = 0 \quad . \tag{1.12}$$

Da sich (1.11) und (1.12) durch Differentiation aus (1.9) und (1.10) ergeben, können wir für $\omega \neq 0$ diese beiden letzten Gleichungen vergessen. Zur exakten Formulierung der zeitharmonischen Maxwell–Gleichungen in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ benötigen wir noch eine Randbedingung. Modellieren wir die Totalreflexion des elektrischen Feldes E am Rand $\partial\Omega$, so lautet die Randbedingung

$$\nu \wedge E = 0 \qquad \text{an} \qquad \partial\Omega \quad , \tag{1.13}$$

wobei wir mit ν die äußere Einheitsnormle am Rand und mit $\wedge$ das Wedge–Produkt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnen wollen.

Im Jahre 1952 schlug Hermann Weyl in [56] eine Verallgemeinerung des obigen Systems (1.9), (1.10) und (1.13) auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten Ω beliebiger Dimension N vor. Dies ist mit Differentialformen möglich, wenn wir E und I als q–Formen und H als $(q+1)$–Form ansehen. Aus ε und μ werden dann entsprechend lineare Transformationen auf q– bzw. $(q+1)$–Formen und rot in (1.10) entspricht der äußeren Ableitung d sowie $-\operatorname{rot}$ in (1.9) der Co–Ableitung δ . Im Fall $N=3$ und $q=1$ ist diese Verallgemeinerung dann äquivalent zum ursprünglichen Maxwell–System. Um den Bezug zur elektromagnetischen Theorie anzudeuten, wollen wir die äußere Ableitung bzw. Co–Ableitung mit

$$\operatorname{rot} := \mathrm{d} \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{div} := \delta$$

bezeichnen. Damit transformieren sich (1.9), (1.10) und (1.13) zu dem verallgemeinerten Maxwell–System

- $\operatorname{div} H + \mathrm{i}\,\omega\varepsilon E = -I \quad ,$ (1.14)
- $\operatorname{rot} E + \mathrm{i}\,\omega\mu H = 0 \quad ,$ (1.15)
- $\iota^* E = 0 \quad .$ (1.16)

Hierbei sei $\iota : \partial\Omega \hookrightarrow \overline{\Omega}$ die natürliche Einbettung des Randes. Mit den formalen Operatoren

$$M := \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{div} \\ \operatorname{rot} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Lambda := \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

schreiben sich (1.14)–(1.16) kurz

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E,H) = (-I,0) \qquad , \qquad \iota^* E = 0 \qquad .$$

Der Matrizenschreibweise entsprechend müßten wir Formenpaare eigentlich mit $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$ bezeichnen, doch aus typographischen Gründen wollen wir in dieser Arbeit Formenpaare stets als (E,H) schreiben.

Wir wollen nun in dieser Arbeit das Strahlungsproblem für das verallgemeinerte zeitharmonische Maxwell–System mit Totalreflexion

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E,H) = (F,G) \qquad , \qquad \iota^* E = 0 \tag{1.18}$$

in einem Außengebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ für beliebige q betrachten und seine Niederfrequenzasymptotik bestimmen. Ein wesentliches Ziel ist hierbei die Behandlung von Daten (F,G) aus gewichteten L^2–Räumen sowie irregulären, inhomogenen und anisotropen Koeffizienten ε und μ , welche bei Unendlich mit einer Rate $r^{-\tau}$ $(\tau > 0)$ gegen die Identität konvergieren. Das grobe Programm und die grundlegenden Ideen hierzu wurden von Norbert Weck und Karl–Josef Witsch in [50] bzw. [52] und [53] für die Helmholtz–Gleichung bzw. die Gleichungen der linearen Elastizität entwickelt. Mit gänzlich anderen Methoden und unter stärkeren Voraussetzungen erzielen Habib Ammari und Jean–Claude Nédélec in [3] ähnliche Ergebnisse für die klassische Maxwell–Gleichung.

Zunächst stellen wir im vierten Kapitel für den zeitharmonischen Fall, d. h. $\omega \neq 0$, eine Fredholm–Theorie zu (1.18) bereit, welche uns erlaubt, Daten aus $\mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}}(\Omega)^\dagger$ und L^∞–Koeffizienten ε und μ zu behandeln. In diesem Abschnitt verallgemeinern wir im wesentlichen die Methoden von Rainer Picard, Weck und Witsch aus [37] und gelangen zu einem analogen Resultat (Man vergleiche auch mit [52].). Zeitharmonische Außenraumprobleme zu der klassischen Maxwell–Gleichung wurden von Claus Müller in [23] für den Fall glatter Ränder und homogener, isotroper Medien mit Integralgleichungsmethoden und von Rolf Leis in [18] (siehe auch [20]) mit Hilfe der Methode der Grenzabsorption für Medien, die in einem beschränkten Teilgebiet inhomogen und anisotrop sind, betrachtet. Der Fall der verallgemeinerten zeitharmonischen Maxwell–Gleichung wurde von Weck in [43] und Picard in [28] behandelt. Mit Hilfe einer Zerlegung des elektrischen Feldes E und magnetischen Feldes H gelingt es uns für $\tau > 1$, das polynomiale Abklingen der Eigenlösungen und eine a–priori–Abschätzung durch Rückführung auf die entsprechenden Ergebnisse der skalaren Helmholtz–Gleichung zu beweisen. Mit diesen Resultaten liefert dann die Methode der Grenzabsorption für Frequenzen $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die gesuchten Strahlungslösungen. Wir müssen endlichdimensionale Kerne für gewisse Eigenwerte einräumen, wobei sich diese Eigenwerte in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht häufen können. Mit Hilfe einer Abschätzung der Ganzraumlösung im fünften Kapitel, welche aus einer Darstellungsformel und näheren Untersuchungen spezieller Faltungskerne gewonnen wird, können wir dann zu Beginn des siebten Kapitels im Satz 7.3 auch die Null als Häufungspunkt des Spektrums ausschließen und sind damit in der Lage, weitere Niederfrequenzbetrachtungen anzustellen. Unter stärkeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Koeffizienten, d. h. $\varepsilon, \mu \in \mathrm{C}^2$, müssen etwaige Eigenlösungen sogar exponentiell fallen. Kürzlich gelang es Sebastian Bauer in [6] unter ähnlichen Differenzierbarkeits– und Abklingvoraussetzungen an die Koeffizienten im klassischen Fall, $N=3$, $q=1$, Eigenlösungen gänzlich auszuschließen. Seine Methoden lassen sich leider nicht auf den allgemeinen Fall übertragen. Falls die Koeffizienten

†Nicht definierte Ausdrücke schaue man im Symbolverzeichnis nach.

ε und μ in einer Umgebung von Unendlich homogen und isotrop sind, erfüllen die Eigenlösungen komponentenweise die homogene Helmholtz–Gleichung und müssen daher auf Grund der Rellichschen Abschätzung kompakte Träger besitzen. Gilt desweiteren das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit für dieses Maxwell–System, so existieren folglich in diesem Fall keine Eigenlösungen. Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit gilt für skalare C^2–Funktionen ε, μ und im klassischen Fall ($N = 3$, $q = 1$) für C^2–Matrizen ε, μ $\Big($siehe Leis, [19] oder $\big[$[20], page 168, Theorem 8.17$\big]\Big)$.
Die Hauptergebnisse dieses vierten Kapitels fassen wir im Satz 4.29 zusammen.

Nachdem die Lösungstheorie des zeitharmonischen Problems entwickelt worden ist, wird die Niederfrequenzasymptotik in Angriff genommen. Dem roten Faden aus [50], [52] und [53] folgend benötigen wir zunächst eine exakte statische Lösungstheorie in gewichteten Räumen. Diese ist im Vergleich zur z. B. Helmholtz–Gleichung wesentlich komplizierter, da im Fall $\omega = 0$ das System (1.18) völlig entkoppelt und außerdem zu

$$\operatorname{rot} E = G \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div} H = F$$

noch zusätzliche Bedingungen der Art

$$\operatorname{div} \varepsilon E = f \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot} \mu H = g \tag{1.19}$$

hinzutreten. Desweiteren müssen wir für das magnetische Feld H eine Randbedingung, etwa

$$\iota^* \mu H = 0 \qquad , \tag{1.20}$$

stellen. Man beachte hier, daß sich im Fall $\omega \neq 0$ (1.19) durch Differentiation aus (1.18), d. h.

$$\mathrm{i}\,\omega \operatorname{div} \varepsilon E = \operatorname{div} F \qquad \text{und} \qquad \mathrm{i}\,\omega \operatorname{rot} \mu H = \operatorname{rot} G \qquad ,$$

ergibt und sich (1.20) aus (1.18) ebenfalls überträgt, denn $\iota^* E = 0$ zieht $\iota^* \operatorname{rot} E = 0$, also

$$\mathrm{i}\,\omega \iota^* \mu H = \iota^* G \qquad ,$$

nach sich. Dieses statische Problem, bestehend aus

$$\begin{array}{llll} \bullet & \operatorname{rot} E = G \quad , & \bullet & \operatorname{div} H = F \quad , \\ \bullet & \operatorname{div} \varepsilon E = f \quad , & \bullet & \operatorname{rot} \mu H = g \quad , \\ \bullet & \iota^* E = 0 \quad , & \bullet & \iota^* \mu H = 0 \end{array} \tag{1.21}$$

und geeigneten Integrierbarkeitsbedingungen, besitzt einen nichttrivialen Kern ${}_{\varepsilon}\mathcal{H}^q(\Omega) \times \mu^{-1}{}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega)$, die Räume der harmonischen Dirichlet–Formen, und ist für Daten (f, F, G, g) aus einem Teilraum von

$$\mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+2}_s(\Omega) \qquad , \qquad s > 1 - N/2 \qquad ,$$

lösbar. Die Lösung ist nach Einführung geeigneter Orthogonalitätsbedingungen eindeutig bestimmt. Wir erhalten Lösungen, welche bis auf endliche Summen spezieller verallgemeinerter „spherical harmonics“, die wir im fünften Kapitel explizit konstruieren werden, in dem natürlichen gewichteten Lösungsraum $\big($einem Teilraum von $\mathrm{L}^{2,q}_{s-1}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{s-1}(\Omega)\big)$ liegen. Hierzu müssen wir in einer Umgebung von Unendlich fordern, daß die Koeffizienten ε und μ komponentenweise einmal stetig differenzierbar sind, und die Abklingrate τ in Abhängigkeit von s vergrößern.
Diese statischen Resultate sind detailliert in den Sätzen 6.34, 6.36 und 6.38 zu finden.
Ergebnisse zu (1.21) für homogene, isotrope Medien und $s = 0$ bzw. inhomogene, anisotrope Medien und $s = 1$ finden wir bei Rainer Kress in [16] sowie Picard in [27] bzw. Picard in [34]. Der klassische Fall wird für $s = 0$ von Picard in [29] sowie für $s = 1$ von Albert Milani und Picard in [36] diskutiert.
Ziel ist es nun, den statischen Lösungsoperator $\mathcal{L} = \Lambda \mathcal{L}_0$, welcher zu Daten

$$(F, G) \in \operatorname{Reg}^{q,0}_s(\Omega) \subset \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \qquad \text{und} \qquad (f, g) = (0, 0)$$

die Formen $(\varepsilon E, \mu H)$ liefert, zu iterieren und damit eine verallgemeinerte Neumannsche Reihe zu definieren. Dies gelingt mit Hilfe in Kapitel fünf explizit angegebener iterierter Lösungen des statischen Ganzraumproblems. Diese Iteration beweisen wir in Satz 6.48, Bemerkung 6.49 bzw. Korollar 6.50.

Zu Beginn des siebten Kapitels können wir im Satz 7.3 zunächst nachweisen, daß unter bestimmten kanonischen Voraussetzungen an die Daten (F, G) die Strahlungslösungen $\mathcal{L}_\omega(F, G)$ des zeitharmonischen Maxwell–Systems

(1.18) für $\omega \to 0$ in gewichteten Normen gegen eine Lösung $\mathcal{L}_0(F,G)$ des statischen Problems konvergieren. Dieses Teilresultat verallgemeinert Ergebnisse zur klassischen Maxwell–Gleichung von P. Werner aus [55] und Picard aus [32]. Ähnliche Aussagen zur Asymptotik einer modifizierten Maxwell–Gleichung findet man bei Alexander G. Ramm, O. L. Weaver, Weck und Witsch in [38].

Um jedoch eine exakte Konvergenzordnung angeben zu können, bedarf es nun einer genaueren Untersuchung der verallgemeinerten Neumannschen Reihe und ihrer Approximationseigenschaften.
Auf einem Teilraum endlicher Kodimension $\mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega)$ von $\mathrm{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ approximiert diese verallgemeinerte Neumannsche Reihe dann den Lösungsoperator $\mathcal{L}_\omega$ in der Operatortopologie gewichteter L^2–Räume bis zu einer vorgegebenen Ordnung $\mathbf{J}$ (siehe Satz 7.9). Die exakte Niederfrequenzasymptotik von $\mathcal{L}_\omega$ auf ganz $\mathrm{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ erhalten wir dann, indem wir degenerierte Korrekturoperatoren Γ_j konstruieren, welche sich aus den Projektoren auf $\mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega)$ ergeben und aus speziellen iterierten „wachsenden" statischen Lösungen zusammensetzen.
Schließlich erhalten wir im Satz 7.32 bzw. Korollar 7.33 eine Asymptotik der Gestalt

$$\mathcal{L}_\omega - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^j \mathcal{L}_0(\Lambda\mathcal{L}_0)^j - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-N} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{N+j}\Gamma_j = \mathcal{O}\big(|\omega|^{\mathbf{J}+1}\big)$$

in (abhängig von $\mathbf{J}$) geeigneten gewichteten L^2–Räumen. Für diese exakte Niederfrequenzasymptotik müssen wir zusätzlich fordern, daß das Medium nahe Unendlich homogen und isotrop ist.

Wir werden uns in dieser Arbeit auf Raumdimensionen $N \geq 3$ und im weiteren Verlauf, d. h. in der statischen Theorie und der Niederfrequenzasymptotik, sogar nur auf ungerade Dimensionen beschränken. Der wesentliche Grund hierfür ist, daß wir häufig die Hankel–Funktion diskutieren müssen und ihre Reihenentwicklung in den Fällen gerader Dimensionen logarithmische Terme enthält, deren Behandlung die Komplexität der Argumentationen erheblich steigern würde (Für die Helmholtz–Gleichung hat Burkhard Peter in [25] eine entsprechende Niederfrequenzasymptotik im Fall $N = 2$ hergeleitet.). In vielen Fällen wollen wir auf die Änderungen bei geraden N, speziell $N = 2$, hinweisen.
Wir werden auch gänzlich auf die Formulierung dualer Resultate mit Hilfe des Hodgeschen $*$–Operators verzichten. Obgleich diese stets einfach folgen, würden sie den Lesefluß dieser Arbeit eher stören.

1.2 Bezeichnungen

Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{C}$ die Mengen der positiven natürlichen, nicht negativen natürlichen, ganzen, reellen, positiven reellen und komplexen Zahlen. Desweiteren sei $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$. i sei die imaginäre Einheit und $\bar{z}$ für $z \in \mathbb{C}$ die Konjugation. Die euklidischen Normen im $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{C}^N$ schreiben wir mit $|\cdot|$ und für $x, y \in \mathbb{C}^N$ seien

$$r(x) := |x| \qquad \text{und} \qquad x \cdot y := \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot y_n \qquad .$$

Sind U und V Teilmengen eines metrischen Raumes, so seien $\overline{U}$ der Abschluß und ∂U der Rand von U. Wir sagen U ist kompakt enthalten in V und schreiben dann $U \Subset V$, falls $\overline{U}$(kompakt) $\subset V$ gilt. Die Abstandsfunktion bezeichnen wir mit dist.
$U(x,R)$, $K(x,R)$ bzw. $S(x,R)$ seien die offene, abgeschlossene Kugel bzw. Sphäre mit Radius R um x. Speziell sei $S^{N-1} := S(0,1) \subset \mathbb{R}^N$.
Für zwei Mengen U, V sei $\mathrm{F}(U,V)$ die Menge aller Abbildungen f mit Definitionsbereich $D(f) = U$ und Wertebereich $W(f) \subset V$. $N(f)$ bezeichne den Nullraum von f und für $\tilde{U} \subset U$ sei $f|_{\tilde{U}}$ die Einschränkung von f auf $\tilde{U}$. Den Träger einer Funktion f bezeichnen wir mit $\mathrm{supp}\, f$.
Für Gebiete Ω des $\mathbb{R}^N$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sowie $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ definieren wir die folgenden Funktionenräume:

- $\mathrm{C}^k(\Omega) := \{f \in \mathrm{F}(\Omega, \mathbb{C}^\nu) : f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\} \qquad , \qquad \nu \in \mathbb{N}$
- $\mathrm{C}^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{C}^k(\Omega)$
- $\mathrm{C}_0^\ell(\Omega) := \Big\{f \in \mathrm{C}^\ell(\Omega) : \mathrm{supp}\, f \Subset \Omega\Big\}$
- $\mathrm{C}^\ell(\overline{\Omega}) := \Big\{f \in \mathrm{C}^\ell(\Omega) : \bigvee_{\varphi \in \mathrm{C}^\ell(\mathbb{R}^N)} f = \varphi|_\Omega\Big\}$

- $\mathrm{C}_0^\ell(\overline{\Omega}) := \Big\{ \varphi|_\Omega : \varphi \in \mathrm{C}_0^\ell(\mathbb{R}^N) \Big\}$

Ableitungen schreiben wir mit der üblichen Multiindexschreibweise, d. h. für $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ und $|\alpha| := \sum_{n=1}^N \alpha_n$ sei $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N}$ mit $\partial_n := \dfrac{\partial}{\partial x_n}$. Desweiteren seien

$$\nabla := \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_N \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Delta := \sum_{n=1}^N \partial_n^2$$

der Gradient und der Laplace–Operator. Wir definieren auf $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_\Omega := \int_\Omega f \cdot \overline{g} \, d\lambda \qquad \big(\lambda \text{ sei das Lebesgue–Maß im } \mathbb{R}^N .\big) \qquad ,$$

die dadurch induzierte Norm $\|f\|_{0,0,\Omega}^2 := \langle f, f \rangle_\Omega$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{L}^2(\Omega) &:= \overline{\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)} \qquad \big(\text{Abschluß in der } \|\cdot\|_{0,0,\Omega}\text{–Norm}\big) \\ &= \big\{ f \in \mathrm{F}(\Omega, \mathbb{C}^\nu) : f \text{ ist Lebesgue–meßbar und } \|f\|_{0,0,\Omega} < \infty \big\} \qquad , \qquad \nu \in \mathbb{N} \qquad . \end{aligned}$$

Mit Hilfe des schwachen Ableitungsbegriffs und der Gewichtsfunktion $\rho := (1 + r^2)^{\frac{1}{2}}$ definieren wir für $m \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{R}$ die gewichteten Sobolev–Räume

$$\mathrm{H}_s^m(\Omega) := \Big\{ f : \bigwedge_{|\alpha| \leq m} \rho^{s+|\alpha|} \partial^\alpha f \in \mathrm{L}^2(\Omega) \Big\}$$

bzw.

$$\mathbf{H}_s^m(\Omega) := \Big\{ f : \bigwedge_{|\alpha| \leq m} \rho^s \partial^\alpha f \in \mathrm{L}^2(\Omega) \Big\} \supset \mathrm{H}_s^m(\Omega)$$

mit den Normen

$$\|f\|_{m,s,\Omega}^2 := \sum_{|\alpha| \leq m} \big\| \rho^{s+|\alpha|} \partial^\alpha f \big\|_{0,0,\Omega}^2 \qquad \text{bzw.} \qquad |||f|||_{m,s,\Omega}^2 := \sum_{|\alpha| \leq m} \big\| \rho^s \partial^\alpha f \big\|_{0,0,\Omega}^2 \qquad . \tag{1.22}$$

$\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}_s^m(\Omega)$ bzw. $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}_s^m(\Omega)$ seien die Abschlüsse von $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ in der $\|\cdot\|_{m,s,\Omega}$– bzw. $|||\cdot|||_{m,s,\Omega}$–Norm. Durch (1.22) wird insbesondere

$$\|\cdot\|_{0,s,\Omega} = |||\cdot|||_{0,s,\Omega} = \|\rho^s \cdot\|_{0,0,\Omega}$$

definiert und es gilt $\mathrm{L}_s^2(\Omega) := \mathrm{H}_s^0(\Omega) = \mathbf{H}_s^0(\Omega) = \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}_s^0(\Omega) = \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}_s^0(\Omega)$ sowie

$$\mathrm{H}_s^m(\Omega) = \Big\{ f \in \mathrm{L}_s^2(\Omega) : \bigwedge_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f \in \mathrm{L}_{s+|\alpha|}^2(\Omega) \Big\} \subset \mathbf{H}_s^m(\Omega) = \Big\{ f \in \mathrm{L}_s^2(\Omega) : \bigwedge_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f \in \mathrm{L}_s^2(\Omega) \Big\}$$

mit

$$\|f\|_{m,s,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{0,s+|\alpha|,\Omega}^2 \qquad \text{bzw.} \qquad |||f|||_{m,s,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{0,s,\Omega}^2 \qquad .$$

Im Spezialfall $s = 0$ schreiben wir auch

$$\mathrm{H}^m(\Omega) := \mathrm{H}_0^m(\Omega) \quad , \quad \mathbf{H}^m(\Omega) := \mathbf{H}_0^m(\Omega) \quad , \quad \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^m(\Omega) := \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}_0^m(\Omega) \quad , \quad \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^m(\Omega) := \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}_0^m(\Omega) \tag{1.23}$$

und

$$\mathrm{L}^2(\Omega) := \mathrm{L}_0^2(\Omega) = \mathrm{H}_0^0(\Omega) = \mathbf{H}_0^0(\Omega) = \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}_0^0(\Omega) = \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}_0^0(\Omega) = \mathrm{H}^0(\Omega) = \mathbf{H}^0(\Omega) = \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^0(\Omega) = \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^0(\Omega) \quad . \tag{1.24}$$

Desweiteren definieren wir

- $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \Big\{ f : \bigwedge_{\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)} \varphi \cdot f \in \mathrm{L}^2(\Omega) \Big\}$,
- $\mathrm{L}^2_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \Big\{ f \in \mathrm{L}^2(\Omega) : \operatorname{supp} f \text{ beschränkt} \Big\}$,
- $\mathrm{H}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \Big\{ f : \bigwedge_{\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)} \varphi \cdot f \in \mathrm{H}^m(\Omega) \Big\}$,
- $\mathrm{H}^m_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \Big\{ f \in \mathrm{H}^m(\Omega) : \operatorname{supp} f \text{ beschränkt} \Big\}$.

Diese gewichteten Sobolev–Räume liefern nur für unbeschränkte Gebiete (z. B. Außengebiete) etwas Neues. Im Fall, daß Ω ein beschränktes Gebiet ist, gilt für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{H}^m_s(\Omega) = \mathbf{H}^m_s(\Omega) = \mathrm{H}^m(\Omega) = \mathbf{H}^m(\Omega)$$

mit jeweils äquivalenten Normen, die von Ω , m und s abhängen. In solch einem Fall schreiben wir

$$\big(\mathrm{H}^m(\Omega), \|\cdot\|_{m,0,\Omega}\big)$$

und meinen mit $\|\cdot\|_{m,0,\Omega}$ die $\|\cdot\|_{m,0,\Omega}$–Norm. Die Räume $\mathrm{H}^m_s(\Omega)$ bzw. $\mathbf{H}^m_s(\Omega)$ $\big($und $\mathring{\mathrm{H}}^m_s(\Omega)$ bzw. $\mathring{\mathbf{H}}^m_s(\Omega)\big)$ sind mit ihren natürlichen Skalarprodukten Hilbert–Räume. Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^N$ lassen wir oft die Gebietsbezeichnung weg, z. B. $\mathrm{H}^m_s := \mathrm{H}^m_s(\mathbb{R}^N)$.
Seien V_1, V_2 zwei Unterräume eines Vektorraumes V . Dann bezeichnen wir die direkte Summe von V_1 und V_2 mit

$$V_1 \dot{+} V_2 \qquad \text{oder} \qquad V_1 \dot{\sum} V_2 \qquad .$$

Besitzt V sogar ein Skalarprodukt, so schreiben wir die orthogonale Summe als $V_1 \oplus V_2$.
Für zwei normierte Räume X und Y sei $B(X, Y)$ die Menge der beschränkten linearen Operatoren von X nach Y .

Wenden wir uns nun Differentialformen zu. Näheres zum nun Folgenden lese man bei Bishop und Goldberg in [7] oder bei Jänich in [15] nach.
Sei M eine reelle, unendlich oft differenzierbare und orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension N und $\tilde{M} \subset M$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit gleicher Dimension mit $\overline{\tilde{M}} \subset M$. Für $x \in M$ sei $\mathrm{T}_x M$ der Tangentialraum in x , d. h. der Vektorraum der Derivationen im Punkt x . Eine Derivation in x ist eine lineare Abbildung

$$D_x \;:\; \mathrm{C}^\infty(x) := \big\{ f \in \mathrm{C}^\infty(U_x) : U_x \text{ ist offene Umgebung von } x \big\} \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft (Produktregel)

$$\bigwedge_{f,g \in \mathrm{C}^\infty(x)} D_x(f \cdot g) = D_x(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot D_x(g) \qquad .$$

Das Tangentialbündel sei mit $\mathrm{T}M$ bezeichnet. Für $q \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir den komplexen Vektorraum der kovarianten alternierenden Tensoren des Ranges q in x mit $\mathrm{A}^q(x)$ und dessen Bündel mit $\mathrm{A}^q(M)$. Die Elemente aus $\mathrm{A}^q(M)$ nennen wir kurz q–Formen oder Formen. Für $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, N\}$ ist $\mathrm{A}^q(M) = \{0\}$ und $\mathrm{A}^0(M)$ sind die komplexwertigen Funktionen auf M . Auf den Räumen $\mathrm{A}^q(M)$ ist das äußere Produkt

$$\wedge \;:\; \mathrm{A}^{q_1}(M) \times \mathrm{A}^{q_2}(M) \;\longrightarrow\; \mathrm{A}^{q_1+q_2}(M)$$

punktweise erklärt und besitzt die Eigenschaft

$$\bigwedge_{(\Phi,\Psi) \in \mathrm{A}^{q_1}(M) \times \mathrm{A}^{q_2}(M)} \Phi \wedge \Psi = (-1)^{q_1 \cdot q_2} \cdot \Psi \wedge \Phi \qquad .$$

Eine Karte (U, h) um x definiert spezielle Tangenten $\partial_j^h \in \mathrm{T}U$ durch die Vorschrift $\partial_j^h(\varphi) := \big(\partial_j(\varphi \circ h^{-1})\big) \circ h$. $\{\partial_1^h, \ldots, \partial_N^h\}$ bildet dann eine Basis von $\mathrm{T}U$, d. h. für alle x in U von $\mathrm{T}_x U$. Es gilt dann $\partial_j^h(h_\ell) = \delta_{j,\ell}$ (Kronecker–Symbol).

Für zwei Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 und $f \in \mathrm{C}^\infty(M_1, M_2)$ ist das Differential $\mathrm{d}f\ :\ \mathrm{T}M_1 \longrightarrow \mathrm{T}M_2$ punktweise durch $\mathrm{d}_x f\ :\ \mathrm{T}_x M_1 \longrightarrow \mathrm{T}_x M_2$ mit

$$\mathrm{d}_x f(t_x)(\varphi) := t_x(\varphi \circ f) \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathrm{C}^\infty\big(f(x)\big)$$

erklärt. Speziell im Fall $M_2 = \mathbb{R}^{N_2}$ gilt für eine Karte (U, h) von M_1

$$\mathrm{d}f(\partial_j^h) = \partial_j^h f \in \mathbb{R}^{N_2} \qquad , \tag{1.25}$$

falls wir $\mathrm{T}_{f(x)}\mathbb{R}^{N_2}$ durch $\partial_n^{\mathrm{Id}} \widehat{=} e^n$ (e^n : n–ter Einheitsvektor) mit $\mathbb{R}^{N_2}$ identifizieren. Für Kartenkomponenten h_n gilt folglich

$$\mathrm{d}h^n(\partial_j^h) = \partial_j^h h_n = \delta_{j,n} \qquad . \tag{1.26}$$

Die Kartendifferentiale $\{\mathrm{d}h^n\}_{n=1}^N$ bilden eine Basis von $\mathrm{A}^1(x)$, also von $\mathrm{A}^1(U)$, und für jedes $\Phi \in \mathrm{A}^q(M)$ läßt sich $\Phi|_U$ eindeutig als

$$\Phi|_U = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \Phi_I \,\mathrm{d}h^I \qquad , \qquad \Phi_I : U \longrightarrow \mathbb{C} \qquad ,$$

mit $\mathcal{I}(q, N) := \big\{ I := (i_1, \dots, i_q) : i_n \in \{1, \dots, N\}\, ,\ i_1 < \cdots < i_q \big\}$ und $\mathrm{d}h^I := \mathrm{d}h^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}h^{i_q}$ darstellen. Es ist dann $\Phi_I = \Phi(\partial_{i_1}^h, \dots, \partial_{i_q}^h)$. Insbesondere erhalten wir für Funktionen $f \in \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ mit (1.25) und (1.26) lokal

$$\mathrm{d}f = \sum_{n=1}^N \partial_n^h f \,\mathrm{d}h^n \qquad .$$

Wir sagen $\Phi \in \mathrm{A}^q(M)$ ist stetig oder ℓ–mal differenzierbar, falls dies lokal für alle Komponentenfunktionen Φ_I (d. h. $\Phi_I \circ h^{-1}$) und alle Karten h gilt, und definieren dann für $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$:

- $\mathrm{C}^{\ell,q}(M) := \big\{ \Phi \in \mathrm{A}^q(M) : \Phi \text{ ist } \ell\text{–mal stetig differenzierbar} \big\}$
- $\mathrm{C}_0^{\ell,q}(M) := \big\{ \Phi \in \mathrm{C}^{\ell,q}(M) : \operatorname{supp} \Phi \Subset M \big\}$
- $\mathrm{C}_0^{\ell,q}\big(\overline{\tilde{M}}\big) := \big\{ \Phi|_{\tilde{M}} : \Phi \in \mathrm{C}_0^{\ell,q}(M) \big\}$

Der Hodgesche Sternoperator

$$* \ :\ \mathrm{A}^q(M) \longrightarrow \mathrm{A}^{N-q}(M)$$

ist ein Isomorphismus mit der folgenden Eigenschaft: Ist $\{\Phi^i\}_{i=1}^N$ eine positiv orientierte ONB[‡] von $\mathrm{A}^1(x)$ bzw. $\mathrm{A}^1(U)$, so gilt für $I := (i_1, \dots, i_q)$ mit $\Phi^I := \Phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \Phi^{i_q}$

$$*\Phi^I = \sigma(I, I')\Phi^{I'} \qquad ,$$

wobei $I' := (i'_1, \dots, i'_{N-q})$ und $\{i_1, \dots, i_q\} \cup \{i'_1, \dots, i'_{N-q}\} = \{1, \dots, N\}$, so daß $\sigma(I, I')$ das Vorzeichen derjenigen Permutation angibt, welche $(i_1, \dots, i_q, i'_1, \dots, i'_{N-q})$ in $(1, \dots, N)$ überführt. Der Hodgesche Sternoperator besitzt desweiteren für $\Phi \in \mathrm{A}^q(M)$, $\Psi \in \mathrm{A}^{N-q}(M)$ und $\varphi \in \mathrm{A}^0(M)$ die folgenden Eigenschaften:

- $** = (-1)^{q \cdot (N-q)} \,\mathrm{Id}_{\mathrm{A}^q(M)}$
- $\Phi \wedge \Psi = (*\Phi) \wedge (*\Psi)$
- $*(\varphi \cdot \Phi) = \varphi * \Phi$

Die äußere oder Cartansche Ableitung

$$\mathrm{d}\ :\ \mathrm{C}^{\infty,q}(M) \longrightarrow \mathrm{C}^{\infty,q+1}(M)$$

läßt sich in einem Kartengebiet (U, h) lokal durch

$$\mathrm{d}\Phi|_U = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \sum_{j=1}^N \partial_j^h \Phi_I \,\mathrm{d}h^j \wedge \mathrm{d}h^I \qquad \text{, falls} \qquad \Phi|_U = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \Phi_I \,\mathrm{d}h^I \qquad \text{gilt,}$$

darstellen und erfüllt für $\Phi \in \mathrm{C}^{\infty,q_1}(M)$ und $\Psi \in \mathrm{C}^{\infty,q_2}(M)$

- $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0 \qquad ,$
- $\mathrm{d}(\Phi \wedge \Psi) = (\mathrm{d}\Phi) \wedge \Psi + (-1)^{q_1} \Phi \wedge (\mathrm{d}\Psi) \qquad .$

Auf 0–Formen wirkt die äußere Ableitung wie das Differential. Die Co–Ableitung wird dann durch

$$\begin{array}{cccc} \delta & : & \mathrm{C}^{\infty,q+1}(M) & \longrightarrow & \mathrm{C}^{\infty,q}(M) \\ & & \Phi & \longmapsto & (-1)^{q \cdot N} * \mathrm{d}(*\Phi) \end{array}$$

definiert.

[‡] Orthonormalbasis

Eine Abbildung $f \in \mathrm{C}^\infty(M_1, M_2)$ zweier Mannigfaltigkeiten induziert für alle q eine lineare Abbildung

$$f^* \;:\; \mathrm{A}^q(M_2) \longrightarrow \mathrm{A}^q(M_1) \qquad ,$$

indem wir punktweise für $\Phi \in \mathrm{A}^q(M_2)$ und $x \in M_1$, $y := f(x) \in M_2$ sowie $t_1, \ldots, t_q \in \mathrm{T}_x M_1$

$$(f^*\Phi)_x(t_1, \ldots, t_q) := \Phi_y\big(\mathrm{d}f(t_1), \ldots, \mathrm{d}f(t_q)\big)$$

setzen. Diese Abbildung $(\,\cdot\,)^*$ hat für alle $\varphi \in \mathrm{A}^0(M_2)$, $\Phi \in \mathrm{A}^q(M_2)$, $\Psi \in \mathrm{A}^{\tilde{q}}(M_2)$ und $\psi \in \mathrm{C}^{\infty,q}(M_2)$ die folgenden Eigenschaften:

- $f^*\varphi = \varphi \circ f$
- $f^*(\Phi \wedge \Psi) = (f^*\Phi) \wedge (f^*\Psi)$
- $\mathrm{d}f^*\psi = f^*\,\mathrm{d}\psi$

Für Teilmengen Ω des $\mathbb{R}^N$ und $\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,N}(\Omega)$ definieren wir das Integral

$$\int_\Omega \Phi := \int_\Omega \Phi_{I_N}\, d\lambda \qquad ,$$

falls Φ in kartesischen Koordinaten $\{x_n\}_{n=1}^N$ die globale Darstellung $\Phi = \Phi_{I_N}\,\mathrm{d}x^{I_N}$ mit $\mathrm{d}x^{I_N} = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^N$ besitzt. Für N–Formen $\Phi = \Phi_{I_N}\,\mathrm{d}h^{I_N} \in \mathrm{C}_0^{\infty,N}(U)$ mit einer Karte (U,h) und $\mathrm{d}h^{I_N} := \mathrm{d}h^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}h^N$ definieren wir das Integral (Dies ist unabhängig von der Kartenwahl!)

$$\int_U \Phi := \int_{h(U)} (h^{-1})^*\Phi = \int_{h(U)} \Phi_{I_N} \circ h^{-1}\, d\lambda \tag{1.27}$$

und mit Hilfe einer den Kartengebieten untergeordneten Zerlegung der Eins können wir dann für $\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,N}(M)$ das Integral $\displaystyle\int_M \Phi$ definieren.
Für orientierungserhaltende Diffeomorphismen $f \;:\; \tilde{M}_1 \longrightarrow \tilde{M}_2$ mit $\tilde{M}_j \subset M_j$ gilt der Transformationssatz, d. h. für alle $\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,N}(\overline{\tilde{M}_2})$ haben wir

$$\int_{\tilde{M}_1} f^*\Phi = \int_{\tilde{M}_2} \Phi \qquad .$$

Ist für $\tilde{M} \subset M$ der Rand $\partial\tilde{M}$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit, so gilt mit der natürlichen Inklusion $\iota : \partial\tilde{M} \hookrightarrow \tilde{M}$ der Satz von Stokes:

$$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,N-1}\left(\overline{\tilde{M}}\right)} \qquad \int_{\tilde{M}} \mathrm{d}\Phi = \int_{\partial\tilde{M}} \iota^*\Phi$$

Auf $\mathrm{A}^q(x)$ wird durch

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_q := *(\Phi \wedge *\overline{\Psi}) = \langle *\Phi, *\Psi \rangle_{N-q} \qquad \text{und} \qquad |\Phi|_q^2 := \langle \Phi, \Phi \rangle_q$$

ein Skalarprodukt und eine Norm gegeben. Desweiteren definieren wir wie im skalaren Fall auf $\mathrm{C}_0^{\infty,q}(M)$ Skalarprodukt und Norm durch

- $\displaystyle\langle \Phi, \Psi \rangle_M := \int_M *\langle \Phi, \Psi \rangle_q = \int_M \Phi \wedge *\overline{\Psi} = \langle *\Phi, *\Psi \rangle_M \qquad ,$
- $\displaystyle\|\Phi\|_{0,0,M}^2 := \langle \Phi, \Phi \rangle_M = \int_M *\langle \Phi, \Phi \rangle_q = \int_M *|\Phi|_q^2 = \int_M \Phi \wedge *\overline{\Phi}$

sowie

- $\mathrm{L}^{2,q}(M) := \overline{\mathrm{C}_0^{\infty,q}(M)} \qquad \big(\text{Abschluß in der } \|\cdot\|_{0,0,M}\text{–Norm}\big) \qquad ,$
- $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q}(M) := \big\{\Phi \in \mathrm{A}^q(M) : \varphi \cdot \Phi \in \mathrm{L}^{2,q}(M) \text{ für alle } \varphi \in \mathrm{C}_0^{\infty,0}(M)\big\} \qquad ,$
- $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q}\big(\tilde{M}\big) := \big\{\Phi \in \mathrm{A}^q(\tilde{M}) : \varphi \cdot \Phi \in \mathrm{L}^{2,q}(\tilde{M}) \text{ für alle } \varphi \in \mathrm{C}_0^{\infty,0}\big(\overline{\tilde{M}}\big)\big\} \qquad .$

Gelten $\Phi|_U = \sum\limits_{I\in\mathcal{I}(q,N)} \Phi_I \,\mathrm{d}h^I$ und $\Psi|_U = \sum\limits_{J\in\mathcal{I}(q,N)} \Psi_J \,\mathrm{d}h^J$ in einem Kartengebiet (U,h), so folgt, falls $\{\mathrm{d}h^j\}_{j=1}^N$ eine positiv orientierte ONB ist,

- $$\begin{aligned}\langle\Phi,\Psi\rangle_U &= \int_U \sum_{I,J\in\mathcal{I}(q,N)} \Phi_I\cdot\overline{\Psi}_J \;\mathrm{d}h^I \wedge *\,\mathrm{d}h^J = \int_U \sum_{I,J\in\mathcal{I}(q,N)} \Phi_I\cdot\overline{\Psi}_J\cdot\delta_{I,J}\;\mathrm{d}h^{I_N}\\ &= \int_{h(U)} \sum_{I\in\mathcal{I}(q,N)} (\Phi_I\cdot\overline{\Psi}_I)\circ h^{-1}\,d\lambda \qquad ,\end{aligned}$$
- $$\|\Phi\|_{0,0,U}^2 = \int_{h(U)} \sum_{I\in\mathcal{I}(q,N)} |\Phi_I\circ h^{-1}|^2\,d\lambda \qquad .$$

Demnach gilt in Kartengebieten: $\quad \Phi\in\mathrm{L}^{2,q}(U) \quad\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{I\in\mathcal{I}(q,N)} \Phi_I\circ h^{-1}\in\mathrm{L}^2\big(h(U)\big)$

Für $\Phi\in\mathrm{C}_0^{\infty,q}(M)$ und $\Psi\in\mathrm{C}^{\infty,q+1}(M)$, also $\Phi\wedge*\overline{\Psi}\in\mathrm{C}_0^{\infty,N-1}(M)$, haben wir

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\Phi\wedge*\overline{\Psi}) &= (\mathrm{d}\Phi)\wedge*\overline{\Psi} + (-1)^q\cdot\Phi\wedge(\mathrm{d}*\overline{\Psi})\\ &= (\mathrm{d}\Phi)\wedge*\overline{\Psi} + (-1)^q\cdot(-1)^{q\cdot(N-q)}\cdot\Phi\wedge(**\,\mathrm{d}*\overline{\Psi})\\ &= (\mathrm{d}\Phi)\wedge*\overline{\Psi} + (-1)^{q-q^2}\cdot\Phi\wedge*\delta\overline{\Psi}\\ &= *\langle\mathrm{d}\Phi,\Psi\rangle_{q+1} + *\langle\Phi,\delta\Psi\rangle_q \qquad .\end{aligned}$$

Damit liefert der Satz von Stokes

$$\langle\mathrm{d}\Phi,\Psi\rangle_M + \langle\Phi,\delta\Psi\rangle_M = 0 \qquad ,$$

d. h. d und δ sind bzgl. $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_M$ zueinander schiefadjungiert.
Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, wollen wir, um den Bezug zur elektromagnetischen Theorie anzudeuten, die äußere Ableitung d mit rot und die Co–Ableitung δ mit div bezeichnen, denn im Spezialfall $N=3$ und $q=1$ (Die Operatoren wirken also auf 1–Formen!) entsprechen diese gerade den klassischen Operatoren der Vektoranalysis

$$\operatorname{rot} v = \begin{bmatrix}\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2\\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3\\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1\end{bmatrix} \qquad\text{und}\qquad \operatorname{div} v = \sum_{n=1}^3 \partial_n v_n \qquad .$$

Für beliebige N und q gilt dann im $\mathbb{R}^N$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} = 0 \quad,\quad \operatorname{div}\operatorname{div} = 0 \quad\text{und}\quad \Delta = \operatorname{rot}\operatorname{div} + \operatorname{div}\operatorname{rot} = \mathrm{d}\delta + \delta\,\mathrm{d} \quad ,$$

wenn wir den Laplace–Operator Δ auf q–Formen in kartesischen Koordinaten komponentenweise definieren.
Mittels der Schiefadjungiertheit definieren wir für $(E,H)\in\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q}(M)\times\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q+1}(M)$:

- $\operatorname{rot} E = G\in\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q+1}(M) \quad :\Leftrightarrow \quad \bigwedge\limits_{\Phi\in\mathrm{C}_0^{\infty,q+1}(M)} \langle E,\operatorname{div}\Phi\rangle_M = -\langle G,\Phi\rangle_M$
- $\operatorname{div} H = F\in\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q}(M) \quad :\Leftrightarrow \quad \bigwedge\limits_{\Phi\in\mathrm{C}_0^{\infty,q}(M)} \langle H,\operatorname{rot}\Phi\rangle_M = -\langle F,\Phi\rangle_M$

Damit definieren wir die schwachen Rotations– bzw. Divergenzräume

- $\mathrm{R}_{\mathrm{loc}}^q(M) := \big\{E\in\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q}(M) : \operatorname{rot} E\in\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q+1}(M)\big\}$,
- $\mathrm{R}^q(M) := \big\{E\in\mathrm{L}^{2,q}(M) : \operatorname{rot} E\in\mathrm{L}^{2,q+1}(M)\big\}$,
- ${}_0\mathrm{R}_{\mathrm{loc}}^q(M) := \big\{E\in\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q}(M) : \operatorname{rot} E = 0\big\}$,
- ${}_0\mathrm{R}^q(M) := \big\{E\in\mathrm{L}^{2,q}(M) : \operatorname{rot} E = 0\big\}$

bzw.

- $\mathrm{D}_{\mathrm{loc}}^{q+1}(M) := \big\{H\in\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q+1}(M) : \operatorname{div} H\in\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q}(M)\big\} = *\mathrm{R}_{\mathrm{loc}}^{N-q-1}(M)$,
- $\mathrm{D}^{q+1}(M) := \big\{H\in\mathrm{L}^{2,q+1}(M) : \operatorname{div} H\in\mathrm{L}^{2,q}(M)\big\} = *\mathrm{R}^{N-q-1}(M)$,
- ${}_0\mathrm{D}_{\mathrm{loc}}^{q+1}(M) := \big\{H\in\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{2,q+1}(M) : \operatorname{div} H = 0\big\} = *{}_0\mathrm{R}_{\mathrm{loc}}^{N-q-1}(M)$,
- ${}_0\mathrm{D}^{q+1}(M) := \big\{H\in\mathrm{L}^{2,q+1}(M) : \operatorname{div} H = 0\big\} = *{}_0\mathrm{R}^{N-q-1}(M)$.

Wir verallgemeinern die klassische Randbedingung

$$\iota^* E = 0 \qquad , \qquad \iota : \partial M \hookrightarrow M \qquad , \tag{1.28}$$

in dem Raum

$$\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M) := \Big\{ E \in \mathrm{R}^q(M) : \bigwedge_{H \in \mathrm{D}^{q+1}(M)} \langle \operatorname{rot} E, H \rangle_M = -\langle E, \operatorname{div} H \rangle_M \Big\} \qquad ,$$

denn für C^∞–Formen (E, H) folgt (1.28) aus der variationellen Formulierung mit dem Satz von Stokes. Im klassischen Fall der elektromagnetischen Theorie, d. h. $N = 3$, $q = 1, 2$ und $M \subset \mathbb{R}^3$ ein C^1–Gebiet, ist $\iota^* E = 0$ für 1–Formen E die klassische elektrische Randbedingung der Totalreflexion, $\nu \wedge E = 0$ an ∂M, und für 2–Formen E die klassische magnetische Randbedingung, $\nu \cdot E = 0$ an ∂M. Hierbei seien ν die äußere Normale an ∂M und $\wedge$ bzw. $\cdot$ das Wedge– bzw. Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$.
Analog läßt sich die Randbedingung $\iota^* * H = 0$ in dem Raum

$$\overset{\circ}{\mathrm{D}}{}^{q+1}(M) := \Big\{ H \in \mathrm{D}^{q+1}(M) : \bigwedge_{E \in \mathrm{R}^q(M)} \langle \operatorname{rot} E, H \rangle_M = -\langle E, \operatorname{div} H \rangle_M \Big\} = * \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{N-q-1}(M)$$

verallgemeinern.
${}_0\mathrm{R}^q(M)$, $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M)$ und damit auch

$${}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M) := {}_0\mathrm{R}^q(M) \cap \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M)$$

bzw. ${}_0\mathrm{D}^{q+1}(M)$ sind abgeschlossene Unterräume von $\mathrm{R}^q(M)$ bzw. $\mathrm{D}^{q+1}(M)$ und all diese sind mit ihren natürlichen Skalarprodukten Hilbert–Räume.
Eine etwas elegantere Definition wäre wie folgt zu erlangen: Sei

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ROT} \ : & \mathrm{C}_0^{\infty,q}(M) \subset \mathrm{L}^{2,q}(M) & \longrightarrow & \mathrm{L}^{2,q+1}(M) \\ & E & \longmapsto & \operatorname{rot} E \end{array} \quad .$$

Dann gilt für den Abschluß und Adjungierten (Wir bezeichnen den Abschluß bzw. Adjungierten eines Operators T mit $\overline{T}$ bzw. T^*)

- $D\big(\overline{\mathrm{ROT}}\big) = \overline{\mathrm{C}_0^{\infty,q}(M)} = \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(M) \qquad \big(\text{Abschluß in der } \|\cdot\|_{\mathrm{ROT}}\text{–Norm}\big) \qquad ,$
- $D(\mathrm{ROT}^*) = \mathrm{D}^{q+1}(M) \qquad .$

Für $E \in \mathrm{R}^q(\tilde{M})$, $H \in \mathrm{D}^{q+1}(\tilde{M})$ und $\varphi \in \mathrm{C}^{\infty,0}\big(\overline{\tilde{M}}\big)$ gelten $\varphi \cdot E \in \mathrm{R}^q(\tilde{M})$ und $\varphi \cdot H \in \mathrm{D}^{q+1}(\tilde{M})$ sowie

- $\operatorname{rot}(\varphi \cdot E) = \varphi \cdot \operatorname{rot} E + \operatorname{rot} \varphi \wedge E \qquad ,$
- $\operatorname{div}(\varphi \cdot H) = \varphi \cdot \operatorname{div} E + (-1)^{q \cdot N} * (\operatorname{rot} \varphi \wedge *E) \qquad .$

Außerdem bleibt die Randbedingungen erhalten, d. h. $E \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\tilde{M})$ zieht

$$\varphi \cdot E \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\tilde{M})$$

nach sich.

Spezialisieren wir uns nun auf ein Außengebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, d. h. $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ sei kompakt. Im $\mathbb{R}^N$ seien

$$A(r) := \mathbb{R}^N \setminus K(0, r) \qquad \text{und} \qquad Z(r, R) := A(r) \cap U(0, R) \qquad ,$$

falls $r < R$ gilt. Mit (Ω, Id) steht uns hier eine globale Karte zur Verfügung und Ω ist auf natürliche Weise eine glatte N–dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die kartesischen Koordinaten $\{x_i\}_{i=1}^N$ liefern für jedes x eine ONB $\{\mathrm{d}x^i\}_{i=1}^N$ von $\mathrm{A}^1(x)$ und wir können jedes $E \in \mathrm{A}^q(\Omega)$ global durch

$$E = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} E_I \, \mathrm{d}x^I$$

darstellen. Wir definieren komponentenweise die schwachen Ableitungen

$$\partial^\alpha E := \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \partial^\alpha E_I \, \mathrm{d}x^I$$

und für $m \in \mathbb{N}_0$ sowie $s \in \mathbb{R}$ die gewichteten Sobolev–Räume

- $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) := \mathrm{H}^{0,q}_s(\Omega) = \overline{\mathrm{C}^{\infty,q}_0(\Omega)}$ $\big($Abschluß in der $\|\cdot\|_{0,s,\Omega}$–Norm$\big)$
  $= \big\{E \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \rho^s E \in \mathrm{L}^{2,q}(\Omega)\big\}$,
- $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \big\{E \in \mathrm{L}^{2,q}_0(\Omega) : \operatorname{supp} E \text{ ist kompakt}\big\}$,
- $\mathrm{H}^{m,q}_s(\Omega) := \big\{E \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) : \partial^\alpha E \in \mathrm{L}^{2,q}_{s+|\alpha|}(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \le m\big\}$,
- $\mathbf{H}^{m,q}_s(\Omega) := \big\{E \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) : \partial^\alpha E \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \le m\big\}$

mit den entsprechenden Normen

- $\|\cdot\|_{0,s,\Omega} := \|\rho^s \cdot\|_{0,0,\Omega}$,
- $\|\cdot\|^2_{m,s,\Omega} := \sum\limits_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha \cdot\|^2_{0,s+|\alpha|,\Omega}$,
- $|\!|\!|\cdot|\!|\!|^2_{m,s,\Omega} := \sum\limits_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha \cdot\|^2_{0,s,\Omega}$.

Desweiteren seien

- $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^{m,q}_s(\Omega) := \overline{\mathrm{C}^{\infty,q}_0(\Omega)}$, $\big($Abschluß in der $\|\cdot\|_{m,s,\Omega}$–Norm$\big)$
- $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{m,q}_s(\Omega) := \overline{\mathrm{C}^{\infty,q}_0(\Omega)}$, $\big($Abschluß in der $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{m,s,\Omega}$–Norm$\big)$
- $\mathrm{H}^{m,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \big\{E \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \partial^\alpha E \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \le m\big\}$,
- $\mathrm{H}^{m,q}_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \big\{E \in \mathrm{H}^{m,q}_0(\Omega) : \operatorname{supp} E \text{ ist kompakt}\big\}$.

Wie schon bei den skalaren Sobolev–Räumen in (1.23) lassen wir das Gewicht Null oft weg. So definieren wir z. B. $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{m,q}(\Omega) := \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{m,q}_0(\Omega)$. Desweiteren gilt (1.24) ebenso für die q–Sobolev–Räume.
Weiterhin benötigen wir noch gewichtete Rotations– bzw. Divergenzräume

- $\mathbf{R}^q_s(\Omega) := \big\{E \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) : \operatorname{rot} E \in \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)\big\}$,
- $\mathrm{R}^q_s(\Omega) := \big\{E \in \mathbf{R}^q_s(\Omega) : \operatorname{rot} E \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{s+1}(\Omega)\big\}$,
- $\mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \big\{E \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \operatorname{rot} E \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\big\}$,
- $\mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) := \Big\{E \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \bigwedge\limits_{\varphi \in \mathrm{C}^{\infty,0}_0(\mathbb{R}^N)} \varphi \cdot E \in \mathrm{R}^q_0(\Omega)\Big\}$,
- $\mathrm{R}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \big\{E \in \mathrm{R}^q_0(\Omega) : \operatorname{supp} E \text{ ist kompakt}\big\}$,
- $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \Big\{E \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \bigwedge\limits_{\varphi \in \mathrm{C}^{\infty,0}_0(\mathbb{R}^N)} \varphi \cdot E \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_0(\Omega)\Big\}$,
- $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_s(\Omega) := \mathrm{R}^q_s(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,
- $\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_s(\Omega) := \mathbf{R}^q_s(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,
- $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \mathrm{R}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

bzw.

- $\mathbf{D}^{q+1}_s(\Omega) := \big\{H \in \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) : \operatorname{div} H \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)\big\} = *\mathbf{R}^{N-q-1}_s(\Omega)$,
- $\mathrm{D}^{q+1}_s(\Omega) := \big\{H \in \mathbf{D}^{q+1}_s(\Omega) : \operatorname{div} H \in \mathrm{L}^{2,q}_{s+1}(\Omega)\big\} = *\mathrm{R}^{N-q-1}_s(\Omega)$,
- $\mathrm{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \big\{H \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \operatorname{div} H \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\big\} = *\mathrm{R}^{N-q-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,
- $\mathrm{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) := \Big\{H \in \mathrm{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \bigwedge\limits_{\varphi \in \mathrm{C}^{\infty,0}_0(\mathbb{R}^N)} \varphi \cdot H \in \mathrm{D}^{q+1}_0(\Omega)\Big\} = *\mathrm{R}^{N-q-1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$,
- $\mathrm{D}^{q+1}_{\mathrm{vox}}(\Omega) := \big\{H \in \mathrm{D}^{q+1}_0(\Omega) : \operatorname{supp} H \text{ ist kompakt}\big\} = *\mathrm{R}^{N-q-1}_{\mathrm{vox}}(\Omega)$.

Ein Index 0 unten links soll verschwindende Rotation bzw. Divergenz bedeuten, so sind z. B.

- $${}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_s(\Omega) := \big\{ E \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_s(\Omega) : \operatorname{rot} E = 0 \big\} = {}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_s(\Omega) \qquad ,$$
- $${}_0\mathbf{D}^{q+1}_s(\Omega) := \big\{ H \in \mathbf{D}^{q+1}_s(\Omega) : \operatorname{div} H = 0 \big\} = *{}_0\mathbf{R}^{N-q-1}_s(\Omega) = {}_0\mathrm{D}^{q+1}_s(\Omega) \qquad .$$

Bei dem Gewicht $s = 0$ lassen wir die Indizierung mit Null wieder weg, so seien z. B.

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Omega) := \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_0(\Omega) \qquad \text{oder} \qquad {}_0\mathrm{D}^{q+1}(\Omega) := {}_0\mathrm{D}^{q+1}_0(\Omega) \qquad .$$

Wir bemerken noch (siehe Lemma 3.1):

- $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_s(\Omega) = \overline{\mathrm{C}^{\infty,q}_0(\Omega)}$ $\quad$ $\big($Abschluß in der $\|\cdot\|_{\mathrm{R}^q_s(\Omega)}$–Norm$\big)$
- $\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_s(\Omega) = \overline{\mathrm{C}^{\infty,q}_0(\Omega)}$ $\quad$ $\big($Abschluß in der $\|\cdot\|_{\mathbf{R}^q_s(\Omega)}$–Norm$\big)$

Sei U_s einer der oben vorgestellten gewichteten Räume. Wir definieren dann

$$\mathrm{U}_{>\hat{s}} := \bigcup_{s>\hat{s}} \mathrm{U}_s \qquad \text{und} \qquad \mathrm{U}_{<\hat{s}} := \bigcap_{s<\hat{s}} \mathrm{U}_s \qquad ,$$

so daß wir z. B.

$$\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{>1}(\Omega) = \bigcup_{s>1} \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_s(\Omega) \qquad \text{und} \qquad {}_0\mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega) = \bigcap_{s<-\frac{1}{2}} {}_0\mathbf{D}^{q+1}_s(\Omega)$$

erhalten. Beziehen sich Formenräume auf den $\mathbb{R}^N$, so lassen wir wie im skalaren Fall die Indizierung oft weg, z. B. seien

$${}_0\mathrm{R}^q_s := {}_0\mathrm{R}^q_s(\mathbb{R}^N) \qquad \text{oder} \qquad \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{m,q}_s := \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{m,q}_s(\mathbb{R}^N) \qquad .$$

Wir bezeichnen den Kommutator zweier Operatoren A und B mit

$$C_{A,B} := AB - BA \qquad .$$

Im Laufe der Arbeit betrachten wir häufig Formen–Paare, z. B. $(E, H), (e, h) \in \mathrm{C}^{\infty,q_1}_0(\Omega) \times \mathrm{C}^{\infty,q_2}_0(\Omega)$, und definieren daher für solche Paare Skalarprodukte

- $$\big\langle (E, H), (e, h) \big\rangle_{q_1,q_2} := \langle E, e \rangle_{q_1} + \langle H, h \rangle_{q_2} = \sum_{I \in \mathcal{I}(q_1,N)} E_I \cdot \overline{e}_I + \sum_{J \in \mathcal{I}(q_2,N)} H_J \cdot \overline{h}_J \qquad ,$$
- $$\big\langle (E, H), (e, h) \big\rangle_\Omega := \langle E, e \rangle_\Omega + \langle H, h \rangle_\Omega \qquad .$$

Damit sind in kanonischer Weise auch Normen auf diesen Paaren erklärt.
Leere Summen oder nicht explizit definierte Ausdrücke setzen wir stets Null.
In der elektromagnetischen Theorie treten die Dielektrizität ε und die Permeabilität μ des umgebenden Mediums auf. Deshalb definieren noch gewissen Klassen von Transformationen auf q–Formen:
Sei $\tau \geq 0$. Wir sagen $\varepsilon \in \mathrm{V}^{q,0}_\tau(\Omega)$, falls ε folgendes erfüllt:

- $\varepsilon \ : \ \Omega \ \longrightarrow \ \big\{ A \ : \ \mathrm{A}^q(\Omega) \ \longrightarrow \ \mathrm{A}^q(\Omega) : A \text{ ist linear.} \big\}$
- ε besitzt L^∞–Koeffizienten, d. h. die Matrixdarstellung bzgl. der Basis $\{\mathrm{d}x^I\}$ hat L^∞–Einträge.
- ε ist symmetrisch und gleichmäßig positiv definit, d. h.

$$\bigwedge_{E,H \in \mathrm{L}^{2,q}(\Omega)} \langle \varepsilon E, H \rangle_\Omega = \langle E, \varepsilon H \rangle_\Omega \qquad \text{und} \qquad \bigvee_{c>0} \bigwedge_{E \in \mathrm{L}^{2,q}(\Omega)} \langle \varepsilon E, E \rangle_\Omega \geq c \cdot \|E\|^2_{0,0,\Omega} \qquad .$$

- $\varepsilon = \varepsilon_0 + \hat{\varepsilon} := \varepsilon_0 \cdot \mathrm{Id} + \hat{\varepsilon}$ mit einem $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+$ und $\hat{\varepsilon} = \mathcal{O}(r^{-\tau})$ für $r \to \infty$. Im Fall $\tau = 0$ bedeutet dies lediglich, daß $\hat{\varepsilon}$ bzw. ε beschränkt sind.

Sei $\ell \in \mathbb{N}_0$. Wir sagen $\varepsilon \in \mathrm{C}^{\ell,q}(\Omega)$ bzw. $\varepsilon \in \mathrm{C}^{\ell,q}(\overline{\Omega})$, falls die Matrixdarstellung von ε aus $\mathrm{C}^{\ell}(\Omega)$– bzw. $\mathrm{C}^{\ell}(\overline{\Omega})$–Einträgen besteht und schreiben $\partial^\alpha \varepsilon$ für $|\alpha| \leq \ell$, wobei wir dies komponentenweise bzgl. der Matrixdarstellung verstehen. Wir sagen $\varepsilon \in \mathrm{V}^{q,\ell}_\tau(\Omega)$ bzw. $\varepsilon \in \mathrm{V}^{q,\ell}_\tau(\overline{\Omega})$ mit einem $\ell \in \mathbb{N}$, falls $\varepsilon \in \mathrm{V}^{q,0}_\tau(\Omega) \cap \mathrm{C}^{\ell,q}(\Omega)$ bzw. $\varepsilon \in \mathrm{V}^{q,0}_\tau(\Omega) \cap \mathrm{C}^{\ell,q}(\overline{\Omega})$ gilt und die Transformation ε für alle $|\alpha| \leq \ell$ und $r \to \infty$

$$\partial^\alpha \hat{\varepsilon} = \mathcal{O}(r^{-\tau})$$

erfüllt. Wir definieren für zwei Transformationen $(\varepsilon, \mu) = (\varepsilon_0, \mu_0) + (\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}) \in \mathrm{V}^{q,0}_\tau(\Omega) \times \mathrm{V}^{q+1,0}_\tau(\Omega)$, wie es in der Einleitung schon vorgestellt worden ist,

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \Lambda(E,H) := (\varepsilon E, \mu H) \qquad \text{für} \qquad (E,H) \in \mathrm{A}^q(\Omega) \times \mathrm{A}^{q+1}(\Omega) \tag{1.29}$$

und $\Lambda_0 := \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & \mu_0 \end{bmatrix}$ sowie $\hat{\Lambda} := \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \hat{\mu} \end{bmatrix}$. Für $(E,H) \in \mathrm{C}^{\infty,q}(\Omega) \times \mathrm{C}^{\infty,q+1}(\Omega)$ sei der formale Maxwell–Operator

$$M := \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{div} \\ \operatorname{rot} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad M(E,H) := (\operatorname{div} H, \operatorname{rot} E)$$

eingeführt und für $(E,H) \in \mathrm{A}^q(\Omega) \times \mathrm{A}^{q+1}(\Omega)$ setzen wir

$$S := \begin{bmatrix} 0 & T \\ R & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad S(E,H) := (TH, RE) \qquad .$$

Die genauen Definitionen von R, T entnehme man der Definition 2.1 oder [51].
Wir wollen (wie schon erwähnt) in dieser Arbeit das System

$$\operatorname{div} H + \mathrm{i}\,\omega\varepsilon E = F \qquad , \qquad \operatorname{rot} E + \mathrm{i}\,\omega\mu H = G$$

oder kürzer

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E,H) = (F,G)$$

(die verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen) untersuchen. Mit einer Substitution der Form

$$\tilde{x} := \alpha x \qquad , \qquad \tilde{H} := \beta H$$

läßt sich hierbei immer

$$\varepsilon_0 = \mu_0 = 1 \qquad \text{und damit} \qquad \Lambda_0 = \mathrm{Id} \tag{1.30}$$

erzwingen. Zur Entlastung einiger Formeln und Rechnungen werden wir stets (1.30) annehmen.
Für spätere Zwecke fixieren wir hier schon eine Ausschneidefunktion $\boldsymbol{\eta}$ mit

$$\boldsymbol{\eta} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \qquad , \qquad \operatorname{supp} \boldsymbol{\eta} \subset [1,\infty) \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\eta}|_{[2,\infty)} = 1 \qquad . \tag{1.31}$$

Desweiteren fixieren wir zu $0 < r_1 < r_2 < \infty$ eine weitere Ausschneidefunktion

$$\hat{\eta}(t) := \boldsymbol{\eta}\big(1 + \frac{t - r_1}{r_2 - r_1}\big) \tag{1.32}$$

und setzen

$$\eta := \hat{\eta} \circ r \qquad . \tag{1.33}$$

Wir erhalten die folgenden Kommutatorgleichungen (siehe hierzu Bemerkung 2.2):

- $C_{\mathrm{rot},\eta} = \hat{\eta}'(r) r^{-1} R$
- $C_{\mathrm{div},\eta} = \hat{\eta}'(r) r^{-1} T$
- $C_{M,\eta} = \hat{\eta}'(r) r^{-1} S$

Nach $\big[$[50], Lemma 2 (i)$\big]$ kann man für jedes $\hat{j} \in \mathbb{N}_0$ die Ausschneidefunktion $\hat{\eta}$ (bzw. $\boldsymbol{\eta}$) so wählen, daß

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\eta}'(r)\, r^j \, dr = \delta_{0,j} \qquad \text{für} \qquad -\hat{j} \leq j \leq \hat{j} \tag{1.34}$$

gilt.

2 Bekanntes

Wir stellen einige Ergebnisse zusammen, welche wir im Laufe dieser Arbeit intensiv benutzen werden. Diese stammen hauptsächlich von WECK und WITSCH aus [51] und von PICARD aus [27] und [34]. Zunächst zu den

2.1 Polarkoordinaten

Wir wollen die wesentlichen Resultate aus [51] zitieren. Ziel ist die Entwicklung eines Kalküls, welcher die Rechnung in Polarkoordinaten für q–Formen bereitstellt.
Sei dazu $S \subset S^{N-1}$ mit einer orthogonalen Karte bzw. Parametrisierung

$$\begin{array}{rcccc} u & : & S & \longrightarrow & \Xi \subset \mathbb{R}^{N-1} \\ & & \xi & \longmapsto & u(\xi) \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{rcccc} \psi := u^{-1} & : & \Xi & \longrightarrow & S \\ & & u & \longmapsto & \psi(u) = \xi \end{array} \quad .$$

Orthogonal heiße in diesem Zusammenhang, daß für

$$\Psi := \big[\psi, J_\psi\big]$$

(J bezeichne hier die Jacobi–Matrix.) die Beziehung

$${}^t\Psi \cdot \Psi = \operatorname{diag}(\hat{\alpha}_0^2, \ldots, \hat{\alpha}_{N-1}^2)$$

gilt. Die Bedingungen

$$|\psi|^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad \sum_{\ell=1}^{N} \partial_{u_i}\psi_\ell \cdot \partial_{u_j}\psi_\ell = \hat{\alpha}_i^2 \cdot \delta_{i,j} \qquad \text{für} \qquad i,j = 1,\ldots,N-1$$

(Kugelkoordinaten erfüllen dies!) liefern z. B. eine solche orthogonale Karte mit $\hat{\alpha}_0 = 1$.
In diesem Sinne ist also $\big\{\alpha_1 \cdot \mathrm{d}u^1, \ldots, \alpha_{N-1} \cdot \mathrm{d}u^{N-1}\big\}$ mit $\alpha_j := \hat{\alpha}_j \circ u$ eine ONB von $\mathrm{A}^1(S)$. Dann parametrisiert

$$\begin{array}{rcccc} \Phi & : & (R_1,R_2) \times \Xi & \longrightarrow & K(S) := \big\{r \cdot \xi : r \in (R_1,R_2)\,,\, \xi \in S\big\} \subset \mathbb{R}^N \\ & & (r,u) & \longmapsto & r \cdot \psi(u) \end{array}$$

den „von S aufgespannten Kegel" $K(S)$ mit der Karte

$$\begin{array}{rcccc} h := \Phi^{-1} & : & K(S) & \longrightarrow & (R_1,R_2) \times \Xi \subset \mathbb{R}^N \\ & & x & \longmapsto & (r,\tilde{u}) \end{array} \quad ,$$

wobei $\tilde{u}(x) := u(\frac{x}{|x|})$ sei. Es gilt

$$\Phi^{-1}(x) = (r,u) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \Phi(r,u) = r \cdot \psi(u) \qquad .$$

In $K(S)$ verwenden wir auch die globale Karte Id und bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^i = \mathrm{d}\,\Phi_i(r,u) &= \partial_r \Phi_i(r,u) \cdot \mathrm{d}r + \sum_{n=1}^{N-1} \partial_{u_n}\Phi_i(r,u) \cdot \mathrm{d}\tilde{u}^n \\ &= J_{\Phi_i}(r,u) \begin{bmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\tilde{u}^1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\tilde{u}^{N-1} \end{bmatrix} = \left[J_\Phi(r,u) \begin{bmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\tilde{u}^1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\tilde{u}^{N-1} \end{bmatrix}\right]_i \end{aligned}$$

Kurz liest sich dies so:

$$\mathrm{d}x = J_\Phi(r,u) \begin{bmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\tilde{u} \end{bmatrix} = \big[\psi(u), r \cdot J_\psi(u)\big] \begin{bmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\tilde{u} \end{bmatrix} = \big[\psi(u), J_\psi(u)\big] \begin{bmatrix} \mathrm{d}r \\ r \cdot \mathrm{d}\tilde{u} \end{bmatrix} =: \Psi(u) \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \vdots \\ \omega^{N-1} \end{bmatrix}$$

Wir erhalten dann punktweise $\big(\Psi := \Psi(u)\big)$:

$$\begin{aligned}\langle\omega^i,\omega^j\rangle_1 &= \big\langle(\Psi^{-1}\,\mathrm{d}x)^i,(\Psi^{-1}\,\mathrm{d}x)^j\big\rangle_1 = \sum_{k,\ell=1}^{N}\langle\Psi^{-1}_{i,k}\cdot\mathrm{d}x^k,\Psi^{-1}_{j,\ell}\cdot\mathrm{d}x^\ell\rangle_1\\ &= \sum_{k,\ell=1}^{N}\Psi^{-1}_{i,k}\cdot{}^t\Psi^{-1}_{\ell,j}\cdot\underbrace{\langle\mathrm{d}x^k,\mathrm{d}x^\ell\rangle_1}_{=\delta_{k,\ell}\ (\mathrm{ONB})} = (\Psi^{-1}\cdot{}^t\Psi^{-1})_{i,j} = \big(({}^t\Psi\cdot\Psi)^{-1}\big)_{i,j} = \hat{\alpha}_i^{-2}\cdot\delta_{i,j}\end{aligned}$$

Damit ist $\big\{\tilde{\alpha}_j\cdot\omega^j\big\}_{j=0}^{N-1} = \big\{\,\mathrm{d}r,\tilde{\alpha}_1\cdot r\cdot\mathrm{d}\tilde{u}^1,\ldots,\tilde{\alpha}_{N-1}\cdot r\cdot\mathrm{d}\tilde{u}^{N-1}\big\}$ mit $\tilde{\alpha}_j := \hat{\alpha}_j\circ\tilde{u}$ eine ONB von $\mathrm{A}^1\big(K(S)\big)$. Es gilt $\tilde{\alpha}_0 = 1$, da $\hat{\alpha}_0^2 = |\psi|^2 = 1$!
Wir kommen zur

Definition 2.1
Wir definieren die Operatoren

- **(i)** $X(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{N} x_n\cdot\mathrm{d}x^n$,
- **(ii)** $R\ :\ \mathrm{A}^q(\mathbb{R}^N)\longrightarrow\mathrm{A}^{q+1}(\mathbb{R}^N)\,,\ \ E\longmapsto X\wedge E$,
- **(iii)** $T\ :\ \mathrm{A}^{q+1}(\mathbb{R}^N)\longrightarrow\mathrm{A}^{q}(\mathbb{R}^N)\,,\ \ H\longmapsto(-1)^{q\cdot N}*R*H$,
- **(iv)** $m\ :\ \mathrm{A}^q(\mathbb{R}^N)\longrightarrow\mathrm{A}^{q}(\mathbb{R}^N)\,,\ \ E\longmapsto r\cdot E$

und sagen E ist radial bzw. H tangential, falls $RE = 0$ bzw. $TH = 0$.

Bemerkung 2.2
Es gelten für $E\in\mathrm{A}^q(\mathbb{R}^N)$ und $H\in\mathrm{A}^{q+1}(\mathbb{R}^N)$:

- **(i)** $X = r\cdot\mathrm{d}r$
- **(ii)** $R = r\cdot\mathrm{d}r\wedge(\,\cdot\,)$ *und* $T = (-1)^{(q-1)\cdot N}*\big(X\wedge*(\,\cdot\,)\big) = (-1)^{(q-1)\cdot N}r*\big(\,\mathrm{d}r\wedge*(\,\cdot\,)\big)$
- **(iii)** $R^2 = 0\,,\,T^2 = 0$ *und* $m^2 = RT + TR$
- **(iv)** $E = r^{-2}\cdot(RTE + TRE) = \mathrm{d}r\wedge(r^{-1}\cdot TE) + r^{-2}\cdot TRE =: \mathrm{d}r\wedge E^\rho + E^\tau$,
  falls $r\neq 0$. Dabei sind E^ρ und E^τ tangential und $\mathrm{d}r\wedge E^\rho$ radial.
- **(v)** $\langle RE,H\rangle_{q+1} = \langle E,TH\rangle_q$ *und* $\langle TH,E\rangle_q = \langle H,RE\rangle_{q+1}$

Desweiteren gelten für $E\in\mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $H\in\mathrm{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ und $\varphi\in\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$:

- **(vi)** $C_{\mathrm{rot},\varphi(r)}E = \varphi'(r)r^{-1}RE$ *und* $C_{\mathrm{div},\varphi(r)}H = \varphi'(r)r^{-1}TH$
- **(vii)** $C_{M,\varphi(r)}(E,H) = \varphi'(r)r^{-1}S(E,H)$

Sei $\xi(x) := \frac{x}{|x|}$.
Mit $\tilde{\alpha}_j(x) = \hat{\alpha}_j\circ\tilde{u}(x) = \hat{\alpha}_j\circ u\circ\xi(x) = \alpha_j\circ\xi(x)$ können dann tangentiale Formen $E\in\mathrm{A}^q\big(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\big)$ lokal durch

$$E(x) = E(r\cdot\xi) = \sum_{I\in\mathcal{I}(q,N-1)} E_I(r,\xi)\cdot\tilde{\alpha}_I(x)\cdot\mathrm{d}\tilde{u}^I = \sum_{I\in\mathcal{I}(q,N-1)} E_I(r,\xi)\cdot\alpha_I(\xi)\cdot\mathrm{d}\tilde{u}^I$$

mit $\hat{\alpha}_I := \displaystyle\prod_{n=1}^{q}\hat{\alpha}_{i_n}$, falls $I = (i_1,\ldots,i_q)$ ist, dargestellt werden. Für $E\in\mathrm{A}^q\big(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\big)$ mit

$$\begin{aligned}E(x) &= E(r\cdot\xi) = \mathrm{d}r\wedge E^\rho(r\cdot\xi) + E^\tau(r\cdot\xi)\\ &= \mathrm{d}r\wedge\sum_{I\in\mathcal{I}(q-1,N-1)} E_I^\rho(r,\xi)\cdot\tilde{\alpha}_I(x)\cdot\mathrm{d}\tilde{u}^I + \sum_{I\in\mathcal{I}(q,N-1)} E_I^\tau(r,\xi)\cdot\tilde{\alpha}_I(x)\cdot\mathrm{d}\tilde{u}^I\end{aligned}$$

werden durch die lokalen Vorschriften

- $\big(\rho E(r)\big)(\xi) := r^{-(q-1)}\cdot\displaystyle\sum_{I\in\mathcal{I}(q-1,N-1)} E_I^\rho(r,\xi)\cdot\alpha_I(\xi)\cdot\mathrm{d}u^I$,

- $\big(\tau E(r)\big)(\xi) := r^{-q} \cdot \sum_{I\in\mathcal{I}(q,N-1)} E_I^\tau(r,\xi)\cdot\alpha_I(\xi)\cdot \mathrm{d}u^I$

zwei Abbildungen

$$\rho : \mathrm{A}^q\big(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\big) \longrightarrow F\big(\mathbb{R}_+, \mathrm{A}^{q-1}(S^{N-1})\big) \qquad \text{und} \qquad \tau : \mathrm{A}^q\big(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\big) \longrightarrow F\big(\mathbb{R}_+, \mathrm{A}^{q}(S^{N-1})\big)$$

mit Rechtsinversen

$$\check\rho : F\big(\mathbb{R}_+, \mathrm{A}^{q-1}(S^{N-1})\big) \longrightarrow \mathrm{A}^q\big(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\big) \qquad \text{und} \qquad \check\tau : F\big(\mathbb{R}_+, \mathrm{A}^{q}(S^{N-1})\big) \longrightarrow \mathrm{A}^q\big(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\big)$$

erklärt. Für

- $\big(e(r)\big)(\xi) := \sum_{I\in\mathcal{I}(q-1,N-1)} e_I(r,\xi)\cdot\alpha_I(\xi)\cdot \mathrm{d}u^I \qquad ,$
- $\big(h(r)\big)(\xi) := \sum_{I\in\mathcal{I}(q,N-1)} h_I(r,\xi)\cdot\alpha_I(\xi)\cdot \mathrm{d}u^I$

gelten dann

- $\check\rho e(x) \;= \check\rho e(r\cdot\xi) = r^{q-1}\cdot \mathrm{d}r\wedge \sum_{I\in\mathcal{I}(q-1,N-1)} e_I(r,\xi)\cdot\tilde\alpha_I(x)\cdot \mathrm{d}\tilde u^I \qquad ,$
- $\check\tau h(x) \;= \check\tau h(r\cdot\xi) = r^{q}\cdot \sum_{I\in\mathcal{I}(q,N-1)} h_I(r,\xi)\cdot\tilde\alpha_I(x)\cdot \mathrm{d}\tilde u^I \qquad .$

Wir halten einige Eigenschaften dieser Abbildungen fest.

Bemerkung 2.3
Wir bezeichnen den Hodgeschen Sternoperator auf der Einheitssphäre S^{N-1} mit $\circledast$.
Dann gelten für $q, \tilde q \in \{0,\dots,N\}$ und $E\in \mathrm{A}^q(\mathbb{R}^N)$ sowie $H\in \mathrm{A}^{\tilde q}(\mathbb{R}^N)$:

(i) $\rho\check\rho = \mathrm{Id}$ *auf* $F\big(\mathbb{R}_+, \mathrm{A}^{q-1}(S^{N-1})\big)$

(i′) $\tau\check\tau = \mathrm{Id}$ *auf* $F\big(\mathbb{R}_+, \mathrm{A}^{q}(S^{N-1})\big)$

(ii) $\check\rho\rho + \check\tau\tau = \mathrm{Id}$ *auf* $\mathrm{A}^q\big(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\big)$

(iii) $\tau\check\rho = 0$

(iii′) $\rho\check\tau = 0$

(iv) $\mathrm{d}r\wedge\check\tau = \check\rho$ *und* $\mathrm{d}r\wedge\check\rho = 0$

(iv′) $\rho\,\mathrm{d}r\wedge\,\cdot\, = \tau$ *und* $\tau\,\mathrm{d}r\wedge\,\cdot\, = 0$

(v) $\rho E = \rho(\mathrm{d}r\wedge E^\rho) = \tau E^\rho$ *und* $\rho E^\tau = 0$

(v′) $\tau E = \tau E^\tau = \rho(\mathrm{d}r\wedge E^\tau)$ *und* $\tau(\mathrm{d}r\wedge E^\rho) = 0$

(vi) $\big\langle \check\tau\tau E(x), \check\rho\rho H(x)\big\rangle_q = 0$ *, falls* $q=\tilde q$ *, und damit auch*

(vi′) $\big\langle \check\tau\tau E, \check\rho\rho H\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}^N} *\big\langle \check\tau\tau E(x), \check\rho\rho H(x)\big\rangle_q = 0$ *, falls das Integral existiert*

(vii) $\tau(E\wedge H) = (\tau E)\wedge(\tau H)$

(vii′) $\rho(E\wedge H) = (\rho E)\wedge(\tau H) + (-1)^q\cdot(\tau E)\wedge(\rho H)$

(viii) $\tau * E = \circledast\tau E^\rho = \circledast\rho E$ *und* $\rho * E = (-1)^q\cdot\circledast\rho(\mathrm{d}r\wedge E^\tau) = (-1)^q\cdot\circledast\tau E$ *, d. h.*

(viii′) $\tau * = \circledast\rho$ *und* $\rho * = (-1)^q\cdot\circledast\tau$

(ix) $*\check\tau = (-1)^q\cdot\check\rho\circledast$ *und* $*\check\rho = \check\tau\circledast$

(x) $\big|E(x)\big|_q^2 = \big|\,\mathrm{d}r\wedge E^\rho(x)\big|_q^2 + \big|E^\tau(x)\big|_q^2$

(x′) $\big|\,\mathrm{d}r\wedge E^\rho(x)\big|_q^2 = \big|\rho E(r)(\xi)\big|_{q-1}^2$ *und* $\big|E^\tau(x)\big|_q^2 = \big|\tau E(r)(\xi)\big|_q^2$

Das nächste Lemma ermöglicht die Integration in Polarkoordinaten.

Lemma 2.4
Für meßbare $E \in \mathrm{A}^q\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big)$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $E \in \mathrm{L}^{2,q}(\mathbb{R}^N)$

(ii) $\check{\rho}\rho E, \check{\tau}\tau E \in \mathrm{L}^{2,q}(\mathbb{R}^N)$

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} r^{N-1} \cdot \Big(\big\|\rho E(r)\big\|^2_{0,0,S^{N-1}} + \big\|\tau E(r)\big\|^2_{0,0,S^{N-1}} \Big)\, dr < \infty$

Seien $E, F \in \mathrm{L}^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ *und p. f. ü.*

$$\langle E, F\rangle_{(r)} := \big\langle \rho E(r), \rho F(r)\big\rangle_{S^{N-1}} + \big\langle \tau E(r), \tau F(r)\big\rangle_{S^{N-1}}$$

erklärt. Dann gilt

$$\langle E, F\rangle_{\mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}_+} r^{N-1} \cdot \langle E, F\rangle_{(r)}\, dr \qquad .$$

Nun können wir uns daran machen, den Kalkül zu entwickeln. Sei $A \ :\ \mathrm{A}^q\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big) \ \longrightarrow\ \mathrm{A}^{\tilde{q}}\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big)$ ein Operator. Wir schreiben dann formal

$$A = (\check{\rho}\rho + \check{\tau}\tau) \circ A \circ (\check{\rho}\rho + \check{\tau}\tau) = [\check{\rho}\ \ \check{\tau}] \cdot \begin{bmatrix} \rho A \check{\rho} & \rho A \check{\tau} \\ \tau A \check{\rho} & \tau A \check{\tau} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho\, \cdot \\ \tau\, \cdot \end{bmatrix} =: [\check{\rho}\ \ \check{\tau}] \cdot \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \rho\, \cdot \\ \tau\, \cdot \end{bmatrix}$$

und nennen $\tilde{A}$ die „Darstellung von A in sphärischen Koordinaten". Diese erfüllt $\widetilde{A_1 \circ A_2} = \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2$ (Matrixprodukt!). Wir bezeichnen die äußere Ableitung auf der Einheitssphäre mit Rot, die Co–Ableitung mit $\mathrm{Div} = \pm \circledast \mathrm{Rot} \circledast$ und den Beltrami–Operator mit $\mathrm{B} := \mathrm{Rot}\,\mathrm{Div} + \mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}$. M sei die Multiplikation mit und D die Differentiation nach r, d. h.

$$\mathrm{M}\, E(r) := r \cdot E(r) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{D}\, E(r) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} E(r) \qquad .$$

Natürlich kommutieren M und D mit $\circledast$, Rot, Div und B.
Wir notieren ein paar Darstellungen in sphärischen Koordinaten (Hierbei wirken die Operatoren im $\mathbb{R}^N$ stets auf q–Formen!):

- $$\widetilde{\mathrm{rot}} = \begin{bmatrix} -\mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{Rot} & \mathrm{M}^{-q}\,\mathrm{D}\,\mathrm{M}^q \\ 0 & \mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{Rot} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$
- $$\widetilde{*} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^q \circledast \\ \circledast & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$
- $$\widetilde{\mathrm{div}} = \begin{bmatrix} -\mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{Div} & 0 \\ \mathrm{M}^{-q'}\,\mathrm{D}\,\mathrm{M}^{q'} & \mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{Div} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$
- $$\widetilde{\mathrm{rot}\,\mathrm{div}} = \begin{bmatrix} \mathrm{M}^{-2}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{Div} + \mathrm{R}_1 & \mathrm{M}^{-q+1}\,\mathrm{D}\,\mathrm{M}^{q-2}\,\mathrm{Div} \\ \mathrm{M}^{-q'-1}\,\mathrm{D}\,\mathrm{M}^{q'}\,\mathrm{Rot} & \mathrm{M}^{-2}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{Div} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$
- $$\widetilde{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}} = \begin{bmatrix} \mathrm{M}^{-2}\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot} & -\mathrm{M}^{-q-1}\,\mathrm{D}\,\mathrm{M}^q\,\mathrm{Div} \\ -\mathrm{M}^{-q'+1}\,\mathrm{D}\,\mathrm{M}^{q'-2}\,\mathrm{Rot} & \mathrm{M}^{-2}\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot} + \mathrm{R}_2 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$
- $$\widetilde{\Delta} = \mathrm{M}^{-2} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{B} + \mathrm{M}^2\,\mathrm{R}_1 & -2\,\mathrm{Div} \\ 2\,\mathrm{Rot} & \mathrm{B} + \mathrm{M}^2\,\mathrm{R}_2 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$
- $$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{M} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$
- $$\widetilde{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{M} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$
- $$\widetilde{RT} = \begin{bmatrix} \mathrm{M}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$
- $$\widetilde{TR} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{M}^2 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Hier und im folgenden seien $q' := N - q$ und

- $$\mathrm{R}_1 := \mathrm{M}^{-q+1}\,\mathrm{D}\,\mathrm{M}^{q-q'-1}\,\mathrm{D}\,\mathrm{M}^{q'} = q' \cdot (q-2) \cdot \mathrm{M}^{-2} + (N-1) \cdot \mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{D} + \mathrm{D}^2 \quad , \tag{2.11}$$
- $$\mathrm{R}_2 := \mathrm{M}^{-q'+1}\,\mathrm{D}\,\mathrm{M}^{q'-q-1}\,\mathrm{D}\,\mathrm{M}^{q} = q \cdot (q'-2) \cdot \mathrm{M}^{-2} + (N-1) \cdot \mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{D} + \mathrm{D}^2 \quad . \tag{2.12}$$

Wir nennen eine q–Form σ–homogen, wenn die Komponenten ihrer kartesischen Darstellung σ–homogene Funktionen sind. Auf solchen σ–homogenen q–Formen vereinfachen sich die obigen Darstellungen zu

- $$\widetilde{\mathrm{rot}} = \mathrm{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -\mathrm{Rot} & q+\sigma \\ 0 & \mathrm{Rot} \end{bmatrix} \quad , \tag{2.13}$$
- $$\widetilde{\mathrm{div}} = \mathrm{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -\mathrm{Div} & 0 \\ q'+\sigma & \mathrm{Div} \end{bmatrix} \quad , \tag{2.14}$$
- $$\widetilde{\mathrm{rot}\,\mathrm{div}} = \mathrm{M}^{-2} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{Rot}\,\mathrm{Div} + \alpha_1(\sigma) & (\sigma+q-2) \cdot \mathrm{Div} \\ (\sigma+q') \cdot \mathrm{Rot} & \mathrm{Rot}\,\mathrm{Div} \end{bmatrix} \quad , \tag{2.15}$$
- $$\widetilde{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}} = \mathrm{M}^{-2} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{Div}\,\mathrm{Rot} & -(\sigma+q) \cdot \mathrm{Div} \\ (\sigma+q'-2) \cdot \mathrm{Rot} & \mathrm{Div}\,\mathrm{Rot} + \alpha_2(\sigma) \end{bmatrix} \quad , \tag{2.16}$$
- $$\widetilde{\Delta} = \mathrm{M}^{-2} \begin{bmatrix} \mathrm{B} + \alpha_1(\sigma) & -2\,\mathrm{Div} \\ 2\,\mathrm{Rot} & \mathrm{B} + \alpha_2(\sigma) \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

mit $\alpha_1(\sigma) := \alpha_1(\sigma, q, N) := (\sigma + q') \cdot (\sigma + q - 2)$ und $\alpha_2(\sigma) := \alpha_2(\sigma, q, N) := \alpha_1(\sigma, q', N) = (\sigma + q) \cdot (\sigma + q' - 2)$. Wir werden noch für Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sofern die folgenden Operationen durchführbar sind, die Kommutatoren

- $C_{\mathrm{rot},\varphi} := C_{\mathrm{rot},\varphi(m)} = \mathrm{rot}\,\varphi(m) - \varphi(m) \cdot \mathrm{rot} \quad ,$
- $C_{\mathrm{div},\varphi} := C_{\mathrm{div},\varphi(m)} = \mathrm{div}\,\varphi(m) - \varphi(m) \cdot \mathrm{div} \quad ,$
- $C_{\Delta,\varphi} := C_{\Delta,\varphi(m)} = \Delta\varphi(m) - \varphi(m) \cdot \Delta = \mathrm{rot}\,C_{\mathrm{div},\varphi} + \mathrm{div}\,C_{\mathrm{rot},\varphi} + C_{\mathrm{div},\varphi}\,\mathrm{rot} + C_{\mathrm{rot},\varphi}\,\mathrm{div}$

benötigen. Diese besitzen die Darstellungen

$$\widetilde{C_{\mathrm{rot},\varphi}} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi'(\mathrm{M}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \widetilde{C_{\mathrm{div},\varphi}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varphi'(\mathrm{M}) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{C_{\Delta,\varphi}} = \begin{bmatrix} \Gamma_\varphi & 0 \\ 0 & \Gamma_\varphi \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

mit

$$\Gamma_\varphi := 2 \cdot \varphi'(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{D} + \varphi''(\mathrm{M}) + (N-1) \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \varphi'(\mathrm{M}) \quad .$$

2.2 Eigenformen auf der Einheitssphäre

Wir wollen nun als Verallgemeinerung der klassischen Kugelflächenfunktionen Eigenformen des Beltrami–Operators $\mathrm{B} = \mathrm{B}_q$ einführen, wobei B_q der Abschluß von

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{B} : & \mathrm{C}^{\infty,q}(S^{N-1}) \subset \mathrm{L}^{2,q}(S^{N-1}) & \longrightarrow & \mathrm{L}^{2,q}(S^{N-1}) \\ & \Phi & \longmapsto & (\mathrm{Rot}\,\mathrm{Div} + \mathrm{Div}\,\mathrm{Rot})\Phi \end{array}$$

sei. B ist negativ semidefinit, selbstadjungiert, besitzt eine kompakte Resolvente (siehe z. B. Warner, [[41], chapter 6]) und wird von der orthogonalen Zerlegung

$$\mathrm{L}^{2,q}(S^{N-1}) = {}_0\mathrm{R}^q(S^{N-1})^\perp \oplus \mathcal{H}^q(S^{N-1}) \oplus {}_0\mathrm{D}^q(S^{N-1})^\perp$$

($\oplus$ und $\perp$ sind im Sinne des $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{S^{N-1}}$–Skalarproduktes zu verstehen.) reduziert, wobei wir

$$\mathcal{H}^q(S^{N-1}) := {}_0\mathrm{R}^q(S^{N-1}) \cap {}_0\mathrm{D}^q(S^{N-1})$$

definieren. Dann ist B auf ${}_0\mathrm{R}^q(S^{N-1})^\perp \subset {}_0\mathrm{D}^q(S^{N-1})$ bzw. ${}_0\mathrm{D}^q(S^{N-1})^\perp \subset {}_0\mathrm{R}^q(S^{N-1})$ negativ definit und es gilt $N(\mathrm{B}) = \mathcal{H}^q(S^{N-1})$. Nach grundlegenden Ergebnissen der Funktionalanalysis existieren Folgen von Eigenwerten $(\lambda_j^q)_{j\in\mathbb{N}_0}$, $(\kappa_j^q)_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}_+$, von Vielfachheiten $(\nu_j^q)_{j\in\mathbb{N}_0}$, $(\mu_j^q)_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{N}$ und von orthonormalen Eigenformen

$$(T_{j,m}^q)_{j\in\mathbb{N}_0, m=1,\ldots,\nu_j^q} \quad , \quad (S_{j,m}^q)_{j\in\mathbb{N}_0, m=1,\ldots,\mu_j^q} \quad ,$$

so daß für alle definierten Kombinationen von j und m

- $(\mathrm{B}+\lambda_j^q)T_{j,m}^q = 0 \quad , \quad \operatorname{Div} T_{j,m}^q = 0 \quad , \quad T_{j,m}^q \in {}_0\mathrm{R}^q(S^{N-1})^\perp \quad ,$ (2.19)
- $(\mathrm{B}+\kappa_j^q)S_{j,m}^q = 0 \quad , \quad \operatorname{Rot} S_{j,m}^q = 0 \quad , \quad S_{j,m}^q \in {}_0\mathrm{D}^q(S^{N-1})^\perp$ (2.20)

gelten. In den Fällen $q = 0$ bzw. $q = N-1$ ist

$${}_0\mathrm{D}^0(S^{N-1})^\perp = \mathrm{L}^{2,0}(S^{N-1})^\perp = \{0\} \qquad \text{bzw.} \qquad {}_0\mathrm{R}^{N-1}(S^{N-1})^\perp = \mathrm{L}^{2,N-1}(S^{N-1})^\perp = \{0\} \quad ,$$

d. h. λ_j^{N-1} , ν_j^{N-1} , $T_{j,m}^{N-1}$ bzw. κ_j^0 , μ_j^0 , $S_{j,m}^0$ bleiben undefiniert. Der Raum $\mathcal{H}^q(S^{N-1})$ ist nur für $q = 0$ oder $q = N-1$ nicht trivial mit

$$\mathcal{H}^0(S^{N-1}) = \mathrm{Lin}\{\mathbf{1}\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{H}^{N-1}(S^{N-1}) = \mathrm{Lin}\{\circledast\,\mathbf{1}\} \quad .$$

Definieren wir in diesen Ausnahmefällen $\kappa_0^0 := 0$ bzw. $\lambda_0^{N-1} := 0$ und $\mu_0^0 := 1$ bzw. $\nu_0^{N-1} := 1$ sowie

$$S_{0,1}^0 := |S^{N-1}|^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{1} \qquad \text{bzw.} \qquad T_{0,1}^{N-1} := \circledast S_{0,1}^0 \quad ,$$

so ist für alle $q = 0, \ldots, N-1$

$$\big\{T_{j,m}^q\big\}_{j\in\mathbb{N}_0, m=1,\ldots,\nu_j^q} \cup \big\{S_{j,m}^q\big\}_{j\in\mathbb{N}_0, m=1,\ldots,\mu_j^q}$$

ein vollständiges ONS[§] (oder eine ONB) von $\mathrm{L}^{2,q}(S^{N-1})$.
Für $0 \leq q \leq N-2$ ist

$$0 \neq S := \operatorname{Rot} T_{j,m}^q \in {}_0\mathrm{D}^{q+1}(S^{N-1})^\perp$$

Eigenform von B_{q+1} zum Eigenwert λ_j^q , denn

$$\mathrm{B}_{q+1}\, S = \operatorname{Rot}\operatorname{Div}\operatorname{Rot} T_{j,m}^q = \operatorname{Rot}\mathrm{B}_q\, T_{j,m}^q = -\lambda_j^q S \quad .$$

Analog ist

$$0 \neq T := \operatorname{Div} S_{j,m}^{q+1} \in {}_0\mathrm{R}^q(S^{N-1})^\perp$$

Eigenform von B_q zum Eigenwert κ_j^{q+1} . Daher sind die Eigenwerte von B_{q+1} in ${}_0\mathrm{D}^{q+1}(S^{N-1})^\perp$ gerade die Eigenwerte von B_q in ${}_0\mathrm{R}^q(S^{N-1})^\perp$. Damit können wir die Orthonormalsysteme derart festlegen, daß sie auf S^{N-1} für $0 \leq q \leq N-2$ die Maxwellschen Eigenwertsysteme

$$(M - \mathrm{i}\,\omega_j^q)(T_{j,m}^q, S_{j,m}^{q+1}) = (0,0) \quad ,$$

d. h.

$$\operatorname{Rot} T_{j,m}^q = \mathrm{i}\,\omega_j^q \cdot S_{j,m}^{q+1} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Div} S_{j,m}^{q+1} = \mathrm{i}\,\omega_j^q \cdot T_{j,m}^q \quad , \tag{2.21}$$

mit $\omega_j^q := (\lambda_j^q)^{\frac{1}{2}} = (\kappa_j^{q+1})^{\frac{1}{2}}$ erfüllen.
Wir setzen alle $T_{j,m}^q$, $S_{j,m}^q$, λ_j^q , κ_j^q , μ_j^q und ν_j^q gleich Null, sofern sie bisher noch nicht definiert worden sind, und merken noch an:

- $\kappa_j^q = (q+j)\cdot(q'+j) \quad , \quad 1 \leq q \leq N-1$
- $\lambda_j^q = (q+1+j)\cdot(q'-1+j) \quad , \quad 0 \leq q \leq N-2$
- $\lambda_j^q = \kappa_j^{q+1} \quad , \quad 0 \leq q \leq N-2$
- $\nu_j^q = \mu_j^{q+1} \quad , \quad 0 \leq q \leq N-2$

2.3 Potentialformen

Wir nennen eine q–Form $E \in \mathrm{C}^{\infty,q}\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big)$ eine „Potentialform", falls sie $\Delta E = 0$ erfüllt. Diese werden wir im nun Folgenden klassifizieren und eine Entwicklung in elementare, σ–homogene Potentialformen angeben.
Betrachten wir die bzgl. des $\mathrm{L}^{2,q}(S^{N-1})$–ONSs

$$\big\{T_{j,m}^q\big\}_{j\in\mathbb{N}_0, m=1,\ldots,\nu_j^q} \cup \big\{S_{j,m}^q\big\}_{j\in\mathbb{N}_0, m=1,\ldots,\mu_j^q}$$

[§] Orthonormalsystem

entwickelten Fourier–Reihen des radialen bzw. tangentialen Anteils einer Potentialform E:

- $\rho E(r) = \sum_{\ell,m} U_{\ell,m}(r) \cdot S^{q-1}_{\ell,m} + \sum_{j,m} u_{j,m}(r) \cdot T^{q-1}_{j,m}$
- $\tau E(r) = \sum_{j,m} v_{j,m}(r) \cdot S^{q}_{j,m} + \sum_{k,m} V_{k,m}(r) \cdot T^{q}_{k,m}$

Wir wollen die Gleichung $\Delta E = 0$ mit Hilfe unseres sphärischen Kalküls in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Fourier–Koeffizienten übersetzen.
Zum Testen wählen wir ein beliebiges $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}_+)$ und definieren $\Phi_\ell \in \mathrm{C}^{\infty,q}_0\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big)$ für $\ell = 1, \ldots, 4$ durch

- $\Phi_1 := \check{\rho}\big(\varphi(m) \cdot S^{q-1}_{i,n}\big) = \varphi \circ r \cdot \check{\rho} S^{q-1}_{i,n}$,
- $\Phi_2 := \check{\tau}\big(\varphi(m) \cdot T^{q}_{i,n}\big) = \varphi \circ r \cdot \check{\tau} T^{q}_{i,n}$,
- $\Phi_3 := \check{\rho}\big(\varphi(m) \cdot T^{q-1}_{i,n}\big) = \varphi \circ r \cdot \check{\rho} T^{q-1}_{i,n}$,
- $\Phi_4 := \check{\tau}\big(\varphi(m) \cdot S^{q}_{i,n}\big) = \varphi \circ r \cdot \check{\tau} S^{q}_{i,n}$.

Die Gleichungen $\langle \Delta E, \Phi_\ell \rangle_{\mathbb{R}^N} = 0$ liefern dann durch partielle Integration und mit Hilfe des Kalküls sowie (2.21) und der Orthogonalität der Eigenformen das folgende System:

- $\big(\mathrm{M}^2\,\mathrm{R}_1 - \kappa^{q-1}_i\big) U_{i,n} = 0 \quad , \quad i \in \mathbb{N}_0\,,\ n = 1, \ldots, \mu^{q-1}_i \qquad (2.22)$
- $\big(\mathrm{M}^2\,\mathrm{R}_2 - \lambda^{q}_i\big) V_{i,n} = 0 \quad , \quad i \in \mathbb{N}_0\,,\ n = 1, \ldots, \nu^{q}_i \qquad (2.23)$
- $\big(\mathrm{M}^2\,\mathrm{R}_1 - \lambda^{q-1}_i\big) u_{i,n} - 2\,\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_i v_{i,n} = 0 \quad , \quad i \in \mathbb{N}_0\,,\ n = 1, \ldots, \nu^{q-1}_i \qquad (2.24)$
- $\big(\mathrm{M}^2\,\mathrm{R}_2 - \kappa^{q}_i\big) v_{i,n} + 2\,\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_i u_{i,n} = 0 \quad , \quad i \in \mathbb{N}_0\,,\ n = 1, \ldots, \mu^{q}_i \qquad (2.25)$

Die Lösungen des Systems (2.22) – (2.25) sind unabhängig von n und wir bekommen für $i \in \mathbb{N}_0$ (Im Fall $N = 2$ tritt hier eine kleine Schwierigkeit auf, die uns zu logarithmischen Termen führen würde.) das folgende Fundamentalsystem:

- $U^\pm_i := V^\pm_i := r^{\sigma^{1,\pm}_i} = r^{\sigma^{2,\pm}_i}$
- $(u^{3,\pm}_i, v^{3,\pm}_i) := r^{\sigma^{3,\pm}_i}(A_i, B_i)$
- $(u^{4,\pm}_i, v^{4,\pm}_i) := r^{\sigma^{4,\pm}_i}(B_i, A_i)$

Hierbei seien

- $\sigma^{1,+}_i := \sigma^{2,+}_i := i + 1 \quad , \quad \sigma^{1,-}_i := \sigma^{2,-}_i := -i - N + 1$,
- $\sigma^{3,+}_i := i + 2 \quad , \quad \sigma^{3,-}_i := -i - N$,
- $\sigma^{4,+}_i := i \quad , \quad \sigma^{4,-}_i := -i - N + 2$

sowie

$$A_i := \mathrm{i} \cdot (q' + i)^{\frac{1}{2}} \cdot (N + 2i)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \qquad B_i := (q + i)^{\frac{1}{2}} \cdot (N + 2i)^{-\frac{1}{2}} \qquad .$$

Mit diesen Fundamentallösungen definieren wir nun für $i \in \mathbb{N}_0$ und $n = 1, \ldots$ im sinnvollen Bereich homogene q–Potentialformen $H^{q,\ell,\pm}_{i,n}$ $(\ell = 1, \ldots, 4)$ durch:

- $\rho H^{q,1,\pm}_{i,n} := U^\pm_i \cdot S^{q-1}_{i,n} \quad , \quad \tau H^{q,1,\pm}_{i,n} := 0$
- $\rho H^{q,2,\pm}_{i,n} := 0 \quad , \quad \tau H^{q,2,\pm}_{i,n} := V^\pm_i \cdot T^{q}_{i,n}$
- $\rho H^{q,3,\pm}_{i,n} := u^{3,\pm}_i \cdot T^{q-1}_{i,n} \quad , \quad \tau H^{q,3,\pm}_{i,n} := v^{3,\pm}_i \cdot S^{q}_{i,n}$
- $\rho H^{q,4,\pm}_{i,n} := u^{4,\pm}_i \cdot T^{q-1}_{i,n} \quad , \quad \tau H^{q,4,\pm}_{i,n} := v^{4,\pm}_i \cdot S^{q}_{i,n}$

Mit den folgenden Definitionen wird der Homogenitätsgrad $\sigma^{\ell,\pm}_i$ direkt ablesbar:

- $P^{q,1}_{\sigma,m} := H^{q,1,+}_{\sigma-1,m} \quad , \quad Q^{q,1}_{\sigma,m} := H^{q,1,-}_{\sigma-1,m}$
- $P^{q,2}_{\sigma,m} := H^{q,2,+}_{\sigma-1,m} \quad , \quad Q^{q,2}_{\sigma,m} := H^{q,2,-}_{\sigma-1,m}$
- $P^{q,3}_{\sigma,m} := H^{q,3,+}_{\sigma-2,m} \quad , \quad Q^{q,3}_{\sigma,m} := H^{q,3,-}_{\sigma-2,m}$

- $P^{q,4}_{\sigma,m} := H^{q,4,+}_{\sigma,m}$, $Q^{q,4}_{\sigma,m} := H^{q,4,-}_{\sigma,m}$

Damit ergibt sich explizit:

- $P^{q,1}_{\sigma,m} = r^{\sigma} \cdot \check{\rho} S^{q-1}_{\sigma-1,m}$
- $P^{q,2}_{\sigma,m} = r^{\sigma} \cdot \check{\tau} T^{q}_{\sigma-1,m}$
- $P^{q,3}_{\sigma,m} = r^{\sigma} \cdot \big(A_{\sigma-2} \cdot \check{\rho} T^{q-1}_{\sigma-2,m} + B_{\sigma-2} \cdot \check{\tau} S^{q}_{\sigma-2,m}\big)$
- $P^{q,4}_{\sigma,m} = r^{\sigma} \cdot \big(B_{\sigma} \cdot \check{\rho} T^{q-1}_{\sigma,m} + A_{\sigma} \cdot \check{\tau} S^{q}_{\sigma,m}\big)$
- $Q^{q,1}_{\sigma,m} = r^{2-\sigma-N} \cdot \check{\rho} S^{q-1}_{\sigma-1,m}$
- $Q^{q,2}_{\sigma,m} = r^{2-\sigma-N} \cdot \check{\tau} T^{q}_{\sigma-1,m}$
- $Q^{q,3}_{\sigma,m} = r^{2-\sigma-N} \cdot \big(A_{\sigma-2} \cdot \check{\rho} T^{q-1}_{\sigma-2,m} + B_{\sigma-2} \cdot \check{\tau} S^{q}_{\sigma-2,m}\big)$
- $Q^{q,4}_{\sigma,m} = r^{2-\sigma-N} \cdot \big(B_{\sigma} \cdot \check{\rho} T^{q-1}_{\sigma,m} + A_{\sigma} \cdot \check{\tau} S^{q}_{\sigma,m}\big)$

$P^{q,k}_{\sigma,m}$ sind σ–homogene und $Q^{q,k}_{\sigma,m}$ sind $(-\sigma - N + 2)$–homogene Potentialformen, die durch die „Kelvin–Transformation"

$$Q^{q,k}_{\sigma,m} = r^{2-2\sigma-N} \cdot P^{q,k}_{\sigma,m}$$

zusammenhängen. Mit Hilfe des sphärischen Kalküls rechnen wir leicht

- $\operatorname{div} P^{q+1,1}_{\sigma+1,m} = -\,\mathrm{i}\,\gamma_1 (q' + \sigma)^{\frac{1}{2}} P^{q,4}_{\sigma,m}$,
- $\operatorname{rot} P^{q-1,2}_{\sigma+1,m} = \gamma_1 (q + \sigma)^{\frac{1}{2}} P^{q,4}_{\sigma,m}$,
- $\operatorname{div} P^{q,3}_{\sigma,m} = \mathrm{i}\,\gamma_2 (q' + \sigma - 2)^{\frac{1}{2}} P^{q-1,2}_{\sigma-1,m}$,
- $\operatorname{rot} P^{q,3}_{\sigma,m} = \gamma_2 (q + \sigma - 2)^{\frac{1}{2}} P^{q+1,1}_{\sigma-1,m}$,
- $\operatorname{div} Q^{q+1,1}_{\sigma-1,m} = -\tilde{\gamma}_1 (q + \sigma - 2)^{\frac{1}{2}} Q^{q,3}_{\sigma,m}$,
- $\operatorname{rot} Q^{q-1,2}_{\sigma-1,m} = \mathrm{i}\,\tilde{\gamma}_1 (q' + \sigma - 2)^{\frac{1}{2}} Q^{q,3}_{\sigma,m}$,
- $\operatorname{div} Q^{q,4}_{\sigma,m} = -\tilde{\gamma}_2 (q + \sigma)^{\frac{1}{2}} Q^{q-1,2}_{\sigma+1,m}$,
- $\operatorname{rot} Q^{q,4}_{\sigma,m} = -\,\mathrm{i}\,\tilde{\gamma}_2 (q' + \sigma)^{\frac{1}{2}} Q^{q+1,1}_{\sigma+1,m}$

mit $\gamma_1 := (N+2\sigma)^{\frac{1}{2}}$, $\tilde{\gamma}_1 := (N+2\sigma-4)^{\frac{1}{2}}$, $\gamma_2 := (N+2\sigma-2)(N+2\sigma-4)^{-\frac{1}{2}}$ und $\tilde{\gamma}_2 := (N+2\sigma-2)(N+2\sigma)^{-\frac{1}{2}}$ nach. Zur Verkürzung der Notation seien noch

- $\mathcal{P}^{q,k}_{\sigma} := \operatorname{Lin}\{P^{q,k}_{\sigma,m} : m = 1, \dots\}$, $\mathcal{Q}^{q,k}_{\sigma} := \operatorname{Lin}\{Q^{q,k}_{\sigma,m} : m = 1, \dots\}$, $k = 1, \dots, 4$,
- $\mathcal{P}^{q,k}_{<\sigma} := \bigoplus_{\gamma<\sigma} \mathcal{P}^{q,k}_{\gamma}$, $\mathcal{Q}^{q,k}_{<\sigma} := \bigoplus_{\gamma<\sigma} \mathcal{Q}^{q,k}_{\gamma}$, $k = 1, \dots, 4$,
- $\mathcal{P}^{q}_{\sigma} := \bigoplus_{k=1,\dots,4} \mathcal{P}^{q,k}_{\sigma}$, $\mathcal{Q}^{q}_{\sigma} := \bigoplus_{k=1,\dots,4} \mathcal{Q}^{q,k}_{\sigma}$,
- $\mathcal{P}^{q}_{<\sigma} := \bigoplus_{k=1,\dots,4} \mathcal{P}^{q,k}_{<\sigma}$, $\mathcal{Q}^{q}_{<\sigma} := \bigoplus_{k=1,\dots,4} \mathcal{Q}^{q,k}_{<\sigma}$

definiert. Die orthogonalen Summen sind im Sinne von $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{(1)}$ zu verstehen und

$$\{P^{q,k}_{\sigma,m}\}_{k=1,\dots,4,\sigma\in\mathbb{N}_0,m=1,\dots} \qquad \text{bzw.} \qquad \{Q^{q,k}_{\sigma,m}\}_{k=1,\dots,4,\sigma\in\mathbb{N}_0,m=1,\dots}$$

bilden jeweils ONSe bzgl. $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{(1)}$, d. h.

$$\langle P^{q,k}_{\sigma,m}, P^{q,\ell}_{\gamma,n} \rangle_{(1)} = \langle Q^{q,k}_{\sigma,m}, Q^{q,\ell}_{\gamma,n} \rangle_{(1)} = \langle P^{q,k}_{\sigma,m}, Q^{q,\ell}_{\gamma,n} \rangle_{(1)} = \delta_{k,\ell} \cdot \delta_{\sigma,\gamma} \cdot \delta_{m,n} \quad . \tag{2.26}$$

Wir fassen die bisher erlangten Ergebnisse zusammen und fixieren sie im

Lemma 2.5

Seien $\sigma \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \{0, \dots, N\}$. Dann ist der Raum der σ–homogenen bzw. $(-\sigma - N + 2)$–homogenen q–Potentialformen gerade

$$\mathcal{P}^{q}_{\sigma} \qquad \textit{bzw.} \qquad \mathcal{Q}^{q}_{\sigma}$$

und es gelten:

(i)	$P \in \mathcal{P}^{q,1}_{\sigma}$	$\Rightarrow$	$\operatorname{rot} P = 0$	*und*	$\tau P = 0$
(i′)	$Q \in \mathcal{Q}^{q,1}_{\sigma}$	$\Rightarrow$	$\operatorname{rot} Q = 0$	*und*	$\tau Q = 0$
(ii)	$P \in \mathcal{P}^{q,2}_{\sigma}$	$\Rightarrow$	$\operatorname{div} P = 0$	*und*	$\rho P = 0$
(ii′)	$Q \in \mathcal{Q}^{q,2}_{\sigma}$	$\Rightarrow$	$\operatorname{div} Q = 0$	*und*	$\rho Q = 0$
(iii)	$P \in \mathcal{P}^{q,4}_{\sigma}$	$\Rightarrow$	$\operatorname{rot} P = 0$	*und*	$\operatorname{div} P = 0$
(iii′)	$Q \in \mathcal{Q}^{q,3}_{\sigma}$	$\Rightarrow$	$\operatorname{rot} Q = 0$	*und*	$\operatorname{div} Q = 0$

Einige Räume verschwinden oder bestehen nur aus Vielfachen eines Elementes, nämlich:

- $\dim \mathcal{P}_0^{q,1} = 0 \quad , \quad \dim \mathcal{Q}_0^{q,1} = 0$
- $\dim \mathcal{P}_\sigma^{0,1} = 0 \quad , \quad \dim \mathcal{Q}_\sigma^{0,1} = 0$
- $\dim \mathcal{P}_\sigma^{1,1} = \delta_{1,\sigma} \quad , \quad \dim \mathcal{Q}_\sigma^{1,1} = \delta_{1,\sigma}$ *und* $\mathcal{P}_1^{1,1} = \mathrm{Lin}\{P_{1,1}^{1,1}\} = \mathrm{Lin}\{r \cdot \check{\rho} S_{0,1}^0\} = \mathrm{Lin}\{r \cdot \check{\rho}\, \mathbf{1}\} = \mathrm{Lin}\{r \cdot \mathrm{d}r\}$
  bzw. $\mathcal{Q}_1^{1,1} = \mathrm{Lin}\{Q_{1,1}^{1,1}\} = \mathrm{Lin}\{r^{1-N} \cdot \check{\rho} S_{0,1}^0\} = \mathrm{Lin}\{r^{1-N} \cdot \check{\rho}\, \mathbf{1}\} = \mathrm{Lin}\{r^{1-N} \cdot \mathrm{d}r\}$
- $\dim \mathcal{P}_0^{q,2} = 0 \quad , \quad \dim \mathcal{Q}_0^{q,2} = 0$
- $\dim \mathcal{P}_\sigma^{N,2} = 0 \quad , \quad \dim \mathcal{Q}_\sigma^{N,2} = 0$
- $\dim \mathcal{P}_\sigma^{N-1,2} = \delta_{1,\sigma} \quad , \quad \dim \mathcal{Q}_\sigma^{N-1,2} = \delta_{1,\sigma}$ *und* $\mathcal{P}_1^{N-1,2} = \mathrm{Lin}\{P_{1,1}^{N-1,2}\} = \mathrm{Lin}\{r \cdot \check{\tau}\, T_{0,1}^{N-1}\} = \mathrm{Lin}\{r \cdot \check{\tau} \circledast \mathbf{1}\} = \mathrm{Lin}\{r \cdot * \mathrm{d}r\}$
  bzw. $\mathcal{Q}_1^{N-1,2} = \mathrm{Lin}\{Q_{1,1}^{N-1,2}\} = \mathrm{Lin}\{r^{1-N} \cdot \check{\tau}\, T_{0,1}^{N-1}\} = \mathrm{Lin}\{r^{1-N} \cdot \check{\tau} \circledast \mathbf{1}\} = \mathrm{Lin}\{r^{1-N} \cdot * \mathrm{d}r\}$
- $\dim \mathcal{P}_0^{q,3} = 0 \quad , \quad \dim \mathcal{Q}_0^{q,3} = 0$
- $\dim \mathcal{P}_1^{q,3} = 0 \quad , \quad \dim \mathcal{Q}_1^{q,3} = 0$
- $\dim \mathcal{P}_\sigma^{0,3} = 0 \quad , \quad \dim \mathcal{Q}_\sigma^{0,3} = 0$
- $\dim \mathcal{P}_\sigma^{N,3} = 0 \quad , \quad \dim \mathcal{Q}_\sigma^{N,3} = 0$
- $\dim \mathcal{P}_\sigma^{0,4} = \delta_{0,\sigma} \quad , \quad \dim \mathcal{Q}_\sigma^{0,4} = \delta_{0,\sigma}$ *und* $\mathcal{P}_0^{0,4} = \mathrm{Lin}\{P_{0,1}^{0,4}\} = \mathrm{Lin}\{\check{\tau} S_{0,1}^0\} = \mathrm{Lin}\{\check{\tau}\, \mathbf{1}\} = \mathrm{Lin}\{\mathbf{1}\}$
  bzw. $\mathcal{Q}_0^{0,4} = \mathrm{Lin}\{Q_{0,1}^{0,4}\} = \mathrm{Lin}\{r^{2-N} \cdot \check{\tau} S_{0,1}^0\} = \mathrm{Lin}\{r^{2-N} \cdot \check{\tau}\, \mathbf{1}\} = \mathrm{Lin}\{r^{2-N} \cdot \mathbf{1}\}$
- $\dim \mathcal{P}_\sigma^{N,4} = \delta_{0,\sigma} \quad , \quad \dim \mathcal{Q}_\sigma^{N,4} = \delta_{0,\sigma}$ *und* $\mathcal{P}_0^{N,4} = \mathrm{Lin}\{P_{0,1}^{N,4}\} = \mathrm{Lin}\{\check{\rho}\, T_{0,1}^{N-1}\} = \mathrm{Lin}\{\check{\rho} \circledast \mathbf{1}\} = \mathrm{Lin}\{* \mathbf{1}\}$
  bzw. $\mathcal{Q}_0^{N,4} = \mathrm{Lin}\{Q_{0,1}^{N,4}\} = \mathrm{Lin}\{r^{2-N} \cdot \check{\rho}\, T_{0,1}^{N-1}\} = \mathrm{Lin}\{r^{2-N} \cdot \check{\rho} \circledast \mathbf{1}\} = \mathrm{Lin}\{r^{2-N} \cdot * \mathbf{1}\}$

Desweiteren sind

- $\mathrm{rot} : \mathcal{P}_\sigma^{q,2} \longrightarrow \mathcal{P}_{\sigma-1}^{q+1,4}$, *falls* $0 \le q \le N-1$,
- $\mathrm{rot} : \mathcal{P}_\sigma^{q,3} \longrightarrow \mathcal{P}_{\sigma-1}^{q+1,1}$, *falls* $1 \le q \le N-1$,
- $\mathrm{div} : \mathcal{P}_{\sigma+1}^{q+1,1} \longrightarrow \mathcal{P}_\sigma^{q,4}$, *falls* $0 \le q \le N-1$,
- $\mathrm{div} : \mathcal{P}_{\sigma+1}^{q+1,3} \longrightarrow \mathcal{P}_\sigma^{q,2}$, *falls* $0 \le q \le N-2$

und

- $\mathrm{rot} : \mathcal{Q}_\sigma^{q,2} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\sigma+1}^{q+1,3}$, *falls* $0 \le q \le N-2$,
- $\mathrm{rot} : \mathcal{Q}_\sigma^{q,4} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\sigma+1}^{q+1,1}$, *falls* $0 \le q \le N-1$,
- $\mathrm{div} : \mathcal{Q}_{\sigma-1}^{q+1,1} \longrightarrow \mathcal{Q}_\sigma^{q,3}$, *falls* $1 \le q \le N-1$,
- $\mathrm{div} : \mathcal{Q}_{\sigma-1}^{q+1,4} \longrightarrow \mathcal{Q}_\sigma^{q,2}$, *falls* $0 \le q \le N-1$

Isomorphismen.

Bemerkung 2.6
Wir haben hier einen kleinen Fehler aus $\big[$*[51], Theorem 2 and 3*$\big]$ *in den Bereichen für q korrigiert. So ist z. B.* $\mathrm{rot} : \mathcal{Q}_1^{N-1,2} \longrightarrow \mathcal{Q}_2^{N,3}$ *kein Isomorphismus, denn* $\mathcal{Q}_2^{N,3} = \{0\}$ *hingegen* $\mathcal{Q}_1^{N-1,2} = \mathrm{Lin}\{Q_{1,1}^{N-1,2}\} \neq \{0\}$. *Diese Ungenauigkeiten sind auch schon in [5] berichtigt worden.*

Bezüglich der Integrierbarkeit machen wir noch die

Bemerkung 2.7
Sei $s \in \mathbb{R}$.

(i) $P^{q,k}_{\sigma,m} \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\mathbb{R}^N) \quad \Leftrightarrow \quad P^{q,k}_{\sigma,m} \in \mathrm{H}^{m,q}_s(\mathbb{R}^N) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma < -s - N/2$

(ii) $s \geq -N/2 \quad \Rightarrow \quad P^{q,k}_{\sigma,m} \notin \mathrm{L}^{2,q}_s(\mathbb{R}^N)$

(iii) $P^{q,k}_{\sigma,m} \in \mathrm{L}^{2,q}\big(U(0,1)\big)$

(iv) $Q^{q,k}_{\sigma,m} \in \mathrm{L}^{2,q}_s\big(A(1)\big) \quad \Leftrightarrow \quad Q^{q,k}_{\sigma,m} \in \mathrm{H}^{m,q}_s\big(A(1)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma > 2 + s - N/2$

(v) $s < N/2 - 2 \quad \Rightarrow \quad Q^{q,k}_{\sigma,m} \in \mathrm{L}^{2,q}_s\big(A(1)\big)$

(vi) $Q^{q,k}_{\sigma,m} \notin \mathrm{L}^{2,q}\big(U(0,1)\big)$, *bis auf* $Q^{q,4}_{0,m}$ *im Fall* $N = 3$.

Wir können nun unser Entwicklungsresultat formulieren; siehe dazu auch die Resultate von Weck und Witsch in $\big[$[53], p. 1508, Theorem 1$\big]$, $\big[$[51], p. 1033$\big]$, oder von Bauer in $\big[$[5], S. 22, Satz 1$\big]$.

Satz 2.8
Seien $Z := Z(r_1, r_2)$ *mit* $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ *und* $\Phi \in \mathrm{C}^{\infty,q}(Z)$ *eine Potentialform, d. h.* $\Delta\Phi = 0$ *. Dann läßt sich* Φ *in* Z *als Reihe*

$$\Phi = \sum_{k,\sigma,m} \alpha_{k,\sigma,m} \cdot P^{q,k}_{\sigma,m} + \sum_{k,\sigma,m} \beta_{k,\sigma,m} \cdot Q^{q,k}_{\sigma,m}$$

mit $\alpha_{k,\sigma,m}, \beta_{k,\sigma,m} \in \mathbb{C}$ *darstellen. Diese Reihe konvergiert in* $\mathrm{C}^{\infty,q}(Z)$ *, d. h. gleichmäßig mitsamt allen Ableitungen in kompakten Teilmengen von* Z *. Wir können in Spezialfällen noch präzisere Aussagen machen:*

(i) *In dem Fall* $r_2 = \infty$ *und* $\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s(Z)$ *verschwinden alle* $\alpha_{k,\sigma,m}$ *mit* $\sigma \geq -s - N/2$ *und alle* $\beta_{k,\sigma,m}$ *mit* $\sigma \leq 2 + s - N/2$ *. Die Reihe konvergiert dann für alle* $\hat{r} > r_1$ *in* $Z(\hat{r}, \infty)$ *gleichmäßig mitsamt allen Ableitungen, auch nach Multiplikation mit beliebigen Polynomen in* r *. Damit konvergiert die Reihe natürlich auch in* $\mathrm{L}^{2,q}_s(Z)$ *. Im Fall* $s \geq -N/2$ *verschwinden also alle* $\alpha_{k,\sigma,m}$ *, d. h.*

$$\Phi = \sum_{k,\sigma,m} \beta_{k,\sigma,m} \cdot Q^{q,k}_{\sigma,m} \qquad .$$

(ii) *Im Fall* $r_1 = 0$ *und* $\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}(Z)$ *verschwinden alle* $\beta_{k,\sigma,m}$ *bis auf* $\beta_{4,0,m}$ *, falls* $N = 3$ *, und die Reihe konvergiert dann in* $\mathrm{C}^{\infty,q}(Z)$ *.*

(iii) *Ist* $r_2 = \infty, r_1 > 0$ *und* $\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_t(Z)$ *mit* $t \in \mathbb{R}$ *sowie*

$$\begin{aligned} \alpha_{k,\sigma,m} &= 0 \quad , \textit{ für } \quad \sigma \geq -s - N/2 \quad , \\ \beta_{k,\sigma,m} &= 0 \quad , \textit{ für } \quad \sigma \leq 2 + s - N/2 \end{aligned}$$

mit einem $t < s \in \mathbb{R}$ *, so folgt* $\Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s(Z)$ *.*

Wir erinnern an die Ausschneidefunktion $\boldsymbol{\eta}$ in (1.31) bzw. $\hat{\eta}$ in (1.32) und notieren noch eine wichtige Orthogonalitätseigenschaft im

Lemma 2.9
Seien $0 < r_1 < r_2 < \infty$ *und* η *wie in* (1.33) *sowie* $C := C_{\Delta,\eta}$ *. Dann gelten mit* $\alpha_\sigma := 2 - N - 2\sigma \leq -1 - 2\sigma \leq -1$ *:*

- $\big\langle CP^{q,k}_{\sigma,m}, P^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \big\langle CQ^{q,k}_{\sigma,m}, Q^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = 0$
- $\big\langle CQ^{q,k}_{\sigma,m}, P^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\big\langle CP^{q,k}_{\sigma,m}, Q^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \alpha_\sigma \cdot \delta_{k,\ell} \cdot \delta_{\sigma,\gamma} \cdot \delta_{m,n}$

Beweis:
Wir berechnen mit Lemma 2.4, der Darstellung von C aus (2.18) sowie den Regeln

$$\rho P^{q,k}_{\sigma,m}(r) = r^\sigma \rho P^{q,k}_{\sigma,m}(1) \qquad \text{und} \qquad \tau P^{q,k}_{\sigma,m}(r) = r^\sigma \tau P^{q,k}_{\sigma,m}(1)$$

z. B. das Skalarprodukt

- $$\begin{aligned}\big\langle CP^{q,k}_{\sigma,m}, P^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} &= \int_{\mathbb{R}_+} r^{N-1}\cdot\big\langle CP^{q,k}_{\sigma,m}, P^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{(r)}\,dr \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} r^{N-1}\cdot(\Gamma_{\hat\eta} r^{\sigma})\cdot r^{\gamma}\cdot \underbrace{\big\langle P^{q,k}_{\sigma,m}, P^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{(1)}}_{\overset{(2.26)}{=}\delta_{k,\ell}\cdot\delta_{\sigma,\gamma}\cdot\delta_{m,n}}\,dr \\ &= (\sigma-\gamma)\cdot\int_{\mathbb{R}_+} r^{N+\sigma+\gamma-2}\cdot\hat\eta'(r)\,dr\cdot\delta_{k,\ell}\cdot\delta_{\sigma,\gamma}\cdot\delta_{m,n} = 0 \qquad .\end{aligned}$$

Völlig analog erhalten wir:

- $\big\langle CQ^{q,k}_{\sigma,m}, Q^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = (\gamma-\sigma)\cdot\int_{\mathbb{R}_+} r^{-N-\sigma-\gamma+2}\cdot\hat\eta'(r)\,dr\cdot\delta_{k,\ell}\cdot\delta_{\sigma,\gamma}\cdot\delta_{m,n} = 0$
- $\big\langle CQ^{q,k}_{\sigma,m}, P^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = (2-N-2\sigma)\cdot\underbrace{\int_{\mathbb{R}_+}\hat\eta'(r)\,dr}_{=1}\cdot\delta_{k,\ell}\cdot\delta_{\sigma,\gamma}\cdot\delta_{m,n} = \alpha_\sigma\cdot\delta_{k,\ell}\cdot\delta_{\sigma,\gamma}\cdot\delta_{m,n}$
- $\big\langle CP^{q,k}_{\sigma,m}, Q^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = (-2+N+2\sigma)\cdot\delta_{k,\ell}\cdot\delta_{\sigma,\gamma}\cdot\delta_{m,n} = -\alpha_\sigma\cdot\delta_{k,\ell}\cdot\delta_{\sigma,\gamma}\cdot\delta_{m,n}$

■

2.4 Fredholm–Theorie der äußeren und Co–Ableitung

Wir definieren zunächst

$$\mathbb{I} := \big\{n+N/2 : n\in\mathbb{N}_0\big\}\cup\big\{1-n-N/2 : n\in\mathbb{N}_0\big\} \tag{2.27}$$

und zitieren aus $\big[$[51], p. 1034, Lemma 5$\big]$ das auf McOwen, [22], zurückgehende Resultat

Satz 2.10
Für alle $s\in\mathbb{R}\setminus\big(\mathbb{I}\cup\{2-N/2\}\big)$ *und* $q\in\{0,\dots,N\}$ *ist*

$$\begin{array}{rccc}\blacktriangle & : & \mathrm{H}^{2,q}_{s-2} & \longrightarrow & \mathrm{L}^{2,q}_{s} \\ & & \Phi & \longmapsto & \Delta\Phi\end{array}$$

ein Fredholm–Operator mit

- $N(\blacktriangle) = \mathcal{P}^{q}_{<-s-\frac{N}{2}+2}$,
- $W(\blacktriangle) = \Big\{F\in\mathrm{L}^{2,q}_{s} : \langle F,P\rangle_{\mathbb{R}^N} = 0 \text{ für alle } P\in\mathcal{P}^{q}_{<s-\frac{N}{2}}\Big\}$.

Insbesondere ist $\blacktriangle$ *für* $s>2-N/2$ *injektiv, für* $s<N/2$ *surjektiv und für* $2-N/2<s<N/2$ *bijektiv.*

Nun zitieren wir der Reihe nach wichtige Ergebnisse aus [51].

Lemma 2.11
Seien $q\in\{0,\dots,N\}$ *sowie* η *und* C *wie in Lemma 2.9.*

(i) *Für* $s\in\mathbb{R}$ *gilt* ${}_0\mathrm{D}^q_s\cap{}_0\mathrm{R}^q_s = \mathcal{P}^{q,4}_{<-s-\frac{N}{2}}$.

(ii) *Für* $N/2<s\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{I}$ *gilt* $\mathrm{L}^{2,q}_s = W(\blacktriangle)\dotplus C\mathcal{Q}^q_{<s-\frac{N}{2}}$.

(iii) *Mit* $\mathcal{X}^q_s := \Big\{F\in\mathrm{L}^{2,q}_s : \langle F,P\rangle_{\mathbb{R}^N} = 0 \text{ für alle } P\in\mathcal{P}^{q,4}_{<s-\frac{N}{2}}\Big\}$ *und* $\mathcal{S}^q_s := C\mathcal{Q}^{q,4}_{<s-\frac{N}{2}}$ *gelten*

- $\mathcal{X}^q_s = \operatorname{rot}\mathrm{R}^{q-1}_{s-1} + \operatorname{div}\mathrm{D}^{q+1}_{s-1}$,
- $\mathrm{L}^{2,q}_s = \mathcal{X}^q_s\dotplus\mathcal{S}^q_s$.

$\mathcal{S}^q_s$ *ist endlichdimensionaler Teilraum von* $\mathrm{C}^{\infty,q}_0\big(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\big)$.

Lemma 2.12
Seien $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$ *und* $q \in \{0, \ldots, N\}$ *. Dann gelten mit stetigen Projektoren (Satz vom abgeschlossenen Graphen) die folgenden Helmholtz–Zerlegungen:*

$$\begin{array}{rlcl}
\textbf{(i)} & s < -N/2 & \Rightarrow & \mathrm{L}_s^{2,q} = {}_0\mathrm{R}_s^q + {}_0\mathrm{D}_s^q \\
\textbf{(ii)} & -N/2 < s < N/2 & \Rightarrow & \mathrm{L}_s^{2,q} = {}_0\mathrm{R}_s^q \dotplus {}_0\mathrm{D}_s^q \\
\textbf{(iii)} & s > N/2 & \Rightarrow & \mathrm{L}_s^{2,q} = {}_0\mathrm{R}_s^q \dotplus {}_0\mathrm{D}_s^q \dotplus \mathcal{S}_s^q \\
\textbf{(iv)} & s > -N/2 & \Rightarrow & {}_0\mathrm{R}_s^0 = \{0\} \qquad \textit{und} \qquad {}_0\mathrm{D}_s^N = \{0\} \\
\textbf{(v)} & s < -N/2 & \Rightarrow & {}_0\mathrm{R}_s^0 = \mathrm{Lin}\{\mathbf{1}\} \qquad \textit{und} \qquad {}_0\mathrm{D}_s^N = \mathrm{Lin}\{*\,\mathbf{1}\}
\end{array}$$

Es gelten stets $\mathrm{L}_s^{2,0} = {}_0\mathrm{D}_s^0$ *und* $\mathrm{L}_s^{2,N} = {}_0\mathrm{R}_s^N$ *.*

Satz 2.13
Seien $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$ *und* $q \in \{0, \ldots, N-1\}$ *. Dann ist*

$$\begin{array}{rclcl}
\mathfrak{rot} & : & \mathrm{R}_{s-1}^q \cap {}_0\mathrm{D}_{s-1}^q & \longrightarrow & {}_0\mathrm{R}_s^{q+1} \\
 & & E & \longmapsto & \operatorname{rot} E
\end{array}$$

ein stetiger Fredholm–Operator mit $N(\mathfrak{rot}) = {}_0\mathrm{R}_{s-1}^q \cap {}_0\mathrm{D}_{s-1}^q = \mathcal{P}^{q,4}_{<-s-\frac{N}{2}+1}$ *und*

$$W(\mathfrak{rot}) = \Big\{ G \in {}_0\mathrm{R}_s^{q+1} : \langle G, P \rangle_{\mathbb{R}^N} = 0 \text{ für alle } P \in \mathcal{P}^{q+1,1}_{<s-\frac{N}{2}} \Big\} \qquad ,$$

außer im Fall $q = N-1$ *und* $s > N/2$ *, in dem*

$$W(\mathfrak{rot}) = \Big\{ G \in {}_0\mathrm{R}_s^N : \langle G, *\,\mathbf{1} \rangle_{\mathbb{R}^N} = 0 \text{ und } \langle G, P \rangle_{\mathbb{R}^N} = 0 \text{ für alle } P \in \mathcal{P}^{N,1}_{<s-\frac{N}{2}} \Big\}$$

gilt. Insbesondere ist $\mathfrak{rot}$ *für* $q < N-1$ *und* $s > 1 - N/2$ *,* $s < 1 + N/2$ *bzw.* $1 - N/2 < s < 1 + N/2$ *injektiv, surjektiv bzw. bijektiv.*

Das duale Resultat lautet:

Satz 2.14
Seien $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$ *und* $q \in \{0, \ldots, N-1\}$ *. Dann ist*

$$\begin{array}{rclcl}
\mathfrak{div} & : & \mathrm{D}_{s-1}^{q+1} \cap {}_0\mathrm{R}_{s-1}^{q+1} & \longrightarrow & {}_0\mathrm{D}_s^q \\
 & & E & \longmapsto & \operatorname{div} E
\end{array}$$

ein stetiger Fredholm–Operator mit $N(\mathfrak{div}) = {}_0\mathrm{D}_{s-1}^{q+1} \cap {}_0\mathrm{R}_{s-1}^{q+1} = \mathcal{P}^{q+1,4}_{<-s-\frac{N}{2}+1}$ *und*

$$W(\mathfrak{div}) = \Big\{ F \in {}_0\mathrm{D}_s^q : \langle F, P \rangle_{\mathbb{R}^N} = 0 \text{ für alle } P \in \mathcal{P}^{q,2}_{<s-\frac{N}{2}} \Big\} \qquad ,$$

außer im Fall $q = 0$ *und* $s > N/2$ *, in dem*

$$W(\mathfrak{div}) = \Big\{ F \in {}_0\mathrm{D}_s^0 : \langle F, \mathbf{1} \rangle_{\mathbb{R}^N} = 0 \text{ und } \langle F, P \rangle_{\mathbb{R}^N} = 0 \text{ für alle } P \in \mathcal{P}^{0,2}_{<s-\frac{N}{2}} \Big\}$$

gilt. Insbesondere ist $\mathfrak{div}$ *für* $q > 0$ *und* $s > 1 - N/2$ *,* $s < 1 + N/2$ *bzw.* $1 - N/2 < s < 1 + N/2$ *injektiv, surjektiv bzw. bijektiv.*

2.5 Klassische Elektro–Magneto–Statik

Wir zitieren im folgenden Resultate von Picard aus [27] .

Definition 2.15
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ein Außengebiet und* $q \in \{0, \ldots, N\}$ *. Wir definieren die „(harmonischen) Dirichlet–Formen" durch*

$$\mathcal{H}^q(\Omega) := {}_0\mathring{\mathrm{R}}^q(\Omega) \cap {}_0\mathrm{D}^q(\Omega) \qquad \textit{bzw.} \qquad \mathcal{H}^q_{-1}(\Omega) := {}_0\mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega) \cap {}_0\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) \qquad .$$

Wir erinnern an die Gewichtsfunktion $\rho := (1+r^2)^{\frac{1}{2}}$ aus dem ersten Kapitel und kommen zum

Lemma 2.16
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Außengebiet mit LMKE *(siehe Definition 4.25) und $q \in \{0,\dots,N\}$. Dann gelten:*

(i) $\mathcal{H}^q(\Omega) = \mathcal{H}^q_{-1}(\Omega)$ *ist endlichdimensional.*

(ii) *Es existiert eine Konstante $c > 0$ und ein Kompaktum $K \Subset \overline{\Omega}$, so daß für alle $E \in \mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^q_{-1}(\Omega)$ die Abschätzung*

$$\|E\|_{0,-1,\Omega} \leq c \cdot \big(\|\operatorname{rot} E\|_{0,0,\Omega} + \|\operatorname{div} E\|_{0,0,\Omega} + \|E\|_{0,0,K}\big)$$

gilt.

(iii) *Seien $d_q := \dim \mathcal{H}^q(\Omega)$ und $\{h_\ell\}_{\ell=1,\dots,d_q}$ eine Basis von $\mathcal{H}^q(\Omega)$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $E \in \mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^q_{-1}(\Omega)$ die Abschätzung*

$$\|E\|_{0,-1,\Omega} \leq c \cdot \Big(\|\operatorname{rot} E\|_{0,0,\Omega} + \|\operatorname{div} E\|_{0,0,\Omega} + \sum_{\ell=1}^{d_q} \big|\langle \rho^{-1} E, \rho^{-1} h_\ell\rangle_\Omega\big|\Big)$$

gilt.

Bemerkung 2.17
Im Fall $N = 2$ müßten wir im obigen Lemma die $\|\cdot\|_{0,-1,\Omega}$–Norm durch eine logarithmisch gewichtete Norm ersetzen.

Die Abschlüsse im folgenden Lemma sind in $\mathrm{L}^{2,\cdots}(\Omega)$ zu nehmen und $\perp_s$ bedeute Orthogonalität bzgl. des $\langle \rho^s \cdot, \rho^s \cdot\rangle_\Omega$–Skalarproduktes.

Lemma 2.18
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Außengebiet mit LMKE. *Dann gelten die folgenden $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$–orthogonalen Zerlegungen:*

(i) *Für $q \in \{0,\dots,N-1\}$ ist*
$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{rot} \mathring{\mathbf{R}}^q(\Omega)} &= \overline{\operatorname{rot} \mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega)} = \operatorname{rot} \mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega) = * \operatorname{div} \mathring{\mathrm{D}}^{N-q}_{-1}(\Omega)\\ &= \operatorname{rot}\Big(\mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega) \cap {}_0\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) \cap \mathcal{H}^q_{-1}(\Omega)^{\perp_{-1}}\Big) \quad .\end{aligned}$$

(ii) *Für $q \in \{1,\dots,N\}$ ist*
$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{div} \mathbf{D}^q(\Omega)} &= \overline{\operatorname{div} \mathrm{D}^q_{-1}(\Omega)} = \operatorname{div} \mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) = * \operatorname{rot} \mathrm{R}^{N-q}_{-1}(\Omega)\\ &= \operatorname{div}\Big(\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) \cap {}_0\mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega) \cap \mathcal{H}^q_{-1}(\Omega)^{\perp_{-1}}\Big) \quad .\end{aligned}$$

(iii) *Für $q \in \{0,\dots,N\}$ ist*
$$\begin{aligned}\mathrm{L}^{2,q}(\Omega) &= \overline{\operatorname{rot} \mathring{\mathbf{R}}^{q-1}(\Omega)} \oplus {}_0\mathrm{D}^q(\Omega) = {}_0\mathring{\mathrm{R}}^q(\Omega) \oplus \overline{\operatorname{div} \mathbf{D}^{q+1}(\Omega)}\\ &= \overline{\operatorname{rot} \mathring{\mathbf{R}}^{q-1}(\Omega)} \oplus \mathcal{H}^q(\Omega) \oplus \overline{\operatorname{div} \mathbf{D}^{q+1}(\Omega)} \quad .\end{aligned}$$

Wir erhalten mit Hilfe dieser Zerlegungen ein erstes Resultat in der Elektro–Magneto–Statik, den

Satz 2.19
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Außengebiet mit LMKE *und $q \in \{0,\dots,N\}$. Dann existiert zu jedem*

$$G \in {}_0\mathrm{D}^{q+1}(\Omega)^\perp = {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^\perp \qquad \text{und} \qquad f \in {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q-1}(\Omega)^\perp = {}_0\mathrm{D}^{q-1}(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q-1}(\Omega)^\perp$$

genau ein $E \in \mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp_{-1}}$ mit

$$\operatorname{rot} E = G \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div} E = f \quad .$$

Der Lösungsoperator ist stetig, d. h. es existiert eine von G, f und E unabhängige Konstante $c > 0$, so daß

$$\|E\|_{0,-1,\Omega} \leq c \cdot \big(\|G\|_{0,0,\Omega} + \|f\|_{0,0,\Omega}\big)$$

gilt.

Desweiteren zitieren wir von Picard aus [34] die folgenden beiden Resultate:

Lemma 2.20
Seien $q \in \{0, \ldots, N\}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Außengebiet, welches eine Lipschitz–Transformation eines Außengebietes mit glattem Rand sei.

(i) *Es existiert eine endliche Menge* $\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega) \subset {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega)$, *welche linear unabhängig modulo* $\overline{\operatorname{rot} \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}$ *ist, mit*

$$\left|\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)\right| = \dim \mathcal{H}^q(\Omega) = d_q \qquad \text{und} \qquad \mathcal{H}^q(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^\perp = \{0\} \qquad .$$

Die Elemente von $\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)$ *haben kompakten Träger in* Ω *und ihre Orthogonalprojektionen auf* $\mathcal{H}^q(\Omega)$ *in* ${}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega)$ *entlang* $\overline{\operatorname{rot} \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}$ *bilden eine Basis der Dirichlet–Formen* $\mathcal{H}^q(\Omega)$.

(ii) *Für $q \neq 1$ existiert eine endliche Menge* $\mathrm{B}^q(\Omega) \subset {}_0\mathrm{D}^q(\Omega)$, *welche linear unabhängig modulo* $\overline{\operatorname{div} \mathbf{D}^{q+1}(\Omega)}$ *ist, mit*

$$\left|\,\mathrm{B}^q(\Omega)\right| = \dim \mathcal{H}^q(\Omega) = d_q \qquad \text{und} \qquad \mathcal{H}^q(\Omega) \cap \mathrm{B}^q(\Omega)^\perp = \{0\} \qquad .$$

Die Elemente von $\mathrm{B}^q(\Omega)$ *haben kompakten Träger in* $\overline{\Omega}$ *und ihre Orthogonalprojektionen auf* $\mathcal{H}^q(\Omega)$ *in* ${}_0\mathrm{D}^q(\Omega)$ *entlang* $\overline{\operatorname{div} \mathbf{D}^{q+1}(\Omega)}$ *bilden eine Basis der Dirichlet–Formen* $\mathcal{H}^q(\Omega)$.

(iii) *Es sei* $\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega) =: \left\{\overset{\circ}{b}{}^q_1, \ldots, \overset{\circ}{b}{}^q_{d_q}\right\}$. *Dann existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle* $E \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^q_{-1}(\Omega)$ *die Abschätzung*

$$\|E\|_{0,-1,\Omega} \leq c \cdot \Big(\|\operatorname{rot} E\|_{0,0,\Omega} + \|\operatorname{div} E\|_{0,0,\Omega} + \sum_{\ell=1}^{d_q} \left|\langle E, \overset{\circ}{b}{}^q_\ell \rangle_\Omega\right|\Big)$$

gilt.

(iv) *Für $q \neq 1$ sei* $\mathrm{B}^q(\Omega) =: \{b^q_1, \ldots, b^q_{d_q}\}$. *Dann existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $q \neq 1$ und* $E \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^q_{-1}(\Omega)$ *die Abschätzung*

$$\|E\|_{0,-1,\Omega} \leq c \cdot \Big(\|\operatorname{rot} E\|_{0,0,\Omega} + \|\operatorname{div} E\|_{0,0,\Omega} + \sum_{\ell=1}^{d_q} \left|\langle E, b^q_\ell \rangle_\Omega\right|\Big)$$

gilt.

Wir erhalten ein weiteres statisches Resultat:

Satz 2.21
Seien $q \in \{0, \ldots, N\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Außengebiet, welches eine Lipschitz–Transformation eines Außengebietes mit glattem Rand sei, und $\varepsilon, \nu \in \mathrm{V}^{q,0}_0(\Omega)$. *Desweiteren sei* $\{h_\ell\}_{\ell=1,\ldots,d_q}$ *eine Basis der Dirichlet–Formen*

$${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) := {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q(\Omega) \qquad ,$$

deren Dimension d_q nicht von ε abhängt (siehe Lemma 6.5).
Dann existiert zu jedem $\gamma \in \mathbb{C}^{d_q}$ und jedem

$$G \in {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_1(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^\perp \qquad \text{und} \qquad f \in {}_0\mathrm{D}^{q-1}_1(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q-1}(\Omega)^\perp$$

genau ein $E \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q(\Omega)$ *mit*

- $\operatorname{rot} E = G \qquad ,$
- $\operatorname{div} \varepsilon E = f \qquad ,$
- $\langle \nu E, h_\ell \rangle_\Omega = \gamma_\ell \qquad \text{für} \qquad \ell = 1, \ldots, d_q \qquad .$ (2.28)

Dies bleibt auch richtig, wenn wir mit den Formen $\{\overset{\circ}{b}{}^q_\ell\}$ *bzw.* $\{b^q_\ell\}$ *aus Lemma 2.20 die Bedingung* (2.28) *durch*

$$\langle \varepsilon E, \overset{\circ}{b}{}^q_\ell \rangle_\Omega = \gamma_\ell \quad \text{für} \quad \ell = 1, \ldots, d_q \qquad \text{bzw., falls } q \neq 1\,, \qquad \langle E, b^q_\ell \rangle_\Omega = \gamma_\ell \quad \text{für} \quad \ell = 1, \ldots, d_q$$

ersetzen. Die Lösung hängt stetig von den Daten ab, d. h. es existiert in jedem Fall eine von G *,* f *,* γ *und* E *unabhängige Konstante* $c > 0$ *, so daß die Abschätzung*

$$\|E\|_{0,0,\Omega} \leq c \cdot \Big(\|G\|_{0,1,\Omega} + \|f\|_{0,1,\Omega} + |\gamma| \Big)$$

gilt.

Wegen Lemma 2.16 wissen wir schon, daß der Raum $\mathcal{H}^q(\Omega)$ der harmonischen Dirichlet–Formen endlichdimensional ist. Wir können seine Dimension sogar exakt angeben, sie wird nämlich durch die topologischen Eigenschaften des Gebietes (Betti–Zahlen) gegeben. Wir zitieren dazu von Picard aus [30], siehe auch [26] und [29] oder zur klassischen Theorie Duff und Spencer, [9] und [10], den

Satz 2.22
Seien $q \in \{0, \ldots, N\}$ *und* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ein Außengebiet mit globaler Segmenteigenschaft sowie* $\beta_0, \ldots, \beta_N$ *die Betti–Zahlen von* Ω *. Dann sind die Dimensionen der Dirichlet–Formen gegeben durch*

$$\dim \mathcal{H}^q(\Omega) = \beta_{N-q} \qquad .$$

Wir machen noch die

Definition 2.23
Wir sagen, ein Außengebiet besitzt die „statische Maxwell–Eigenschaft", kurz SME*, falls es die* LMKE *besitzt und die Resultate des Lemmas 2.20 gelten.*

Bemerkung 2.24
Die Voraussetzung in Lemma 2.20 und Satz 2.21, daß Ω *eine Lipschitz–Transformation eines Außengebietes mit glattem Rand sei, impliziert die* LMKE *für* Ω *, siehe etwa [34]. Damit besitzt ein solches* Ω *die* SME.

3 Regularität

In den folgenden Kapiteln benötigen wir des öfteren Regularitätsresultate. Deshalb werden wir in diesem Kapitel einige herleiten. Hierzu sei stets $q \in \{0, \dots, N\}$ beliebig. Zunächst benötigen wir einige Dichtheitsaussagen:

Lemma 3.1
Für $s \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ liegt $\mathrm{C}_0^{\infty,q}$ dicht in $\mathbf{R}_s^q$, R_s^q , $\mathbf{D}_s^q$, D_s^q , $\mathbf{R}_s^q \cap \mathbf{D}_s^q$, $\mathrm{R}_s^q \cap \mathrm{D}_s^q$, $\mathbf{H}_s^{m,q}$ bzw. $\mathrm{H}_s^{m,q}$.

Zur technischen Vorbereitung definieren wir noch die komponentenweise Fourier–Transformation für q-Formen mit Komponenten E_I im Raum der temperierten Distributionen durch

$$\mathcal{F}(E)(x) := \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \hat{E}_I(x) \,\mathrm{d}x^I \qquad \text{, falls} \qquad E(x) = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} E_I(x) \,\mathrm{d}x^I$$

gilt. Hierbei sei die skalare Fourier–Transformation in L^2 mit $\hat{}$ bezeichnet. Dann ist

$$\mathcal{F} : \mathrm{L}^{2,q} \to \mathrm{L}^{2,q}$$

unitär und mit $\mathcal{X}(x) := x$ sowie der bekannten Formel

$$\widehat{\partial^\alpha u} = \mathrm{i}^{|\alpha|} \,\mathcal{X}^\alpha \hat{u}$$

für skalare Distributionen erhalten wir die Formeln

- $$\mathcal{F}* = *\mathcal{F} \quad , \tag{3.1}$$
- $$\mathcal{F}(\partial^\alpha E) = \mathrm{i}^{|\alpha|} \,\mathcal{X}^\alpha \mathcal{F}(E) \quad , \quad \partial^\alpha \mathcal{F}(E) = (-\,\mathrm{i})^{|\alpha|} \mathcal{F}(\mathcal{X}^\alpha E) \quad , \tag{3.2}$$
- $$\mathcal{F}(\operatorname{rot} E) = \mathrm{i}\, R\mathcal{F}(E) \quad , \quad \operatorname{rot} \mathcal{F}(E) = -\,\mathrm{i}\, \mathcal{F}(RE) \quad , \tag{3.3}$$
- $$\mathcal{F}(\operatorname{div} E) = \mathrm{i}\, T\mathcal{F}(E) \quad , \quad \operatorname{div} \mathcal{F}(E) = -\,\mathrm{i}\, \mathcal{F}(TE) \quad , \tag{3.4}$$
- $$\mathcal{F}(\Delta E) = -r^2 \cdot \mathcal{F}(E) \quad , \quad \Delta \mathcal{F}(E) = -\mathcal{F}(r^2 \cdot E) \quad , \tag{3.5}$$
- $$\mathcal{F}\big(M(E,H)\big) = \mathrm{i}\, S\mathcal{F}(E,H) \quad , \quad M\mathcal{F}(E,H) = -\,\mathrm{i}\, \mathcal{F}\big(S(E,H)\big) \quad . \tag{3.6}$$

Desweiteren können wir die Sobolev– bzw. Rotations– und Divergenz–Räume im Ganzraum charakterisieren:

- $$\mathbf{H}^{m,q} = \big\{ E \in \mathrm{L}^{2,q} : \mathcal{F}(E) \in \mathrm{L}_m^{2,q} \big\} =: \mathfrak{H}_m^q \quad , \quad m \in \mathbb{N}_0 \tag{3.7}$$
- $$\mathbf{R}^q = \big\{ E \in \mathrm{L}^{2,q} : R\mathcal{F}(E) \in \mathrm{L}^{2,q+1} \big\} =: \mathfrak{R}^q \tag{3.8}$$
- $$\mathbf{D}^q = \big\{ E \in \mathrm{L}^{2,q} : T\mathcal{F}(E) \in \mathrm{L}^{2,q-1} \big\} =: \mathfrak{D}^q \tag{3.9}$$

Die Räume $\mathfrak{H}_s^q$ können auch für $s \in \mathbb{R}$ definiert werden. In diesem Sinne wollen wir auch $\mathbf{H}^{s,q}$ für $s \in \mathbb{R}$ einführen. Mit partieller Integration und der Formel $\Delta = \operatorname{rot}\operatorname{div} + \operatorname{div}\operatorname{rot}$ erhalten wir leicht

$$\bigwedge_{\Phi \in \mathrm{C}_0^{\infty,q}} \qquad \sum_{n=1}^{N} \|\partial_n \Phi\|_{0,0,\mathbb{R}^N}^2 = \|\operatorname{rot} \Phi\|_{0,0,\mathbb{R}^N}^2 + \|\operatorname{div} \Phi\|_{0,0,\mathbb{R}^N}^2 \quad . \tag{3.10}$$

Aus den Charakterisierungen (3.7)–(3.9) und Bemerkung 2.2 (iv) sowie obiger Gleichung (3.10) bekommen wir das folgende grundlegende Ergebnis durch Lemma 3.1 mit einem Dichtheitsargument.

Lemma 3.2
Mit äquivalenten (sogar gleichen) Normen gilt $\mathbf{R}^q \cap \mathbf{D}^q = \mathbf{H}^{1,q}$.

Nun wollen wir eine Transformation einfügen:

Lemma 3.3
Sei $\varepsilon \in \mathrm{V}_0^{q,1}$. Dann gilt mit äquivalenten Normen (in Abhängigkeit von ε)

$$\mathbf{R}^q \cap \varepsilon^{-1} \mathbf{D}^q = \mathbf{H}^{1,q} \quad .$$

Beweis:
Eine Inklusion ist trivial. Sei $E \in \mathbf{R}^q \cap \varepsilon^{-1} \mathbf{D}^q$. Mit der Zerlegung

$$\mathrm{L}^{2,q} = \overline{\operatorname{rot} \mathbf{R}^{q-1}} \oplus {}_0\mathrm{D}^q = \operatorname{rot} \big(\mathrm{R}_{-1}^{q-1} \cap {}_0\mathrm{D}_{-1}^{q-1} \big) \oplus {}_0\mathrm{D}^q$$

aus Lemma 2.18 gelte

$$E = \operatorname{rot}\Phi + \Psi \qquad .$$

Dann ist $\operatorname{rot} E = \operatorname{rot}\Psi$ und $\operatorname{div}\Psi = 0$. Lemma 3.2 liefert

$$\Psi \in \mathbf{H}^{1,q} \qquad \text{mit} \qquad \|\Psi\|_{1,0,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \big(\|\Psi\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{rot}\Psi\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\big) \leq c \cdot \big(\|E\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{rot} E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\big) \qquad .$$

Wir erhalten $\varepsilon\Psi \in \mathbf{H}^{1,q}$ und

$$\operatorname{div}\varepsilon\operatorname{rot}\Phi = \operatorname{div}\varepsilon E - \operatorname{div}\varepsilon\Psi \in \mathrm{L}^{2,q-1} \qquad \text{mit} \qquad \|\operatorname{div}\varepsilon\operatorname{rot}\Phi\|_{0,0,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \big(\|\operatorname{div}\varepsilon E\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|\Psi\|_{1,0,\mathbb{R}^N}\big) \qquad .$$

Wir definieren für $\phi = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \phi_I \, \mathrm{d}x^I \in \mathrm{A}^q$ die Operatoren $\tau_{h,i}$ und $\delta_{h,i}$ punktweise durch

$$\tau_{h,i}\phi(x) := \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \phi_I(x + h \cdot e^i) \, \mathrm{d}x^I \qquad , \qquad \delta_{h,i} := \frac{1}{h}(\tau_{h,i} - \mathrm{Id}) \qquad\qquad (e^i : i\text{–ter Einheitsvektor})$$

und wenden die übliche Beweistechnik bei elliptischer Regularität $\Big($siehe z. B. Agmon, $\big[$[1], Kapitel 6 und 9$\big]\Big)$ an. Für $\varphi \in \mathrm{C}_0^{\infty,q-1}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon\delta_{h,i}\operatorname{rot}\Phi, \operatorname{rot}\varphi\rangle_{\mathbb{R}^N} &= -\langle \operatorname{rot}\Phi, \delta_{-h,i}\varepsilon\operatorname{rot}\varphi\rangle_{\mathbb{R}^N} \\
&= -\langle \operatorname{rot}\Phi, \varepsilon\delta_{-h,i}\operatorname{rot}\varphi\rangle_{\mathbb{R}^N} + \big\langle \operatorname{rot}\Phi, (\delta_{-h,i}\varepsilon)\tau_{-h,i}\operatorname{rot}\varphi\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \\
&= -\langle \varepsilon\operatorname{rot}\Phi, \operatorname{rot}\underbrace{\delta_{-h,i}\varphi}_{\in \mathrm{C}_0^{\infty,q-1}}\rangle_{\mathbb{R}^N} + \big\langle \operatorname{rot}\Phi, (\delta_{-h,i}\varepsilon)\tau_{-h,i}\operatorname{rot}\varphi\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \\
&= \langle \operatorname{div}\varepsilon\operatorname{rot}\Phi, \delta_{-h,i}\varphi\rangle_{\mathbb{R}^N} + \big\langle \operatorname{rot}\Phi, (\delta_{-h,i}\varepsilon)\tau_{-h,i}\operatorname{rot}\varphi\big\rangle_{\mathbb{R}^N}
\end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen

$$\|\delta_{h,i}u\|_{0,0,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \sum_{n=1}^{N} \|\partial_n u\|_{0,0,\mathbb{R}^N}$$

und

$$\|\tau_{h,i}\operatorname{rot} u\|_{0,0,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \|\operatorname{rot} u\|_{0,0,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \sum_{n=1}^{N} \|\partial_n u\|_{0,0,\mathbb{R}^N} \qquad ,$$

die gleichmäßig bzgl. h gelten, erhalten wir gleichmäßig bzgl. φ und h :

$$\begin{aligned}
\big|\langle \varepsilon\delta_{h,i}\operatorname{rot}\Phi, \operatorname{rot}\varphi\rangle_{\mathbb{R}^N}\big| &\leq c \cdot \big(\|E\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{rot} E\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{div}\varepsilon E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\big) \cdot \sum_{n=1}^{N} \|\partial_n\varphi\|_{0,0,\mathbb{R}^N} \\
&\leq c \cdot \big(\|E\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{rot} E\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{div}\varepsilon E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\big) \cdot \big(\|\operatorname{rot}\varphi\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{div}\varphi\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\big)
\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.1 wählen wir eine Folge $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_0^{\infty,q-1}$, die in $\mathrm{R}_{-1}^{q-1} \cap \mathrm{D}_{-1}^{q-1}$ gegen $\Phi \in \mathrm{R}_{-1}^{q-1} \cap \mathrm{D}_{-1}^{q-1}$ konvergiert. Dann gilt auch $\delta_{h,i}\Phi_n \xrightarrow{n\to\infty} \delta_{h,i}\Phi$ in $\mathrm{R}_{-1}^{q-1} \cap \mathrm{D}_{-1}^{q-1}$ und wir bekommen

$$\begin{aligned}
\big|\langle \varepsilon\delta_{h,i}\operatorname{rot}\Phi, \delta_{h,i}\operatorname{rot}\Phi_n\rangle_{\mathbb{R}^N}\big| &= \Big|\big\langle \varepsilon\delta_{h,i}\operatorname{rot}\Phi, \operatorname{rot}(\underbrace{\delta_{h,i}\Phi_n}_{\in \mathrm{C}_0^{\infty,q-1}})\big\rangle_{\mathbb{R}^N}\Big| \\
\leq c \cdot \big(\|E\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{rot} E\|_{0,0,\mathbb{R}^N} &+ \|\operatorname{div}\varepsilon E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\big) \cdot \big(\|\operatorname{rot}\delta_{h,i}\Phi_n\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{div}\delta_{h,i}\Phi_n\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\big) \qquad .
\end{aligned}$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ ergibt sich

$$\begin{aligned}&\tilde{c}\cdot\|\delta_{h,i}\operatorname{rot}\Phi\|^2_{0,0,\mathbb{R}^N}\leq\langle\varepsilon\delta_{h,i}\operatorname{rot}\Phi,\delta_{h,i}\operatorname{rot}\Phi\rangle_{\mathbb{R}^N}\\ \leq{}&c\cdot\big(\|E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{rot}E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{div}\varepsilon E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\big)\cdot\big(\|\delta_{h,i}\operatorname{rot}\Phi\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\delta_{h,i}\underbrace{\operatorname{div}\Phi}_{=0}\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\big)\qquad,\end{aligned}$$

so daß wir mit einer Konstanten $c>0$ unabhängig von h

$$\|\delta_{h,i}\operatorname{rot}\Phi\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\leq c\cdot\big(\|E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{rot}E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{div}\varepsilon E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\big)$$

erhalten. Also ist $\operatorname{rot}\Phi\in\mathbf{H}^{1,q}$ und

$$\sum_{n=1}^{N}\|\partial_n\operatorname{rot}\Phi\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\leq c\cdot\big(\|E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{rot}E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{div}\varepsilon E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\big)\qquad.$$

Schließlich ergibt sich $E=\operatorname{rot}\Phi+\Psi\in\mathbf{H}^{1,q}$ mit der Abschätzung

$$\|E\|_{1,0,\mathbb{R}^N}\leq c\cdot\big(\|E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{rot}E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{div}\varepsilon E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\big)\leq c\cdot\|E\|_{\mathbf{R}^q\cap\varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q}\qquad.$$

∎

Korollar 3.4
Seien $s\in\mathbb{R}$ und $\varepsilon\in\mathrm{V}^{q,1}_0$. Dann gilt mit äquivalenten Normen (in Abhängigkeit von ε)

$$\mathbf{R}^q_s\cap\varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_s=\mathbf{H}^{1,q}_s\qquad.$$

Beweis:
Sei $E\in\mathbf{R}^q_s\cap\varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_s$. Dann folgt $\big($Erinnerung: $\rho=(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\big)$

- $\rho^sE\in\mathrm{L}^{2,q}$,
- $\operatorname{rot}(\rho^sE)=\rho^s\operatorname{rot}E+s\rho^{s-2}RE\in\mathrm{L}^{2,q+1}$,
- $\operatorname{div}(\rho^s\varepsilon E)=\rho^s\operatorname{div}\varepsilon E+s\rho^{s-2}T\varepsilon E\in\mathrm{L}^{2,q-1}$,

also $\rho^sE\in\mathbf{R}^q\cap\varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q=\mathbf{H}^{1,q}$ und

$$\|\rho^sE\|_{1,0,\mathbb{R}^N}\leq c\cdot\Big(\|\rho^sE\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\big\|\operatorname{rot}(\rho^sE)\big\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\big\|\operatorname{div}(\varepsilon\rho^sE)\big\|_{0,0,\mathbb{R}^N}\Big)$$

nach Lemma 3.3. Mit $\partial_n(\rho^sE)=\rho^s\partial_nE+s\rho^{s-2}\mathcal{X}_nE$ folgt dann $E\in\mathbf{H}^{1,q}_s$ und

$$\|E\|_{1,s,\mathbb{R}^N}\leq c\cdot\|\rho^sE\|_{1,0,\mathbb{R}^N}\leq c\cdot\big(\|E\|_{0,s,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{rot}E\|_{0,s,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{div}\varepsilon E\|_{0,s,\mathbb{R}^N}\big)\qquad.$$

∎

Bei den stärker gewichteten Räumen haben wir das

Korollar 3.5
Seien $s\in\mathbb{R}$, $\tau>0$ und $\varepsilon=\mathrm{Id}+\hat{\varepsilon}\in\mathrm{V}^{q,1}_\tau$. Desweiteren gelte für $n=1,\dots,N$

$$\partial_n\hat{\varepsilon}=\mathcal{O}(r^{-1})\qquad\textit{für}\qquad r\to\infty\quad.$$

Dann gilt mit äquivalenten Normen (in Abhängigkeit von ε)

$$\mathrm{R}^q_s\cap\varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_s=\mathrm{H}^{1,q}_s\qquad.$$

Beweis:
Sei $E\in\mathrm{R}^q_s\cap\varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_s\subset\mathbf{R}^q_s\cap\varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_s$. Dann folgt zunächst $E\in\mathbf{H}^{1,q}_s$ aus Korollar 3.4 und wir müssen nur noch $\partial_nE\in\mathrm{L}^{2,q}_{s+1}$ für $n=1,\dots,N$ zeigen. Mit Lemma 3.1 gilt (3.10) auch für $\mathbf{H}^{1,q}$–Formen. Daher gilt mit $\varphi_t:=\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta}(t^{-1}r)$ für alle n und gleichmäßig bzgl. $t\in\mathbb{R}_+$:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\partial_n(\varphi_t \cdot E)\right\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} = \left\|\rho^{s+1}\partial_n(\varphi_t \cdot E)\right\|_{0,0,\mathbb{R}^N} \\
&\le c \cdot \Big(\big\|\partial_n(\underbrace{\rho^{s+1}\varphi_t \cdot E}_{\in \mathrm{H}^{1,q}_{\mathrm{vox}} \subset \mathbf{H}^{1,q}})\big\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \left\|(s+1)\rho^{s-1}\mathcal{X}_n\varphi_t \cdot E\right\|_{0,0,\mathbb{R}^N} \Big) \\
&\le c \cdot \Big(\left\|\operatorname{rot}(\rho^{s+1}\varphi_t \cdot E)\right\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \left\|\operatorname{div}(\rho^{s+1}\varphi_t \cdot E)\right\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|\varphi_t \cdot E\|_{0,s,\mathbb{R}^N} \Big) \\
&\le c \cdot \Big(\|\varphi_t \cdot E\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \left\|\operatorname{rot}(\varphi_t \cdot E)\right\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} + \left\|\operatorname{div}(\varphi_t \cdot \varepsilon E)\right\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} \\
&\qquad + \left\|\operatorname{div}(\varphi_t \cdot \hat{\varepsilon} E)\right\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} \Big) \\
&\le c \cdot \Big(\|\varphi_t \cdot E\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \left\|\operatorname{rot}(\varphi_t \cdot E)\right\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} + \left\|\operatorname{div}(\varphi_t \cdot \varepsilon E)\right\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} \\
&\qquad + \sum_{m=1}^{N} \left\|\partial_m(\varphi_t \cdot E)\right\|_{0,s+1-\tau,\mathbb{R}^N} \Big)
\end{aligned}
$$

Da $s+1-\tau < s+1$ ist, folgt für alle $\hat{t} \in \mathbb{R}_+$ mit einer von s, τ und $\hat{t}$ abhängigen Konstanten $\hat{c} > 0$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\left\|\partial_m(\varphi_t \cdot E)\right\|^2_{0,s+1-\tau,\mathbb{R}^N} \\
&= \left\|\partial_m(\varphi_t \cdot E)\right\|^2_{0,s+1-\tau,U(0,\hat{t})} + \left\|\partial_m(\varphi_t \cdot E)\right\|^2_{0,s+1-\tau,A(\hat{t})} \\
&\le \hat{c} \cdot \left\|\partial_m(\varphi_t \cdot E)\right\|^2_{0,s,U(0,\hat{t})} + (1+\hat{t}^{\,2})^{-\tau} \cdot \left\|\partial_m(\varphi_t \cdot E)\right\|^2_{0,s+1,A(\hat{t})} \\
&\le \hat{c} \cdot \left\|\partial_m(\varphi_t \cdot E)\right\|^2_{0,s,\mathbb{R}^N} + (1+\hat{t}^{\,2})^{-\tau} \cdot \left\|\partial_m(\varphi_t \cdot E)\right\|^2_{0,s+1,\mathbb{R}^N} \qquad ,
\end{aligned}
$$

so daß wir für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ und ein entsprechendes $\hat{t}$ mit $(1+\hat{t}^{\,2})^{-\tau} < \delta$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \left\|\partial_n(\varphi_t \cdot E)\right\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} \\
&\le c \cdot \Big(\|\varphi_t \cdot E\|_{1,s,\mathbb{R}^N} + \left\|\operatorname{rot}(\varphi_t \cdot E)\right\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} + \left\|\operatorname{div}(\varphi_t \cdot \varepsilon E)\right\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} \Big) \\
&\le c \cdot \Big(\|E\|_{1,s,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{rot} E\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{div} \varepsilon E\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{N} \left\|\boldsymbol{\eta}'(t^{-1}r) \cdot t^{-1}r^{-1}\mathcal{X}_n E\right\|_{0,s,\mathbb{R}^N} \\
&\qquad + \left\|\boldsymbol{\eta}'(t^{-1}r) \cdot t^{-1}r^{-1}RE\right\|_{0,s+1,Z(t,2t)} + \left\|\boldsymbol{\eta}'(t^{-1}r) \cdot t^{-1}r^{-1}T\varepsilon E\right\|_{0,s+1,Z(t,2t)} \Big)
\end{aligned}
$$

erhalten. Da in $Z(t,2t)$ die Beziehung $t^{-1} \le 2r^{-1}$ gilt, folgt mit Korollar 3.4 gleichmäßig bzgl. t

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \|\partial_n E\|_{0,s+1,U(0,t)} &\le \sum_{n=1}^{N} \left\|\partial_n(\varphi_t \cdot E)\right\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} \\
&\le c \cdot \big(\|E\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{rot} E\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{div} \varepsilon E\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} \big) \qquad .
\end{aligned}
$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert für $t \to \infty$ schließlich $E \in \mathrm{H}^{1,q}_s$ und

$$
\sum_{n=1}^{N} \|\partial_n E\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} \le c \cdot \big(\|E\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{rot} E\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{div} \varepsilon E\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} \big) \qquad ,
$$

also insgesamt

$$
\|E\|_{1,s,\mathbb{R}^N} \le c \cdot \big(\|E\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{rot} E\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} + \|\operatorname{div} \varepsilon E\|_{0,s+1,\mathbb{R}^N} \big) \qquad .
$$

■

Satz 3.6
Seien $\ell \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathrm{V}_0^{q,\ell}$. Dann sind

$$E \in \mathrm{L}_s^{2,q} \qquad , \qquad \operatorname{rot} E \in \mathbf{H}_s^{\ell-1,q+1} \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{div} \varepsilon E \in \mathbf{H}_s^{\ell-1,q-1}$$

äquivalent zu $E \in \mathbf{H}_s^{\ell,q}$ und es gilt gleichmäßig bzgl. E die Abschätzung

$$|\!|\!| E |\!|\!|_{\ell,s,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \big(|\!|\!| E |\!|\!|_{0,s,\mathbb{R}^N} + |\!|\!| \operatorname{rot} E |\!|\!|_{\ell-1,s,\mathbb{R}^N} + |\!|\!| \operatorname{div} \varepsilon E |\!|\!|_{\ell-1,s,\mathbb{R}^N} \big) \qquad .$$

Beweis:
`Induktionsanfang` ($\ell = 1$): Korollar 3.4
`Induktionsschritt` ($\ell \rightsquigarrow \ell + 1$): Seien $\varepsilon \in \mathrm{V}_0^{q,\ell+1}$, $\operatorname{rot} E \in \mathbf{H}_s^{\ell,q+1}$ und $\operatorname{div} \varepsilon E \in \mathbf{H}_s^{\ell,q-1}$. Die Induktionsvoraussetzung liefert auf der Stufe ℓ zunächst $E \in \mathbf{H}_s^{\ell,q}$ und die entsprechende Abschätzung. Damit sind für alle $n = 1, \ldots, N$ die partiellen Ableitungen $\partial_n E \in \mathrm{L}_s^{2,q}$ und es gelten

$$\operatorname{rot} \partial_n E \in \mathbf{H}_s^{\ell-1,q+1} \qquad \text{sowie} \qquad \operatorname{div}(\varepsilon \partial_n E) = \partial_n \operatorname{div} \varepsilon E - \operatorname{div} \big(\underbrace{(\partial_n \varepsilon)}_{\in \mathrm{C}^{\ell,q}} E \big) \in \mathbf{H}_s^{\ell-1,q-1} \qquad .$$

Wiederum liefert die Induktionsvoraussetzung auf der Stufe ℓ für alle $n = 1, \ldots, N$

$$\partial_n E \in \mathbf{H}_s^{\ell,q} \qquad \text{und} \qquad |\!|\!| \partial_n E |\!|\!|_{\ell,s,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \Big(|\!|\!| \partial_n E |\!|\!|_{0,s,\mathbb{R}^N} + |\!|\!| \operatorname{rot} \partial_n E |\!|\!|_{\ell-1,s,\mathbb{R}^N} + \Big|\!\Big|\!\Big| \operatorname{div}(\varepsilon \partial_n E) \Big|\!\Big|\!\Big|_{\ell-1,s,\mathbb{R}^N} \Big) \qquad .$$

Folglich ist $E \in \mathbf{H}_s^{\ell+1,q}$ und es gilt gleichmäßig bzgl. E die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\!|\!| E |\!|\!|_{\ell+1,s,\mathbb{R}^N} &\leq c \cdot \Big(|\!|\!| E |\!|\!|_{\ell,s,\mathbb{R}^N} + \sum_{n=1}^{N} |\!|\!| \partial_n E |\!|\!|_{\ell,s,\mathbb{R}^N} \Big) \\ &\leq c \cdot \big(|\!|\!| E |\!|\!|_{\ell,s,\mathbb{R}^N} + |\!|\!| \operatorname{rot} E |\!|\!|_{\ell,s,\mathbb{R}^N} + |\!|\!| \operatorname{div} \varepsilon E |\!|\!|_{\ell,s,\mathbb{R}^N} \big) \qquad . \end{aligned}$$

Die Induktionsvoraussetzung liefert nun die Behauptung. ∎

Satz 3.7
Seien $\ell \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ und $\varepsilon = \mathrm{Id} + \hat{\varepsilon} \in \mathrm{V}_\tau^{q,\ell}$. Desweiteren gelte für alle $|\alpha| \leq \ell$

$$\partial^\alpha \hat{\varepsilon} = \mathcal{O}(r^{-|\alpha|}) \qquad \textit{für} \qquad r \to \infty \qquad .$$

Dann sind

$$E \in \mathrm{L}_s^{2,q} \qquad , \qquad \operatorname{rot} E \in \mathrm{H}_{s+1}^{\ell-1,q+1} \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{div} \varepsilon E \in \mathrm{H}_{s+1}^{\ell-1,q-1}$$

äquivalent zu $E \in \mathrm{H}_s^{\ell,q}$ und es gilt gleichmäßig bzgl. E die Abschätzung

$$\| E \|_{\ell,s,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \big(\| E \|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \| \operatorname{rot} E \|_{\ell-1,s+1,\mathbb{R}^N} + \| \operatorname{div} \varepsilon E \|_{\ell-1,s+1,\mathbb{R}^N} \big) \qquad .$$

Beweis:
Korollar 3.5 liefert den Induktionsanfang. Der Induktionsschritt folgt dem Schema des Beweises zu Satz 3.6. Wir müssen hier nur zusätzlich beachten, daß die Gewichte der Normen mit der Anzahl der Ableitungen steigen und dies durch die genügend schnell fallenden Ableitungen von $\hat{\varepsilon}$ kompensiert wird. ∎

Mit diesen Ganzraumergebnissen erhalten wir nun direkt durch eine übliche Abschneidetechnik die innere Regularität in beschränkten Gebieten. Unsere Ergebnisse liefern aber auch die innere Regularität in Außengebieten, welche wir zusammenfassen im

Korollar 3.8
Seien $\ell \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ *und* $\Xi \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ *zwei Außengebiete mit* $\operatorname{dist}(\Xi, \partial\Omega) > 0$.

(i) *Ist* $\varepsilon \in \mathrm{V}_0^{q,\ell}(\Omega)$ *, so folgt aus* $E \in \mathrm{L}_s^{2,q}(\Omega)$ *,* $\operatorname{rot} E \in \mathbf{H}_s^{\ell-1,q+1}(\Omega)$ *und* $\operatorname{div} \varepsilon E \in \mathbf{H}_s^{\ell-1,q-1}(\Omega)$ *schon* $E \in \mathbf{H}_s^{\ell,q}(\Xi)$ *. Desweiteren gilt mit einer Konstanten* $c > 0$ *gleichmäßig bezüglich* E *die Abschätzung*

$$\|E\|_{\ell,s,\Xi} \leq c \cdot \big(\|E\|_{0,s,\Omega} + \|\operatorname{rot} E\|_{\ell-1,s,\Omega} + \|\operatorname{div} \varepsilon E\|_{\ell-1,s,\Omega}\big) \qquad .$$

(ii) *Ist* $\varepsilon = \mathrm{Id} + \hat{\varepsilon} \in \mathrm{V}_\tau^{q,\ell}(\Omega)$ *mit einem* $\tau > 0$ *und*

$$\bigwedge_{|\alpha| \leq \ell} \qquad \partial^\alpha \hat{\varepsilon} = \mathcal{O}(r^{-|\alpha|}) \qquad \textit{für} \qquad r \to \infty \qquad ,$$

so folgt aus $E \in \mathrm{L}_s^{2,q}(\Omega)$ *,* $\operatorname{rot} E \in \mathrm{H}_{s+1}^{\ell-1,q+1}(\Omega)$ *und* $\operatorname{div} \varepsilon E \in \mathrm{H}_{s+1}^{\ell-1,q-1}(\Omega)$ *schon* $E \in \mathrm{H}_s^{\ell,q}(\Xi)$ *. Außerdem gilt mit einer Konstanten* $c > 0$ *gilt gleichmäßig bezüglich* E *die Abschätzung*

$$\|E\|_{\ell,s,\Xi} \leq c \cdot \big(\|E\|_{0,s,\Omega} + \|\operatorname{rot} E\|_{\ell-1,s+1,\Omega} + \|\operatorname{div} \varepsilon E\|_{\ell-1,s+1,\Omega}\big) \qquad .$$

Beweis:
Mit einer Ausschneidefunktion φ , welche ihren Träger in Ω hat und auf Ξ konstant Eins ist, erfüllt die Form $\varphi \cdot E$ die Voraussetzungen von Satz 3.6 bzw. Satz 3.7. Damit folgt $\varphi \cdot E \in \mathbf{H}_s^{\ell,q}$ bzw. $\varphi \cdot E \in \mathrm{H}_s^{\ell,q}$, also insbesondere

$$E \in \mathbf{H}_s^{\ell,q}(\Xi) \qquad \text{bzw.} \qquad E \in \mathrm{H}_s^{\ell,q}(\Xi) \qquad ,$$

und eine kleine Induktion liefert die gewünschte Abschätzung. ■

Bemerkung 3.9
Durch den $*$*–Operator erhalten wir alle obigen Resultate auch für Räume der Form*

$$\varepsilon^{-1}\mathbf{R}_s^q \cap \mathbf{D}_s^q \qquad \textit{bzw.} \qquad \varepsilon^{-1}\mathrm{R}_s^q \cap \mathrm{D}_s^q \qquad .$$

Wir benötigen in dieser Arbeit keine Randregularität. Ergebnisse in dieser Richtung findet man z. B. bei Kuhn in $\big[$[17], Kapitel 4$\big]$.

4 Lösungstheorie des zeitharmonischen Problems

In diesem Kapitel wollen wir eine zeitharmonische Lösungstheorie ($\omega \neq 0$) zu dem Strahlungsproblem

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E, H) = (F, G) \qquad , \qquad \iota^* E = 0$$

entwickeln. Diese ist eine Verallgemeinerung der Resultate von Picard, Weck und Witsch in [37] und aus der Diplomarbeit [24], die den klassischen Fall der Maxwellschen Gleichungen ($N = 3$ und $q = 1$) behandeln, wobei in der letzteren Arbeit stärkere Bedingungen an Λ und die rechten Seiten (F, G) gestellt werden. Wir werden die Lösungstheorie unter sehr schwachen Voraussetzungen an die Koeffizienten ε, μ und Daten (F, G) entwickeln können.
Auch in diesem Kapitel seien stets $q \in \{0, \ldots, N\}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Außengebiet. Desweiteren seien

$$(\varepsilon, \mu) = \mathrm{Id} + (\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}) \in \mathrm{V}^{q,0}_{\tau}(\Omega) \times \mathrm{V}^{q+1,0}_{\tau}(\Omega)$$

zwei Transformationen, deren Abklingrate $\tau \geq 0$ noch näher festzulegen ist.

4.1 Der Lösungsbegriff

Die Selbstadjungiertheit von $\mathcal{M}$ $\big($vgl. (4.1)$\big)$ liefert einen einfachen L^2–Lösungsbegriff für nichtreelle Frequenzen:

Definition 4.1
Seien $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *und* $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Dann löst* (E, H) *das Problem* $\mathrm{Max}(\Lambda, \omega, F, G)$, *falls*

(i) $(E, H) \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}(\Omega)$,

(ii) $(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E, H) = (F, G)$.

Für reelle Frequenzen müssen wir den Raum der Daten verkleinern und den Lösungsraum vergrößeren, indem wir in gewichteten Räumen Strahlungslösungen definieren.

Definition 4.2
Seien $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und* $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Dann löst* (E, H) *das Problem* $\mathrm{Max}(\Lambda, \omega, F, G)$, *falls*

(i) $(E, H) \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_{<-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)$,

(ii) $(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E, H) = (F, G)$,

(iii) $(r^{-1}TH + E, r^{-1}RE + H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)$.

Bemerkung 4.3
Die obige Bedingung (iii) nennen wir „Maxwellsche Strahlungsbedingung", oder kurz „Strahlungsbedingung", denn sie verallgemeinert die klassischen Sommerfeldschen Strahlungsbedingungen zur Maxwell–Gleichung

$$\xi \wedge H - E \in \mathrm{L}^2_{>-\frac{1}{2}}(\Omega) \qquad \textit{und} \qquad \xi \wedge E + H \in \mathrm{L}^2_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)$$

($N = 3$ *und* $q = 1$). *Hierbei seien* $\xi(x) := \frac{x}{r}$ *und* $\wedge$ *das Wedgeprodukt im* $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung 4.4
Andere Formulierungen der Strahlungsbedingung sind z. B.

$$(r^{-1}S + \mathrm{Id})(E, H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega) \quad \textit{oder} \quad \begin{bmatrix} 1 & r^{-1}T \\ r^{-1}R & 1 \end{bmatrix} (E, H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega) \quad .$$

Das vierte Kapitel beschäftigt sich im wesentlichen mit der Lösungstheorie im Fall $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir werden – wie schon in der Einleitung erwähnt – mit Hilfe des Prinzips der Grenzabsorption eine Lösungstheorie in gewichteten L^2–Räumen herleiten. Ein entscheidendes Hilfsmittel wird hierbei das Zerlegungslemma (Lemma 4.6) sein, welches den Nachweis sowohl des polynomialen Abklingens etwaiger Eigenlösungen als auch der a–priori–Abschätzung zur Durchführung der Grenzabsorption durch Rückspielung auf die entsprechenden Resultate der skalaren Helmholtz–Gleichung im Ganzraum ermöglicht und uns dadurch in die Lage versetzt, L^∞–Koeffizienten $\hat{\varepsilon}$ und $\hat{\mu}$ zuzulassen. Unter stärkeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Koeffizienten (C^2) gelingt es sogar, das exponentielle Abklingen eventueller Eigenlösungen zu zeigen $\big($vgl. mit [24]$\big)$.
Ziel dieses Kapitels ist der Nachweis der Gültigkeit einer Fredholmschen–Alternative im Fall $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir können insbesondere endlichdimensionale Eigenräume nicht ausschließen.

4.2 Lösungstheorie für nichtreelle Frequenzen

Wie wir schon in der Einführung auf Seite 10 gesehen haben, sind

$$\mathrm{i}\,\mathrm{div}: \mathbf{D}^{q+1}(\Omega) \subset \mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{i}\,\mathrm{rot}: \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q}(\Omega) \subset \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega)$$

zueinander adjungiert. Daher ist

$$\begin{array}{rclcl} \mathcal{M} & : & \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}(\Omega) \subset {}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \times {}_{\mu}\mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \times {}_{\mu}\mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega) \\ & & (E,H) & \longmapsto & \mathrm{i}\,\Lambda^{-1}M(E,H) = \mathrm{i}(\varepsilon^{-1}\,\mathrm{div}\,H, \mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,E) \end{array} \tag{4.1}$$

mit ${}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{2,q}(\Omega) := \big(\mathrm{L}^{2,q}(\Omega), \langle \varepsilon\,\cdot\,, \,\cdot\,\rangle_{\Omega}\big)$ selbstadjungiert. Es folgt der

Satz 4.5
Es gibt zu jedem $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und jedem $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega)$ genau eine Lösung (E,H) zu $\mathrm{Max}(\Lambda,\omega,F,G)$. Der Lösungsoperator

$$\begin{array}{rclcl} \mathcal{L}_{\omega} & : & \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega) \\ & & (F,G) & \longmapsto & (E,H) \end{array}$$

ist stetig und es existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\|\mathcal{L}_{\omega}\| \leq \frac{c}{|\,\mathrm{Im}\,\omega|}$$

gilt. Desweiteren gibt es eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega)$ und $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\big\|\mathcal{L}_{\omega}(F,G)\big\|_{\mathbf{R}^{q}(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)} \leq c \cdot \frac{1+|\omega|}{|\,\mathrm{Im}\,\omega|} \cdot \big\|(F,G)\big\|_{0,0,\Omega}$$

erfüllt ist.

Beweis:
Da $(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E,H) = (F,G) \Leftrightarrow (\mathrm{i}\,\Lambda^{-1}M - \omega)(E,H) = \mathrm{i}\,\Lambda^{-1}(F,G)$ und ω in der Resolventenmenge von $\mathcal{M}$ ist, setzen wir

$$(E,H) := (\mathcal{M} - \omega)^{-1}\big(\mathrm{i}\,\Lambda^{-1}(F,G)\big) \qquad .$$

Dann gilt $\big\|(\mathcal{M}-\omega)^{-1}\big\| \leq |\,\mathrm{Im}\,\omega|^{-1}$, wenn wir $(\mathcal{M}-\omega)^{-1}$ als Operator von ${}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)\times{}_{\mu}\mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega)$ in sich auffassen, sowie

$$(E,H) \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}(\Omega) \qquad \text{und} \qquad (M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E,H) = (F,G) \qquad .$$

Damit löst (E,H) das Problem $\mathrm{Max}(\Lambda,\omega,F,G)$ und für den Lösungsoperator

$$\begin{array}{rclcl} \mathcal{L}_{\omega} := \mathrm{i}(\mathcal{M} - \omega)^{-1}\Lambda^{-1} & : & \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega) \\ & & (F,G) & \longmapsto & (E,H) \end{array} \tag{4.2}$$

folgt gleichmäßig bzgl. ω

$$\|\mathcal{L}_{\omega}\| \leq \big\|(\mathcal{M} - \omega)^{-1}\big\| \cdot \|\Lambda^{-1}\| \leq \frac{c}{|\,\mathrm{Im}\,\omega|} \qquad .$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung erhalten wir die zweite Abschätzung. ■

4.3 Ein Zerlegungslemma

Wie wir bereits erwähnt haben, wollen wir die zur Durchführung der Grenzabsorption notwendige a–priori–Abschätzung und das polynomiale Abklingen der Eigenlösungen auf die entsprechenden Resultate der skalaren Helmholtz–Gleichung im Ganzraum zurückführen. Diese Reduktion gelingt hier genauso wie im klassischen Fall der Maxwell–Gleichung bei Picard, Weck und Witsch in [37] bzw. im Fall in der linearen Elastizität, welcher von Weck und Witsch in [52] behandelt wurde, und wird durch das folgende Lemma ermöglicht.

Lemma 4.6
Seien $\omega \in K \Subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *,* $t, s \in \mathbb{R}$ *mit* $0 \leq s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$ *und* $t \leq s \leq t + \tau$ *sowie* $\rho \in \mathbb{R}_+$ *mit* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset U(0, \rho)$ *und* $\varphi := \boldsymbol{\eta}(\rho^{-1} \cdot r)$ *. Desweiteren sei* $(E, H) \in \mathbf{R}_t^q(\Omega) \times \mathbf{D}_t^{q+1}(\Omega)$ *eine Lösung zu*

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E, H) =: (F, G) \in \mathrm{L}_s^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_s^{2,q+1}(\Omega) \qquad .$$

Dann gilt

$$(\hat{F}, \hat{G}) := \varphi(F, G) + (C_{M,\varphi} - \mathrm{i}\,\omega\hat{\Lambda}\varphi)(E, H) \in \mathrm{L}_s^{2,q} \times \mathrm{L}_s^{2,q+1} \qquad .$$

Zerlegt man diese Form mit Lemma 2.12 in

$$(\hat{F}, \hat{G}) =: (F_R, G_D) + (F_D, G_R) + (F_{\mathcal{S}}, G_{\mathcal{S}}) \in ({}_0\mathrm{R}_s^q \times {}_0\mathrm{D}_s^{q+1}) \dot{+} ({}_0\mathrm{D}_s^q \times {}_0\mathrm{R}_s^{q+1}) \dot{+} (\mathcal{S}_s^q \times \mathcal{S}_s^{q+1}) \qquad ,$$

so gilt

$$(\tilde{F}, \tilde{G}) := (F_D, G_R) + \frac{\mathrm{i}}{\omega} M(F_{\mathcal{S}}, G_{\mathcal{S}}) \in {}_0\mathrm{D}_s^q \times {}_0\mathrm{R}_s^{q+1} \qquad .$$

Damit erhält man für (E, H) *die Zerlegung*

$$(E, H) = (1 - \varphi)(E, H) + (E_s, H_s) + (E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}}) + (E_\Delta, H_\Delta)$$

und eine Konstante $c > 0$ *, die nicht von* (E, H) *,* (F, G) *oder* ω *abhängt, wobei*

(i) $(1 - \varphi)(E, H) \in \mathrm{R}_{\mathrm{vox}}^q(\Omega) \times \mathrm{D}_{\mathrm{vox}}^{q+1}(\Omega)$ *und für alle* $\tilde{t} \in \mathbb{R}$

$$\big\|(1 - \varphi)(E, H)\big\|_{\mathrm{R}_{\tilde{t}}^q(\Omega) \times \mathrm{D}_{\tilde{t}}^{q+1}(\Omega)} \leq c \cdot \Big(\big\|(F, G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E, H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega}\Big) \qquad ,$$

(ii) $(E_s, H_s) := -\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\big((F_R, G_D) + (F_{\mathcal{S}}, G_{\mathcal{S}})\big) \in \mathrm{R}_s^q \times \mathrm{D}_s^{q+1}$ *und*

$$\big\|(E_s, H_s)\big\|_{\mathrm{R}_s^q \times \mathrm{D}_s^{q+1}} \leq c \cdot \big\|(\hat{F}, \hat{G})\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} \qquad ,$$

(iii) $(E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}}) := \mathcal{F}^{-1}\big((1 + r^2)^{-1}(\mathrm{Id} - \mathrm{i}\,S)\mathcal{F}(\tilde{F}, \tilde{G})\big) \in (\mathbf{H}_s^{1,q} \cap {}_0\mathrm{D}_s^q) \times (\mathbf{H}_s^{1,q+1} \cap {}_0\mathrm{R}_s^{q+1})$ *und*

$$\big\|\!\big|(E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}})\big|\!\big\|_{1,s,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \big\|(\tilde{F}, \tilde{G})\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} \qquad ,$$

(iv) $(E_\Delta, H_\Delta) := (\tilde{E}, \tilde{H}) - (E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}}) \in (\mathbf{H}_t^{2,q} \cap {}_0\mathrm{D}_t^q) \times (\mathbf{H}_t^{2,q+1} \cap {}_0\mathrm{R}_t^{q+1})$ *und für alle* $\tilde{t} \leq t$

$$\big\|\!\big|(E_\Delta, H_\Delta)\big|\!\big\|_{2,\tilde{t},\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \Big(\big\|(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,\tilde{t},\mathbb{R}^N} + \big\|\!\big|(E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}})\big|\!\big\|_{1,\tilde{t},\mathbb{R}^N}\Big) \qquad .$$

Hierbei ist $(\tilde{E}, \tilde{H}) := -\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\big((F_D, G_R) - M\varphi(E, H)\big) \in (\mathbf{H}_t^{1,q} \cap {}_0\mathrm{D}_t^q) \times (\mathbf{H}_t^{1,q+1} \cap {}_0\mathrm{R}_t^{q+1})$ *.*

Dabei erfüllen diese Formen die Differentialgleichungen

- $(M + \mathrm{i}\,\omega)\varphi(E, H) = (\hat{F}, \hat{G}) \qquad ,$
- $(M + \mathrm{i}\,\omega)(\tilde{E}, \tilde{H}) = (\tilde{F}, \tilde{G}) \qquad ,$
- $(M + \mathrm{i}\,\omega)(E_\Delta, H_\Delta) = (1 - \mathrm{i}\,\omega)(E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}}) \qquad ,$
- $(M + 1)(E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}}) = (\tilde{F}, \tilde{G}) \qquad ,$
- $(\Delta + \omega^2)(E_\Delta, H_\Delta) = -(1 + \omega^2)(E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}}) + (1 - \mathrm{i}\,\omega)(\tilde{F}, \tilde{G}) \qquad .$

Außerdem haben wir für alle $\tilde{t} \leq t$ *und gleichmäßig bzgl.* $\lambda \in K$ *,* (E, H) *und* (F, G) *die folgenden Abschätzungen:*

- $\big\|(\tilde{F}, \tilde{G})\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \big\|(\hat{F}, \hat{G})\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N}$
- $\big\|(\hat{F}, \hat{G})\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \Big(\big\|(F, G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E, H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega}\Big)$
- $\big\|(E, H)\big\|_{\mathbf{R}_{\tilde{t}}^q(\Omega) \times \mathbf{D}_{\tilde{t}}^{q+1}(\Omega)} \leq c \cdot \Big(\big\|(F, G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E, H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega} + \big\|(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,\tilde{t},\mathbb{R}^N}\Big)$
- $\big\|(M - \mathrm{i}\,\lambda r^{-1} S)(E, H)\big\|_{0,\tilde{t},\Omega} \leq c \cdot \Big(\big\|(F, G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E, H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega} + \big\|(M - \mathrm{i}\,\lambda r^{-1} S)(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,\tilde{t},\mathbb{R}^N}\Big)$
- $\big\|(\Delta + \omega^2)(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \Big(\big\|(F, G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E, H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega}\Big)$

Beweis:
Aus $\varphi(E,H)\in\mathbf{R}_t^q\times\mathbf{D}_t^{q+1}$ folgen $(E,H)=(1-\varphi)(E,H)+\varphi(E,H)$ und

$$M\varphi(E,H)=\varphi M(E,H)+C_{M,\varphi}(E,H)=-\mathrm{i}\,\omega\Lambda\varphi(E,H)+\varphi(F,G)+C_{M,\varphi}(E,H)\qquad.$$

Hieraus erhalten wir mit $C_{M,\varphi}=\boldsymbol{\eta}'(\rho^{-1}\cdot r)\rho^{-1}r^{-1}S$

$$(M+\mathrm{i}\,\omega)\varphi(E,H)=(\hat{F},\hat{G})\in\mathrm{L}_s^{2,q}\times\mathrm{L}_s^{2,q+1}\qquad,\tag{4.3}$$

denn $\operatorname{supp}C_{M,\varphi}(E,H)$ ist kompakt und $t+\tau\geq s$. Mittels Lemma 2.12 zerlegen wir

$$(\hat{F},\hat{G})=(F_{\mathrm{R}},G_{\mathrm{D}})+(F_{\mathrm{D}},G_{\mathrm{R}})+(F_{\mathcal{S}},G_{\mathcal{S}})\in({}_0\mathrm{R}_s^q\times{}_0\mathrm{D}_s^{q+1})\dot{+}({}_0\mathrm{D}_s^q\times{}_0\mathrm{R}_s^{q+1})\dot{+}(\mathcal{S}_s^q\times\mathcal{S}_s^{q+1})\qquad.$$

Damit folgt aus (4.3)

$$\mathrm{i}\,\omega\varphi(E,H)=(F_{\mathrm{D}},G_{\mathrm{R}})-M\varphi(E,H)+(F_{\mathrm{R}},G_{\mathrm{D}})+(F_{\mathcal{S}},G_{\mathcal{S}})$$

und wir haben

- $(\tilde{E},\tilde{H})=-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\big((F_{\mathrm{D}},G_{\mathrm{R}})-M\varphi(E,H)\big)\in(\mathbf{R}_t^q\cap{}_0\mathrm{D}_t^q)\times(\mathbf{D}_t^{q+1}\cap{}_0\mathrm{R}_t^{q+1})\overset{\text{Satz 3.6}}{\subset}\mathbf{H}_t^{1,q}\times\mathbf{H}_t^{1,q+1}\qquad,$
- $(E_s,H_s)=-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\big((F_{\mathrm{R}},G_{\mathrm{D}})+(F_{\mathcal{S}},G_{\mathcal{S}})\big)\in\mathrm{R}_s^q\times\mathrm{D}_s^{q+1}$

sowie $\varphi(E,H)=(\tilde{E},\tilde{H})+(E_s,H_s)$. $\big($Im Fall $s<N/2$ gilt sogar $(F_{\mathcal{S}},G_{\mathcal{S}})=(0,0)$.$\big)$ Desweiteren ergibt sich

$$M(\tilde{E},\tilde{H})=M\varphi(E,H)-M(E_s,H_s)=-\mathrm{i}\,\omega(\tilde{E},\tilde{H})+(F_{\mathrm{D}},G_{\mathrm{R}})+\frac{\mathrm{i}}{\omega}M(F_{\mathcal{S}},G_{\mathcal{S}})\qquad,$$

d. h.

$$(M+\mathrm{i}\,\omega)(\tilde{E},\tilde{H})=(\tilde{F},\tilde{G})\in{}_0\mathrm{D}_s^q\times{}_0\mathrm{R}_s^{q+1}\qquad.$$

Nun wollen wir mit der Fouriertransformation $(M+1)^{-1}(\tilde{F},\tilde{G})$ definieren und setzen daher

$$\mathcal{F}(E_{\mathcal{F}},H_{\mathcal{F}})=(1+r^2)^{-1}(\mathrm{Id}-\mathrm{i}\,S)\mathcal{F}(\tilde{F},\tilde{G})\qquad.$$

Da $s\geq 0$, ist dies wohldefiniert. Aus $\mathcal{F}(\tilde{F},\tilde{G})\in\mathrm{L}^{2,q}\times\mathrm{L}^{2,q+1}$ folgt zunächst $\mathcal{F}(E_{\mathcal{F}},H_{\mathcal{F}})\in\mathrm{L}_1^{2,q}\times\mathrm{L}_1^{2,q+1}$ und mit (3.7)

$$(E_{\mathcal{F}},H_{\mathcal{F}})\in\mathfrak{H}_1^q\times\mathfrak{H}_1^{q+1}=\mathbf{H}^{1,q}\times\mathbf{H}^{1,q+1}\qquad.$$

Wegen $(\tilde{F},\tilde{G})\in\mathrm{L}_s^{2,q}\times\mathrm{L}_s^{2,q+1}$ haben wir desweiteren $\mathcal{F}(\tilde{F},\tilde{G})\in\mathfrak{H}_s^q\times\mathfrak{H}_s^{q+1}$. Nun resultieren die Komponenten von $\mathcal{F}(E_{\mathcal{F}},H_{\mathcal{F}})$ aus denen von $\mathcal{F}(\tilde{F},\tilde{G})$ durch Multiplikation mit beschränkten C^∞–Funktionen. Hieraus folgt $\Big($vgl. z. B. $\big[$[58], Lemma 3.2, Seite 71$\big]\Big)$

$$\mathcal{F}(E_{\mathcal{F}},H_{\mathcal{F}})\in\mathfrak{H}_s^q\times\mathfrak{H}_s^{q+1}$$

und somit $(E_{\mathcal{F}},H_{\mathcal{F}})\in\mathrm{L}_s^{2,q}\times\mathrm{L}_s^{2,q+1}$ sowie die Abschätzung

$$\big\|(E_{\mathcal{F}},H_{\mathcal{F}})\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N}\leq c\cdot\big\|(\tilde{F},\tilde{G})\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N}\qquad.$$

Mit (3.6) berechnen wir

$$\mathcal{F}(M+1)(E_{\mathcal{F}},H_{\mathcal{F}})=(1+r^2)^{-1}(\mathrm{Id}+\mathrm{i}\,S)(\mathrm{Id}-\mathrm{i}\,S)\mathcal{F}(\tilde{F},\tilde{G})=(1+r^2)^{-1}(\mathrm{Id}+S^2)\mathcal{F}(\tilde{F},\tilde{G})\qquad.$$

Aus $\operatorname{div}\tilde{F}=0$ und $\operatorname{rot}\tilde{G}=0$ folgen mit (3.3) und (3.4) $T\mathcal{F}\tilde{F}=0$ und $R\mathcal{F}\tilde{G}=0$. Daher ergibt sich (vgl. Bemerkung 2.2)

$$S^2\mathcal{F}(\tilde{F},\tilde{G})=\begin{bmatrix}TR&0\\0&RT\end{bmatrix}\mathcal{F}(\tilde{F},\tilde{G})=\begin{bmatrix}TR+RT&0\\0&RT+TR\end{bmatrix}\mathcal{F}(\tilde{F},\tilde{G})=r^2\mathcal{F}(\tilde{F},\tilde{G})\qquad.$$

Hieraus erhalten wir

$$\mathcal{F}(M+1)(E_{\mathcal{F}},H_{\mathcal{F}})=\mathcal{F}(\tilde{F},\tilde{G})\qquad\text{oder}\qquad(M+1)(E_{\mathcal{F}},H_{\mathcal{F}})=(\tilde{F},\tilde{G})\qquad.$$

Außerdem ist $(E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}}) \in (\mathbf{R}^q_s \cap {}_0\mathrm{D}^q_s) \times (\mathbf{D}^{q+1}_s \cap {}_0\mathrm{R}^{q+1}_s)$ und mit Satz 3.6

$$(E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}}) \in (\mathbf{H}^{1,q}_s \cap {}_0\mathrm{D}^q_s) \times (\mathbf{H}^{1,q+1}_s \cap {}_0\mathrm{R}^{q+1}_s) \qquad .$$

Schließlich haben wir

$$(E_\Delta, H_\Delta) = (\tilde{E}, \tilde{H}) - (E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}}) \in (\mathbf{H}^{1,q}_t \cap {}_0\mathrm{D}^q_t) \times (\mathbf{H}^{1,q+1}_t \cap {}_0\mathrm{R}^{q+1}_t)$$

und

$$(M + \mathrm{i}\,\omega)(E_\Delta, H_\Delta) = (1 - \mathrm{i}\,\omega)(E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}}) \qquad ,$$

so daß Satz 3.6

$$(E_\Delta, H_\Delta) \in (\mathbf{H}^{2,q}_t \cap {}_0\mathrm{D}^q_t) \times (\mathbf{H}^{2,q+1}_t \cap {}_0\mathrm{R}^{q+1}_t)$$

liefert. Desweiteren erfüllt (E_Δ, H_Δ) die Helmholtz–Gleichung

$$\begin{aligned}(\Delta + \omega^2)(E_\Delta, H_\Delta) &= (M - \mathrm{i}\,\omega)(M + \mathrm{i}\,\omega)(E_\Delta, H_\Delta) = (1 - \mathrm{i}\,\omega)(M - \mathrm{i}\,\omega)(E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}})\\ &= -(1 + \omega^2)(E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}}) + (1 - \mathrm{i}\,\omega)(\tilde{F}, \tilde{G}) \qquad .\end{aligned}$$

Die behaupteten Abschätzungen ergeben sich aus Satz 3.6 und der Stetigkeit der Projektionen in $\mathrm{L}^{2,q}_s$ auf ${}_0\mathrm{R}^q_s$, ${}_0\mathrm{D}^q_s$ bzw. $\mathcal{S}^q_s$. Man beachte hierbei, daß in jeder Norm

$$\big\| M(F_{\mathcal{S}}, G_{\mathcal{S}}) \big\| \leq c \cdot \big\| (F_{\mathcal{S}}, G_{\mathcal{S}}) \big\|$$

gilt, denn $\mathcal{S}^q_s \times \mathcal{S}^{q+1}_s$ ist endlichdimensional und M linear. ■

4.4 Die a–priori–Abschätzung

Als erstes zitieren wir eine a–priori–Abschätzung für den skalaren Helmholtz–Operator im Ganzraum $\big[$[52], Lemma 7$\big]$ $\Big($siehe auch Ikebe und Saito, [14], sowie Vogelsang, $\big[$[40], section 2$\big]\Big)$, nämlich das

Lemma 4.7
Seien $t < -1/2$, $s \in (1/2, 1)$ und $J \Subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Intervall. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $\omega \in \mathbb{C}_+$ mit $\omega^2 = \lambda^2 + \mathrm{i}\,\sigma\lambda$, $\lambda \in J$, $\sigma \in (0,1]$ und alle $f \in \mathrm{L}^2_s$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\big\| (\Delta + \omega^2)^{-1} f \big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} + \big\| \exp(-\,\mathrm{i}\,\lambda r)(\Delta + \omega^2)^{-1} f \big\|_{1,s-2,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \| f \|_{0,s,\mathbb{R}^N}$$

Wir benötigen noch das technische

Lemma 4.8
Für alle $t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{t} < t$ und alle $\theta > 0$ existieren eine Konstante $c > 0$ und ein Kompaktum $K \Subset \overline{\Omega}$, so daß für alle $u \in \mathrm{L}^{2,q}_t(\Omega)$ die Abschätzung

$$\| u \|_{0,\tilde{t},\Omega} \leq c \cdot \| u \|_{0,0,K} + \theta \cdot \| u \|_{0,t,\Omega}$$

gilt.

Beweis:
Da $\tilde{t} - t < 0$, gilt für hinreichend große $\delta > 0$

$$\| u \|^2_{0,\tilde{t},\Omega} = \big\| \rho^{\tilde{t}} u \big\|^2_{0,0,\Omega \cap U(0,\delta)} + \big\| \rho^{\tilde{t}-t} u \big\|^2_{0,t,A(\delta)} \leq c(\Omega, \tilde{t}, \delta) \cdot \| u \|^2_{0,0,\Omega \cap U(0,\delta)} + (1 + \delta^2)^{\tilde{t}-t} \cdot \| u \|^2_{0,t,A(\delta)} \qquad .$$

Wegen $\lim\limits_{\delta \to \infty} (1 + \delta^2)^{\tilde{t}-t} = 0$ erhalten wir die Behauptung. ■

Wir erhalten eine a–priori–Abschätzung für den Maxwell–Operator:

Satz 4.9
Seien $J \Subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Intervall, $t < -1/2$, $s \in (1/2, 1)$ und $\tau > 1$. Dann existieren Konstanten $c, \delta > 0$ und ein $\hat{t} > -1/2$, so daß für alle $\omega \in \mathbb{C}_+$ mit $\omega^2 = \lambda^2 + \mathrm{i}\,\sigma\lambda$, $\lambda \in J$, $\sigma \in (0,1]$ und $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\begin{aligned}&\big\| \mathcal{L}_\omega(F,G) \big\|_{\mathbf{R}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)} + \big\| (r^{-1} S + \mathrm{Id}) \mathcal{L}_\omega(F,G) \big\|_{0,\hat{t},\Omega}\\ &\qquad \leq c \cdot \Big(\big\| (F,G) \big\|_{0,s,\Omega} + \big\| \mathcal{L}_\omega(F,G) \big\|_{0,0,\Omega \cap U(0,\delta)} \Big)\end{aligned}$$

Beweis:
Beachte $(1/2, 1) \cap \mathbb{I} = \emptyset$!
Wir wenden Lemma 4.6 $\big($mit $s = s$, $t = 0$ und $(F_{\mathbb{S}}, G_{\mathbb{S}}) = (0,0)$, denn $s < 1 < N/2\big)$ an und zerlegen (F, G) , $(E, H) := \mathcal{L}_\omega(F, G)$ entsprechend. Dann erhalten wir

$$(E_\Delta, H_\Delta) \in \mathbf{H}^{2,q} \times \mathbf{H}^{2,q+1}$$

mit

$$(\Delta + \omega^2)(E_\Delta, H_\Delta) = -(1+\omega^2)(E_{\mathcal{F}}, H_{\mathcal{F}}) + (1 - \mathrm{i}\,\omega)(\tilde{F}, \tilde{G}) =: (F_\Delta, G_\Delta) \in \mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s \qquad .$$

Aus der Selbstadjungiertheit von $\Delta : \mathbf{H}^{2,q} \times \mathbf{H}^{2,q+1} \subset \mathrm{L}^{2,q} \times \mathrm{L}^{2,q+1} \longrightarrow \mathrm{L}^{2,q} \times \mathrm{L}^{2,q+1}$ und wegen $\omega^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ folgt

$$(\Delta + \omega^2)^{-1}(F_\Delta, G_\Delta) = (E_\Delta, H_\Delta) \qquad .$$

Wir wenden Lemma 4.7 komponentenweise auf (F_Δ, G_Δ) an und erhalten mit Lemma 4.6 gleichmäßig bzgl. (E_Δ, H_Δ) , (F_Δ, G_Δ) und ω und durch

$$M\big(\exp(-\mathrm{i}\,\lambda r)(E_\Delta, H_\Delta)\big) = \exp(-\mathrm{i}\,\lambda r)(M - \mathrm{i}\,\lambda r^{-1} S)(E_\Delta, H_\Delta)$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\big\|(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} + \big\|(M - \mathrm{i}\,\lambda r^{-1} S)(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,s-1,\mathbb{R}^N} \\
&\le c \cdot \Big(\big\|(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} + \big\|\exp(-\mathrm{i}\,\lambda r)(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{1,s-2,\mathbb{R}^N}\Big) \\
&\le c \cdot \big\|(F_\Delta, G_\Delta)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} \le c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E,H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega}\Big) \qquad .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Wir wollen aber den Term $\big\|(M - \mathrm{i}\,\omega r^{-1} S)(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,s-1,\mathbb{R}^N}$ abschätzen. Dazu benötigen wir eine zusätzliche Überlegung. Die Resolventenabschätzung liefert

$$\sigma|\lambda| \cdot \big\|(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,0,\mathbb{R}^N} \le \big\|(F_\Delta, G_\Delta)\big\|_{0,0,\mathbb{R}^N} \tag{4.5}$$

und wegen

$$\omega = |\lambda| \cdot \big(1 + (\sigma/\lambda)^2\big)^{1/4} \cdot \begin{cases} \exp(\mathrm{i}\,\varphi/2) & , \lambda > 0 \\ \exp\big(\mathrm{i}(\varphi/2 + \pi)\big) & , \lambda < 0 \end{cases} \qquad , \qquad \varphi := \arctan(\sigma/\lambda)$$

folgt $|\operatorname{Re}\omega| \ge |\lambda|\sqrt{2}/2$ und somit $|\omega + \lambda| \ge |\lambda|\sqrt{3/2}$. Mit dieser Abschätzung, (4.5) und

$$\omega - \lambda = \frac{\omega^2 - \lambda^2}{\omega + \lambda} = \frac{\mathrm{i}\,\sigma\lambda}{\omega + \lambda}$$

erhalten wir gleichmäßig bzgl. ω

$$\begin{aligned}
\big\|(M - \mathrm{i}\,\omega r^{-1} S)(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,s-1,\mathbb{R}^N} &\le \big\|(M - \mathrm{i}\,\lambda r^{-1} S)(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,s-1,\mathbb{R}^N} + c \cdot |\omega - \lambda| \cdot \big\|(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,s-1,\mathbb{R}^N} \\
&\le \big\|(M - \mathrm{i}\,\lambda r^{-1} S)(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,s-1,\mathbb{R}^N} + c \cdot |\lambda|^{-1} \cdot \big\|(F_\Delta, G_\Delta)\big\|_{0,0,\mathbb{R}^N} \qquad .
\end{aligned}$$

Kombinieren wir dies mit (4.4), ergibt sich mit Lemma 4.6 gleichmäßig bzgl. (E, H) , (F, G) und ω

$$\begin{aligned}
&\big\|(E,H)\big\|_{\mathbf{R}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)} + \big\|(M - \mathrm{i}\,\omega r^{-1} S)(E,H)\big\|_{0,s-1,\Omega} \\
&\le c \cdot \Big(\big\|(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} + \big\|(M - \mathrm{i}\,\omega r^{-1} S)(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,s-1,\mathbb{R}^N} + \big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E,H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega}\Big) \\
&\le c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E,H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega}\Big)
\end{aligned}$$

und wegen

$$(M - \mathrm{i}\,\omega r^{-1} S)(E,H) = -\,\mathrm{i}\,\omega(E,H) - \mathrm{i}\,\omega\hat{\Lambda}(E,H) + (F,G) - \mathrm{i}\,\omega\, r^{-1} S(E,H)$$

schließlich

$$\big\|(E,H)\big\|_{\mathbf{R}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)} + \big\|(r^{-1} S + \mathrm{Id})(E,H)\big\|_{0,s-1,\Omega} \le c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E,H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega}\Big) \qquad .$$

Aufgrund der Monotonie der gewichteten Normen können wir o. B. d. A. t so nahe bei $-1/2$ und s so nahe bei $1/2$ ansiedeln, daß

$$1 < s - t < \tau$$

gilt. Lemma 4.8 liefert dann die Behauptung. ■

4.5 Polynomiales Abklingen

Durch das Zerlegungslemma erzielen wir das polynomiale Abklingen sogar in dem Fall, daß Λ nur L^∞–Einträge besitzt. Dies gelingt EIDUS in [13] (siehe auch [24]) im Spezialfall der klassischen elektromagnetischen Theorie nur für Λ mit C^2–Einträgen. In [37] wird das polynomiale Abklingen von PICARD, WECK und WITSCH in diesem Spezialfall auch für L^∞–Matrizen ε und μ mittels eines ähnlichen Zerlegungsresultates erzielt.
Wir zitieren zunächst wieder von WECK und WITSCH aus [52] das

Lemma 4.10
Seien $-1/2 < t \leq s-1$ und $\nu \in J \Subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Intervall. Aus $u \in \mathrm{L}^2_t$ und $(\Delta + \nu^2)u =: f \in \mathrm{L}^2_s$ folgt schon $u \in \mathbf{H}^2_{s-1}$ und es existiert eine Konstante $c > 0$, die nicht von u, f oder ν abhängt, so daß die Abschätzung

$$\|u\|_{2,s-1,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \big(\|f\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \|u\|_{0,s-2,\mathbb{R}^N}\big)$$

erfüllt ist.

Wir gelangen zum

Satz 4.11
Seien $\omega \in J \Subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Intervall, $1/2 < s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$ und $\tau > 1$. Erfüllt $(E,H) \in \mathbf{R}^q_{>-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)$ die Maxwell–Gleichung

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E,H) =: (F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \qquad ,$$

so folgt $(E,H) \in \mathbf{R}^q_{s-1}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)$ und es existieren von (E,H), (F,G) oder ω unabhängige Konstanten $c, \delta > 0$, so daß die Abschätzung

$$\big\|(E,H)\big\|_{\mathbf{R}^q_{s-1}(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)} \leq c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E,H)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,\delta)}\Big)$$

gilt.

Beweis:
Sei $t > -1/2$ mit $(E,H) \in \mathbf{R}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)$. O. B. d. A. nehmen wir $t < s-1$ an.
`1. Fall:` $t+1 < s < t+\tau$
Wir zerlegen die Formen mit Hilfe von Lemma 4.6 und erhalten

$$(E_\Delta, H_\Delta) \in \mathbf{H}^{2,q}_t \times \mathbf{H}^{2,q+1}_t \qquad \text{mit} \qquad (\Delta + \omega^2)(E_\Delta, H_\Delta) \in {}_0\mathrm{D}^q_s \times {}_0\mathrm{R}^{q+1}_s \qquad .$$

Lemma 4.10 liefert

$$(E_\Delta, H_\Delta) \in \mathbf{H}^{2,q}_{s-1} \times \mathbf{H}^{2,q+1}_{s-1}$$

sowie mit einer Konstanten $c > 0$ unabhängig von (E_Δ, H_Δ), $(\Delta+\omega^2)(E_\Delta, H_\Delta)$ oder ω

$$\big\|(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{2,s-1,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \Big(\big\|(\Delta+\omega^2)(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \big\|(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,s-2,\mathbb{R}^N}\Big) \qquad .$$

Desweiteren ergibt sich aus Lemma 4.6

$$(E,H) \in \mathbf{R}^q_{s-1}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)$$

und die Abschätzung (o. B. d. A. $1 < \tau < 2$)

$$\begin{aligned}
\big\|(E,H)\big\|_{\mathbf{R}^q_{s-1}(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)} &\leq c \cdot \Big(\big\|(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,s-1,\mathbb{R}^N} + \big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E,H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega}\Big)\\
&\leq c \cdot \Big(\big\|(\Delta+\omega^2)(E_\Delta, H_\Delta)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E,H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega}\Big)\\
&\leq c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E,H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega}\Big) \qquad .
\end{aligned}$$

Da $s - \tau < s-1$, liefert Lemma 4.8 die Behauptung.
`2. Fall:` $s \geq t+\tau$
Mit $\alpha := \frac{\tau-1}{2} > 0$ wählen wir $\ell \in \mathbb{N}$, so daß $t+\tau+(\ell-1)\alpha \leq s \leq t+\tau+\ell\alpha$ gilt. Definieren wir dann für $k = 0, \dots, \ell$

$$t_k := t + k\alpha \qquad \text{und} \qquad s_k := t+1+(k+1)\alpha = t+\tau+(k-1)\alpha \leq s \qquad ,$$

so folgt

$$t_k + 1 < s_k < t_k + \tau \qquad .$$

Nun wenden wir wiederholt den 1. Fall an und erhalten schließlich

$$(E, H) \in \mathbf{R}^q_{s_\ell - 1}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_{s_\ell - 1}(\Omega) \qquad .$$

Gilt $s = s_\ell$, so sind wir fertig. Falls $s_\ell < s \leq t + \tau + \ell\alpha$, definieren wir noch $t_{\ell+1} := s_\ell - 1$. Dann gilt

$$t_{\ell+1} + 1 = s_\ell < s = t_{\ell+1} + s - s_\ell + 1 = t_{\ell+1} + s - t - (\ell + 1)\alpha \leq t_{\ell+1} + \tau - \alpha < t_{\ell+1} + \tau$$

und zum letzten Mal mit dem ersten Fall

$$(E, H) \in \mathbf{R}^q_{s-1}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \qquad .$$

Die Abschätzung erhalten wir dann wie im ersten Fall. ■

Bemerkung 4.12
Gilt in Satz 4.11 sogar $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)$ *für alle* $s \in \mathbb{R}$, *so folgt für alle* $s \in \mathbb{R}$

$$(E, H) \in \mathbf{R}^q_s(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_s(\Omega) \qquad .$$

Dies ist z. B. bei $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{vox}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{vox}}(\Omega)$ *der Fall.*

4.6 Exponentielles Abklingen

Obwohl das exponentielle Abklingen der Eigenlösungen zum Beweis der Lösungstheorie nicht notwendig ist, werden wir es hier als Zugabe unter stärkeren Regularitätsbedingungen an Λ beweisen. Wir übertragen hier im wesentlichen die Ergebnisse von Eidus aus [13] (bzw. [24]), in denen der Fall der klassischen Maxwell–Gleichung behandelt wird, auf q–Formen. Hierbei werden die gleichen Techniken zum Ziel führen.
In diesem Abschnitt fordern wir zusätzlich

$$(\varepsilon, \mu) \in \mathrm{C}^{2,q}(\Xi) \times \mathrm{C}^{2,q+1}(\Xi)$$

mit beschränkten Ableitungen für ein weiteres Außengebiet $\Xi \subset \Omega$. Man beachte hier, daß wir nach wie vor das Abklingen nur von ε, μ und nicht von deren Ableitungen fordern. Desweiteren seien auch die Daten entsprechend regulär, d. h.

$$(F, G) \in \mathrm{H}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Xi) \times \mathrm{H}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(\Xi) \qquad .$$

Lemma 4.13
Seien $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *und* $(E, H) \in \mathrm{R}^q_{\mathrm{loc}}(\Xi) \times \mathrm{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\Xi)$ *mit*

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E, H) = (F, G) \qquad .$$

Dann gelten mit $(\tilde{F}, \tilde{G}) := (F, G) - \mathrm{i}\,\omega\hat{\Lambda}(E, H)$ *in* Ξ

(i) $\quad (E, H) \in \mathrm{H}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Xi) \times \mathrm{H}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(\Xi) \quad ,$

(ii) $\quad \operatorname{div} E = -\dfrac{\mathrm{i}}{\omega} \operatorname{div} \tilde{F} \quad$ *und* $\quad \operatorname{rot} H = -\dfrac{\mathrm{i}}{\omega} \operatorname{rot} \tilde{G} \quad ,$

(iii) $\quad (\Delta + \omega^2)(E, H) = \Big(M - \mathrm{i}\,\omega - \dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\Box\Big)(\tilde{F}, \tilde{G}) \quad$ *, wobei* $\Box := \Delta - M^2 = \begin{bmatrix} \operatorname{rot}\operatorname{div} & 0 \\ 0 & \operatorname{div}\operatorname{rot} \end{bmatrix}$.

Beweis:
(i) erhält man mit einer üblichen Abschneidetechnik und Satz 3.6 sowie Bemerkung 3.9.
Zunächst ist $(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E, H) = (F, G)$ äquivalent zu

$$(M + \mathrm{i}\,\omega)(E, H) = (F, G) - \mathrm{i}\,\omega\hat{\Lambda}(E, H) = (\tilde{F}, \tilde{G}) \qquad . \tag{4.6}$$

Hieraus erhält man **(ii)** durch Anwendung der Divergenz bzw. Rotation auf die erste bzw. zweite Komponente.
Wenden wir $M - \mathrm{i}\,\omega$ auf (4.6) an, erhalten wir

$$(M^2 + \omega^2)(E, H) = (M - \mathrm{i}\,\omega)(\tilde{F}, \tilde{G}) \qquad .$$

Wegen $M^2 = \begin{bmatrix} \operatorname{div}\operatorname{rot} & 0 \\ 0 & \operatorname{rot}\operatorname{div} \end{bmatrix} = \Delta - \Box$ und **(ii)** ergibt sich hieraus **(iii)**. ■

Durch einfaches Nachrechnen erhalten wir das

Lemma 4.14
Sofern die folgenden Operationen durchführbar sind, gelten für $m \in \mathbb{R}$:

$$\textbf{(i)} \qquad C_{\nabla,r^m} = \frac{m}{r} r^{m-1} \mathcal{X} \qquad , \qquad C_{\Delta,r^m} = \Big(2\frac{m}{r}\partial_r - \frac{m(m+2-N)}{r^2} \Big) r^m$$

$$\textbf{(ii)} \qquad C_{\mathrm{rot},r^m} = \frac{m}{r} r^{m-1} R \qquad , \qquad C_{\mathrm{div},r^m} = \frac{m}{r} r^{m-1} T \qquad , \qquad C_{M,r^m} = \frac{m}{r} r^{m-1} S$$

$$\textbf{(iii)} \qquad C_{\mathrm{div}\,\mathrm{rot},r^m} = \Big(\frac{m}{r}\big(r^{-1} T \,\mathrm{rot} + \mathrm{div}\, r^{-1} R \big) - \frac{m(m+1)}{r^2} r^{-2} T R \Big) r^m$$

$$\textbf{(iii')} \qquad C_{\mathrm{rot}\,\mathrm{div},r^m} = \Big(\frac{m}{r}\big(r^{-1} R \,\mathrm{div} + \mathrm{rot}\, r^{-1} T \big) - \frac{m(m+1)}{r^2} r^{-2} R T \Big) r^m$$

$$\textbf{(iv)} \qquad C_{\Delta,r^m} = \Big(\frac{m}{r}\big(r^{-1}(T \,\mathrm{rot} + R \,\mathrm{div}) + (\mathrm{div}\, r^{-1} R + \mathrm{rot}\, r^{-1} T) \big) - \frac{m(m+1)}{r^2} \Big) r^m$$

$$\textbf{(v)} \qquad C_{\Box,r^m} = \Big(\frac{m}{r} \begin{bmatrix} r^{-1} R \,\mathrm{div} + \mathrm{rot}\, r^{-1} T & 0 \\ 0 & r^{-1} T \,\mathrm{rot} + \mathrm{div}\, r^{-1} R \end{bmatrix} - \frac{m(m+1)}{r^2} r^{-2} \begin{bmatrix} RT & 0 \\ 0 & TR \end{bmatrix} \Big) r^m$$

Bemerkung 4.15
Ein Vergleich der Δ–Terme in obigem Lemma liefert die für sich interessante Formel

$$\frac{N-1}{r} + 2\partial_r = r^{-1} T \,\mathrm{rot} + r^{-1} R \,\mathrm{div} + \mathrm{div}\, r^{-1} R + \mathrm{rot}\, r^{-1} T \qquad .$$

Hier ist ∂_r komponentenweise bzgl. kartesischer Koordinaten zu verstehen.

Nun definieren wir für $m \in \mathbb{R}$ gewichtete Formen

$$(e,h) := r^m (E,H) \qquad , \qquad (f,g) := r^m (F,G)$$

und bestimmen, welche Gleichung sie in Ξ lösen. Aus Lemma 4.13 (iii) folgt nach Multiplikation mit r^m mit Hilfe der Kommutatorrelationen aus Lemma 4.14

$$\begin{aligned}
&\Big(\Delta + \omega^2 + \frac{m(m+2-N)}{r^2} \Big)(e,h) - 2\frac{m}{r}\partial_r (e,h) \\
= \;& r^m \cdot \Big(M - \mathrm{i}\,\omega - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\Box \Big)(\tilde{F},\tilde{G}) \\
= \;& \Big(M - \mathrm{i}\,\omega - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\Box \Big)\big((f,g) - \mathrm{i}\,\omega\hat{\Lambda}(e,h) \big) + \Big(-C_{M,r^m} + \frac{\mathrm{i}}{\omega} C_{\Box,r^m} \Big)(\tilde{F},\tilde{G}) \\
= \;& \Big(M - \mathrm{i}\,\omega - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\Box - \frac{m}{r} r^{-1} S \Big)\big((f,g) - \mathrm{i}\,\omega\hat{\Lambda}(e,h) \big) \\
& + \frac{\mathrm{i}}{\omega}\Big(\frac{m}{r} \begin{bmatrix} r^{-1} R \,\mathrm{div} + \mathrm{rot}\, r^{-1} T & 0 \\ 0 & r^{-1} T \,\mathrm{rot} + \mathrm{div}\, r^{-1} R \end{bmatrix} \Big)\big((f,g) - \mathrm{i}\,\omega\hat{\Lambda}(e,h) \big) \\
& - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\Big(\frac{m(m+1)}{r^2} r^{-2} \begin{bmatrix} RT & 0 \\ 0 & TR \end{bmatrix} \Big)\big((f,g) - \mathrm{i}\,\omega\hat{\Lambda}(e,h) \big) \\
=: \;& (\tilde{f},\tilde{g}) \qquad .
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Lemma 4.16
Seien $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau > 1$ und $(E,H) \in \mathbf{R}^q_{>-\frac{1}{2}}(\Xi) \times \mathbf{D}^{q+1}_{>-\frac{1}{2}}(\Xi)$ mit

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E,H) = (F,G) \in \mathbf{H}^{2,q}_s(\Xi) \times \mathbf{H}^{2,q+1}_s(\Xi) \qquad \textit{für alle } s \in \mathbb{R}$$

und $\varphi_\rho := \boldsymbol{\eta}(r - \rho + 1)$.
Dann folgt für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle Außengebiete $\tilde{\Xi} \subset \Xi$ mit $\mathrm{dist}(\tilde{\Xi},\partial\Xi) > 0$

$$(E,H) \in \mathbf{H}^{2,q}_s(\tilde{\Xi}) \times \mathbf{H}^{2,q+1}_s(\tilde{\Xi}) \qquad .$$

Desweiteren gibt es für alle $p, p', \ell \in \mathbb{R}$ mit $p' > p$ und $\ell > 2$ eine Konstante $c > 0$ und eine nichtnegative Funktion δ mit $\lim_{t\to\infty} \delta(t) = 0$, so daß für alle $m \in \mathbb{R}$ und $\sigma, \rho \in \mathbb{R}_+$ mit $A(\rho) \subset \Xi$ die folgenden Abschätzungen gelten $\big($c und δ dürfen also von (E,H) , (F,G) , Λ , ω , p, p' und ℓ abhängen, aber nicht von m oder σ !$\big)$:

(i)
$$\begin{aligned}\Big| -\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p \Big(\omega^2 + \frac{m(m+p)+p/2(p+N-2)}{r^2}\Big)\big|(e,h)\big|^2\, d\lambda \\ + \sum_{|\alpha|=1} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p \big|\partial^\alpha(e,h)\big|^2\, d\lambda\Big| \\ \le \Big|\big\langle(\tilde f,\tilde g), \varphi_\rho r^p (e,h)\big\rangle_{\mathbb{R}^N}\Big| + c\cdot m(\rho+1)^{2m+p}\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\Big| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \Big(N\omega^2 + \frac{m(m+2-N)(N-2)}{r^2}\Big)\big|(e,h)\big|^2\, d\lambda \\ - (N-2)\sum_{|\alpha|=1} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big|\partial^\alpha(e,h)\big|^2\, d\lambda \\ + 4m \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big|\partial_r(e,h)\big|^2\, d\lambda\Big| \\ \le \Big|\operatorname{Re}\big\langle(\tilde f,\tilde g), \varphi_\rho r\partial_r (e,h)\big\rangle_{\mathbb{R}^N}\Big| + c\cdot m^2(\rho+1)^{2m+1}\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}\Big|\big\langle(\tilde f,\tilde g), \varphi_\rho r^p (e,h)\big\rangle_{\mathbb{R}^N}\Big| \le \delta(\rho)\cdot\Big(m(\rho+1)^{2m+p} + \sum_{|\alpha|\le 2}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p \big|\partial^\alpha(e,h)\big|^2\, d\lambda \\ + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^{p'} \big|(f,g)\big|^2\, d\lambda + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p \frac{m^4}{r^4}\big|(e,h)\big|^2\, d\lambda\Big)\end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned}\Big|\big\langle(\tilde f,\tilde g), \varphi_\rho r^p (e,h)\big\rangle_{\mathbb{R}^N}\Big| \le \delta(\rho)\cdot\Big(m(\rho+1)^{2m+p} + \sum_{|\alpha|\le 1}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p \big|\partial^\alpha(e,h)\big|^2\, d\lambda \\ + \sum_{|\alpha|\le 1}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^{p'} \big|\partial^\alpha(f,g)\big|^2\, d\lambda \\ + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p \frac{m^4}{r^4}\big|(e,h)\big|^2\, d\lambda\Big) \\ + c\cdot\sigma\cdot \sum_{|\alpha|=1}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p \big|\partial^\alpha(e,h)\big|^2\, d\lambda \\ + c\cdot\sigma^{-1}\cdot \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p \big|(e,h)\big|^2\, d\lambda\end{aligned}$$

(v)
$$\begin{aligned}\Big|\operatorname{Re}\big\langle(\tilde f,\tilde g), \varphi_\rho r\partial_r (e,h)\big\rangle_{\mathbb{R}^N}\Big| \le \delta(\rho)\cdot\Big(m^2(\rho+1)^{2m+1} + \sum_{|\alpha|\le 2}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big|\partial^\alpha(e,h)\big|^2\, d\lambda \\ + \sum_{|\alpha|\le 2}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^{\ell} \big|\partial^\alpha(f,g)\big|^2\, d\lambda \\ + \sum_{|\alpha|\le 1}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \frac{m^4}{r^4}\big|\partial^\alpha(e,h)\big|^2\, d\lambda\Big)\end{aligned}$$

Beweis:
Nach Satz 4.11 bzw. Bemerkung 4.12 erhalten wir für alle $s \in \mathbb{R}$

$$(E,H) \in \mathbf{R}^q_s(\Xi) \times \mathbf{D}^{q+1}_s(\Xi)$$

und durch Korollar 3.8 sowie Bemerkung 3.9 für alle $s \in \mathbb{R}$

$$(E,H) \in \mathbf{H}^{2,q}_s(\tilde\Xi) \times \mathbf{H}^{2,q+1}_s(\tilde\Xi) \qquad .$$

Damit sind (e, h) und (f, g) für alle $m \in \mathbb{R}$ wohldefinierte Elemente von $\mathbf{H}^{2,q}(\tilde{\Xi}) \times \mathbf{H}^{2,q+1}(\tilde{\Xi})$.
Multiplikation von (4.7) mit $\varphi_\rho r^p(e, h)$ für $p \in \mathbb{R}$ bzw. $\varphi_\rho r\partial_r(e, h)$ im $\mathbb{R}^N$–Skalarprodukt liefert

$$\Big\langle \Big(\Delta + \omega^2 + \frac{m(m+2-N)}{r^2}\Big)(e,h) - 2\frac{m}{r}\partial_r(e,h), \varphi_\rho r^p(e,h)\Big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \big\langle(\tilde{f},\tilde{g}), \varphi_\rho r^p(e,h)\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \tag{4.8}$$

bzw.

$$\Big\langle \Big(\Delta + \omega^2 + \frac{m(m+2-N)}{r^2}\Big)(e,h) - 2\frac{m}{r}\partial_r(e,h), \varphi_\rho r\partial_r(e,h)\Big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \big\langle(\tilde{f},\tilde{g}), \varphi_\rho r\partial_r(e,h)\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \quad . \tag{4.9}$$

Nun erhalten wir **(i)** bzw. **(ii)** aus (4.8) bzw. (4.9) durch partielle Integration und der Eigenschaft

$$\operatorname{supp} \nabla\varphi_\rho \subset Z(\rho, \rho+1) \quad .$$

Wir bekommen die Abschätzung **(iii)**, indem wir durch wiederholte partielle Integration die Ableitungen von $\hat{\Lambda}(e, h)$ bzw. (f, g) wegschaufeln und das Abklingen von $\hat{\Lambda}$ bzw. die Integrierbarkeit von (f, g) ausnutzen. Bei **(iv)** dürfen wir keine zweiten Ableitungen mehr auf (e, h) lassen, so daß wir in die Abschätzung ein σ einfügen müssen, da wir kein Abklingen der Ableitungen von $\hat{\Lambda}$ verlangen. In der Abschätzung **(v)** tritt ein schwieriger Term auf, nämlich

$$\operatorname{Re}\big\langle\Box\hat{\Lambda}(e,h), \varphi_\rho r\partial_r(e,h)\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\operatorname{Re}\big\langle \operatorname{div}\hat{\varepsilon}e, \operatorname{div}(\varphi_\rho r\partial_r e)\big\rangle_{\mathbb{R}^N} - \operatorname{Re}\big\langle \operatorname{rot}\hat{\mu}h, \operatorname{rot}(\varphi_\rho r\partial_r h)\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \quad .$$

Der Anteil des ersten Summandens, der die größten Schwierigkeiten verursacht, ist

$$\operatorname{Re}\big\langle \operatorname{div}\hat{\varepsilon}e, \varphi_\rho r\partial_r \operatorname{div} e\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \quad ,$$

denn wir können hier nicht mehr partiell integrieren, da e nur zweimal schwach differenzierbar ist. Hier bestimmen wir aus Lemma 4.13 (ii) mit Lemma 4.14

$$\operatorname{div} e = \frac{m}{r}r^{-1}Te - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\big(\operatorname{div} - \frac{m}{r}r^{-1}T\big)f - \big(\operatorname{div} - \frac{m}{r}r^{-1}T\big)\hat{\varepsilon}e$$

und setzen dies ein, so daß wir den schwierigsten Term durch

$$\operatorname{Re}\big\langle \operatorname{div}\hat{\varepsilon}e, \varphi_\rho r\partial_r \operatorname{div}\hat{\varepsilon}e\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r\partial_r |\operatorname{div}\hat{\varepsilon}e|^2 \, d\lambda$$

behandeln können, denn dieser läßt sich nun mit zwei partiellen Integrationen einfach abschätzen. Der zweite Summand $\operatorname{Re}\big\langle \operatorname{rot}\hat{\mu}h, \operatorname{rot}(\varphi_\rho r\partial_r h)\big\rangle_{\mathbb{R}^N}$ wird analog behandelt. ■

Durch partielle Integration und Approximation in $\mathrm{C}_0^{\infty,q}(\Xi)$ erhalten wir das

Lemma 4.17
Für alle $p \in \mathbb{R}$ existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $u \in \mathbf{H}^{2,q}_{\frac{p}{2}}(\Xi)$ und ρ mit $A(\rho) \subset \Xi$

$$\sum_{|\alpha|=2}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p |\partial^\alpha u|^2 \, d\lambda \le c \cdot \int_{A(\rho)} r^p \Big(\sum_{|\alpha|=1} |\partial^\alpha u|^2 + |\Delta u|^2\Big)\, d\lambda$$

gilt.

Kommen wir zur eigentlichen Abschätzung. Unser Ziel ist es, eine Exponentialreihe abzuschätzen.
Alle Konstanten c und die Funktion δ hängen im folgenden nicht von m ab. Wir multiplizieren Lemma 4.16 (i) für $p = 0$ mit $N - 2$, kombinieren dies geeignet mit Lemma 4.16 (ii) und erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \Big(2\omega^2 - \frac{m(N-2)^2}{r^2}\Big)\big|(e,h)\big|^2 \, d\lambda + 4m\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big|\partial_r(e,h)\big|^2 \, d\lambda \\
&\le c \cdot \Big(\Big|\big\langle(\tilde{f},\tilde{g}), \varphi_\rho(e,h)\big\rangle_{\mathbb{R}^N}\Big| + \Big|\operatorname{Re}\big\langle(\tilde{f},\tilde{g}), \varphi_\rho r\partial_r(e,h)\big\rangle_{\mathbb{R}^N}\Big| + m^2(\rho+1)^{2m+1}\Big) \quad .
\end{aligned}$$

Dann schätzen wir mit Hilfe von Lemma 4.16 (iii) und (v) weiter ab:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big|(e,h)\big|^2 \, d\lambda \\
&\leq c \cdot \Big(\Big| \big\langle (\tilde{f},\tilde{g}), \varphi_\rho (e,h) \big\rangle_{\mathbb{R}^N} \Big| + \Big| \operatorname{Re} \big\langle (\tilde{f},\tilde{g}), \varphi_\rho r \partial_r (e,h) \big\rangle_{\mathbb{R}^N} \Big| + m^2 (\rho+1)^{2m+1} \Big) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \frac{1}{r} \frac{m(N-2)^2}{r} \big|(e,h)\big|^2 \, d\lambda \\
&\leq \delta(\rho) \cdot \Big(\sum_{|\alpha|\leq 2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big|\partial^\alpha (e,h)\big|^2 \, d\lambda + \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \frac{m^4}{r^4} \big|\partial^\alpha (e,h)\big|^2 \, d\lambda \\
&\quad + \sum_{|\alpha|\leq 2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^\ell \big|\partial^\alpha (f,g)\big|^2 \, d\lambda \Big) + c \cdot m^2 (\rho+1)^{2m+1}
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Nun schätzen wir mit Hilfe von Lemma 4.17 die zweiten Ableitungen von (e,h) durch die ersten und $\Delta(e,h)$ ab, setzen für $\Delta(e,h)$ die Gleichung (4.7) ein und erhalten für hinreichend große ρ

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big|\partial^\alpha (e,h)\big|^2 \, d\lambda \\
&\leq c \cdot \Big(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big(1 + \frac{m^4}{r^4}\big) \big|\partial^\alpha (e,h)\big|^2 \, d\lambda + \sum_{|\alpha|\leq 2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big(1 + \frac{m^4}{r^4}\big) \big|\partial^\alpha (f,g)\big|^2 \, d\lambda \Big) \\
&\quad + c \cdot m^4 (\rho+1)^{2m} \qquad .
\end{aligned}
$$

Dies setzen wir in (4.10) ein:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big|(e,h)\big|^2 \, d\lambda \\
&\leq \delta(\rho) \cdot \Big(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big(1 + \frac{m^4}{r^4}\big) \big|\partial^\alpha (e,h)\big|^2 \, d\lambda + \sum_{|\alpha|\leq 2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^\ell \big(1 + \frac{m^4}{r^4}\big) \big|\partial^\alpha (f,g)\big|^2 \, d\lambda \Big) \\
&\quad + c \cdot m^4 (\rho+1)^{2m+1}
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

Für alle $p \in \mathbb{R}$ liefert Lemma 4.16 (i) eine Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=1} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p \big|\partial^\alpha (e,h)\big|^2 \, d\lambda \\
&\leq c \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p \big(1 + \frac{m^2}{r^2}\big) \big|(e,h)\big|^2 \, d\lambda + c \cdot m (\rho+1)^{2m+p} + \Big| \big\langle (\tilde{f},\tilde{g}), \varphi_\rho r^p (e,h) \big\rangle_{\mathbb{R}^N} \Big| \qquad ,
\end{aligned}
$$

so daß mit Lemma 4.16 (iv) für genügend kleines σ und großes ρ

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=1} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p \big|\partial^\alpha (e,h)\big|^2 \, d\lambda \\
&\leq c \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^p \big(1 + \frac{m^4}{r^4}\big) \big|(e,h)\big|^2 \, d\lambda + c \cdot m (\rho+1)^{2m+p} + c \cdot \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho r^{p'} \big|\partial^\alpha (f,g)\big|^2 \, d\lambda
\end{aligned}
$$

folgt. Wir setzen diese Abschätzung der ersten Ableitungen für die Werte $p = 0$ und $p = -4$ in (4.11) ein (o. B. d. A. sei $0 < p' \leq \ell < 2$):

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big|(e,h)\big|^2 \, d\lambda \\
&\leq \delta(\rho) \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \big(1 + \frac{m^8}{r^8}\big) \big|(e,h)\big|^2 \, d\lambda + \sum_{|\alpha|\leq 2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho m^4 r^\ell \big|\partial^\alpha (f,g)\big|^2 \, d\lambda \Big) \\
&\quad + c \cdot m^5 (\rho+1)^{2m+1}
\end{aligned}
$$

Für genügend große ρ erhalten wir daher

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_\rho\big|(e,h)\big|^2\,d\lambda\\ &\leq\delta(\rho)\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_\rho\frac{m^8}{r^8}\big|(e,h)\big|^2\,d\lambda+\sum_{|\alpha|\leq2}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_\rho m^4r^\ell\big|\partial^\alpha(f,g)\big|^2\,d\lambda\Big)+c\cdot m^5(\rho+1)^{2m+1}\quad.\end{aligned}$$

Beachten wir, daß $\operatorname{supp}\big(1-\varphi_\rho\big)\big|_{A(\rho)}\subset Z(\rho,\rho+1)$ gilt, so folgt unabhängig von m

$$\begin{aligned}&\int_{A(\rho)}\big|(e,h)\big|^2\,d\lambda\\ &\leq\delta(\rho)\cdot\Big(\int_{A(\rho)}\frac{m^8}{r^8}\big|(e,h)\big|^2\,d\lambda+\sum_{|\alpha|\leq2}\int_{A(\rho)}m^4r^\ell\big|\partial^\alpha(f,g)\big|^2\,d\lambda\Big)+c\cdot m^5(\rho+1)^{2m+1}\quad.\end{aligned}$$

Wir transformieren nun wieder auf (E,H) und (F,G) und bekommen schließlich mit $k:=2m$ das

Lemma 4.18
Sind die Voraussetzungen von Lemma 4.16 erfüllt, so gilt für alle hinreichend großen ρ unabhängig von $k\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\int_{A(\rho)}r^k\big|(E,H)\big|^2\,d\lambda\\ &\leq\delta(\rho)\cdot k^8\cdot\Big(\int_{A(\rho)}r^{k-8}\big|(E,H)\big|^2\,d\lambda+\sum_{|\alpha|\leq2}\int_{A(\rho)}r^{k+\ell}\big|\partial^\alpha(F,G)\big|^2\,d\lambda\Big)+c\cdot k^5(\rho+1)^{k+1}\quad.\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir direkt das exponentielle Abklingen im

Satz 4.19
Seien $\omega\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\tau>1$ und $\exp(t\,r)\cdot(F,G)\in\mathbf{H}^{2,q}(\Xi)\times\mathbf{H}^{2,q+1}(\Xi)$ für alle $t\in\mathbb{R}$ sowie

$$(E,H)\in\mathbf{R}^q_{>-\frac12}(\Xi)\times\mathbf{D}^{q+1}_{>-\frac12}(\Xi)\qquad\textit{mit}\qquad(M+\mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E,H)=(F,G)\quad.$$

Dann folgt für alle $t\in\mathbb{R}$ und alle Außengebiete $\tilde{\Xi}\subset\Xi$ mit $\operatorname{dist}(\tilde{\Xi},\partial\Xi)>0$

$$\exp(t\,r)\cdot(E,H)\in\mathbf{H}^{2,q}(\tilde{\Xi})\times\mathbf{H}^{2,q+1}(\tilde{\Xi})\quad.$$

Beweis:
Sei $t\in\mathbb{R}_+$ beliebig. Wählen wir ρ groß genug, so daß Lemma 4.18 anwendbar ist, liefert dieses für natürliche Zahlen $K_1<K_2$:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=K_1}^{K_2}\frac{t^k}{k!}\int_{A(\rho)}r^k\big|(E,H)\big|^2\,d\lambda\\ &\leq\delta(\rho)\sum_{k=K_1}^{K_2}\frac{t^k}{k!}k^8\int_{A(\rho)}r^{k-8}\big|(E,H)\big|^2\,d\lambda+\delta(\rho)\sum_{k=K_1}^{K_2}\frac{t^k}{k!}\sum_{|\alpha|\leq2}\int_{A(\rho)}\underbrace{k^8r^{k+\ell}}_{\leq8^kr^kr^\ell}\big|\partial^\alpha(F,G)\big|^2\,d\lambda\\ &\quad+c\sum_{k=K_1}^{K_2}\frac{t^k}{k!}\underbrace{k^5(\rho+1)^{k+1}}_{\leq\left(5(\rho+1)\right)^k(\rho+1)}\\ &\leq\delta(\rho)\sum_{k=K_1}^{K_2}\frac{t^k}{(k-8)!}\int_{A(\rho)}r^{k-8}\big|(E,H)\big|^2\,d\lambda+\delta(\rho)\sum_{|\alpha|\leq2}\int_{A(\rho)}\sum_{k=K_1}^{K_2}\frac{(8tr)^k}{k!}r^\ell\big|\partial^\alpha(F,G)\big|^2\,d\lambda\\ &\quad+c\sum_{k=K_1}^{K_2}\frac{\big(5t(\rho+1)\big)^k}{k!}(\rho+1)\\ &\leq\delta(\rho)\sum_{k=K_1-8}^{K_2}\frac{t^{k+8}}{k!}\int_{A(\rho)}r^k\big|(E,H)\big|^2\,d\lambda+\delta(\rho)\sum_{|\alpha|\leq2}\int_{A(\rho)}\exp(8tr)r^\ell\big|\partial^\alpha(F,G)\big|^2\,d\lambda+c\,\mathrm{e}^{5t(\rho+1)}(\rho+1)\end{aligned}$$

Sei nun ρ so groß, daß etwa $\delta(\rho)\cdot t^8 \le 1/2$ gilt. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=K_1}^{K_2} \frac{t^k}{k!} \int_{A(\rho)} r^k \big|(E,H)\big|^2 \, d\lambda \\
&\le \delta(\rho) \sum_{k=K_1-8}^{K_1-1} \frac{t^{k+8}}{k!} \int_{A(\rho)} r^k \big|(E,H)\big|^2 \, d\lambda + \delta(\rho) \sum_{|\alpha|\le 2} \int_{A(\rho)} \exp\big((8t+1)r\big) \big|\partial^\alpha(F,G)\big|^2 \, d\lambda \\
&\quad + c \exp\big(5t(\rho+1)\big)(\rho+1) \qquad .
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist nun unabhängig von K_2, so daß der Satz von der monotonen Konvergenz

$$\int_{A(\rho)} \exp(t\,r)\cdot \big|(E,H)\big|^2 \, d\lambda < \infty \qquad \text{, d. h.} \qquad \exp\big(\frac{t}{2}\,r\big)\cdot(E,H) \in \mathrm{L}^{2,q}(\Xi)\times \mathrm{L}^{2,q+1}(\Xi) \qquad ,$$

liefert. Aus der Differentialgleichung bekommen wir für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(t\,r)M(E,H) \in \mathrm{L}^{2,q}(\Xi)\times \mathrm{L}^{2,q+1}(\Xi) \qquad .$$

Mit

- $\begin{aligned} M\big(\exp(t\,r)(E,H)\big) &= \exp(t\,r)M(E,H) + t\exp(t\,r)r^{-1}S(E,H) \in \mathrm{L}^{2,q}(\Xi)\times \mathrm{L}^{2,q+1}(\Xi) \\ &= \exp(t\,r)(F,G) - \mathrm{i}\,\omega\exp(t\,r)\Lambda(E,H) + t\exp(t\,r)r^{-1}S(E,H) \qquad , \end{aligned}$
- $\begin{aligned} \operatorname{div}\big(\exp(t\,r)\varepsilon E\big) &= \exp(t\,r)\operatorname{div}\varepsilon E + t\exp(t\,r)r^{-1}T\varepsilon E \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\exp(t\,r)\operatorname{div}F + t\exp(t\,r)r^{-1}T\varepsilon E \in \mathrm{L}^{2,q-1}(\Xi) \qquad , \end{aligned}$
- $\operatorname{rot}\big(\exp(t\,r)\mu H\big) = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\exp(t\,r)\operatorname{rot}G + t\exp(t\,r)r^{-1}R\mu H \in \mathrm{L}^{2,q+2}(\Xi)$

folgt zunächst durch Korollar 3.8 und Bemerkung 3.9 in einem Zwischengebiet $\hat{\Xi}$ mit $\tilde{\Xi}\subset\hat{\Xi}\subset\Xi$

$$\exp(t\,r)(E,H) \in \mathbf{H}^{1,q}(\hat{\Xi})\times\mathbf{H}^{1,q+1}(\hat{\Xi}) \qquad .$$

Dies liefert

- $M\big(\exp(t\,r)(E,H)\big) \in \mathbf{H}^{1,q}(\hat{\Xi})\times\mathbf{H}^{1,q+1}(\hat{\Xi}) \qquad ,$
- $\operatorname{div}\big(\exp(t\,r)\varepsilon E\big) \in \mathbf{H}^{1,q-1}(\hat{\Xi}) \qquad ,$
- $\operatorname{rot}\big(\exp(t\,r)\mu H\big) \in \mathbf{H}^{1,q+2}(\hat{\Xi}) \qquad ,$

so daß wir mit dem selben Argument $\exp(t\,r)(E,H)\in\mathbf{H}^{2,q}(\tilde{\Xi})\times\mathbf{H}^{2,q+1}(\tilde{\Xi})$ erhalten. ■

Bemerkung 4.20
Für $(F,G)\in\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{vox}}(\Xi)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{vox}}(\Xi)$ liefert Satz 4.19 für alle $t\in\mathbb{R}$ mit $\Xi' := \mathbb{R}^N\setminus\operatorname{supp}(F,G)$

$$\exp(t\,r)\cdot(E,H)\in\mathbf{H}^{2,q}(\Xi')\times\mathbf{H}^{2,q+1}(\Xi') \qquad .$$

4.7 Polynomiales und exponentielles Abklingen der Eigenlösungen

Um das polynomiale und exponentielle Abklingen der Eigenlösungen von $\mathrm{Max}(\Lambda,\omega,0,0)$ für $\omega\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ zu beweisen, genügt aufgrund der Vorarbeiten der letzten beiden Abschnitte der Nachweis, daß diese Elemente von $\mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)$ sind. Dies wird im wesentlichen die Strahlungsbedingung liefern. Doch zuerst zu einem technischen Lemma $\Big($vgl. mit $\big[$[37], Lemma 2.9$\big]$ von Picard, Weck und Witsch$\Big)$:

Lemma 4.21
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *mit* $\alpha < \beta$ *und* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset U(0,\alpha)$ *. Desweiteren seien* $(E,H) \in \mathring{\mathbf{R}}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)$ *mit einem* $t \in \mathbb{R}$ *und* $\varphi \in \mathrm{C}^0\big([\alpha,\beta],\mathbb{C}\big)$ *gegeben. Dann gilt für*

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & [0,\beta] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & \sigma & \longmapsto & \displaystyle\int_{\max\{\alpha,\sigma\}}^{\beta} \varphi(s)\,ds \end{array}$$

und mit $\Phi := \varphi \circ r$ *,* $\Psi := \psi \circ r$

$$\langle \Phi\, r^{-1} R E, H \rangle_{Z(\alpha,\beta)} = \langle \Psi \operatorname{rot} E, H \rangle_{\Omega\cap U(0,\beta)} + \langle \Psi E, \operatorname{div} H \rangle_{\Omega\cap U(0,\beta)} \qquad .$$

Beweis:
Sei $(E,H) \in \mathrm{C}^{\infty,q}_0(\Omega) \times \mathrm{C}^{\infty,q+1}(\Omega)$. ψ ist auf $[0,\alpha]$ konstant gleich $c := \displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi(s)\,ds$, auf (α,β) differenzierbar mit $\psi' = -\varphi$ und es gilt $\psi(\beta) = 0$. Mit dem Satz von Stokes erhalten wir daher

$$\begin{aligned} &\langle \Psi \operatorname{rot} E, H \rangle_{\Omega\cap U(0,\beta)} + \langle \Psi E, \operatorname{div} H \rangle_{\Omega\cap U(0,\beta)} \\ &= c \cdot \langle \operatorname{rot} E, H \rangle_{\Omega\cap U(0,\alpha)} + c \cdot \langle E, \operatorname{div} H \rangle_{\Omega\cap U(0,\alpha)} + \langle \Psi \operatorname{rot} E, H \rangle_{Z(\alpha,\beta)} + \langle \Psi E, \operatorname{div} H \rangle_{Z(\alpha,\beta)} \\ &= c \cdot \int_{S(0,\alpha)} \iota^*_\alpha (E \wedge *\overline{H}) + \langle \Phi\, r^{-1} R E, H \rangle_{Z(\alpha,\beta)} \\ &\quad - c \cdot \int_{S(0,\alpha)} \iota^*_\alpha (E \wedge *\overline{H}) + \psi(\beta) \cdot \int_{S(0,\beta)} \iota^*_\beta (E \wedge *\overline{H}) \qquad . \end{aligned}$$

Hierbei sei $\iota_r : S(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ die natürliche Einbettung des Randes.
Mit Hilfe von Glättungsoperatoren (beachte $\operatorname{supp} E \Subset \Omega\,!$) erhalten wir für alle $(E,H) \in \mathrm{C}^{\infty,q}_0(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)$

$$\langle \Phi\, r^{-1} R E, H \rangle_{Z(\alpha,\beta)} = \big\langle \Psi \operatorname{rot} E, H \big\rangle_{\Omega\cap U(0,\beta)} + \big\langle \Psi E, \operatorname{div} H \big\rangle_{\Omega\cap U(0,\beta)}$$

und schließlich aufgrund der Dichtheit von $\mathrm{C}^{\infty,q}_0(\Omega)$ in $\mathring{\mathbf{R}}^q_t(\Omega)$, siehe Lemma 3.1, die behauptete Identität für alle $(E,H) \in \mathring{\mathbf{R}}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)$. ∎

Satz 4.22
Seien $\tau > 1$ *und* $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *. Ist* (E,H) *Lösung zu* $\mathrm{Max}(\Lambda,\omega,0,0)$ *, so folgt*

$$(E,H) \in \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \big(\mathring{\mathbf{R}}^q_t(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathbf{D}^q_t(\Omega)\big) \times \big(\mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega) \cap \mu^{-1}{}_0\mathring{\mathbf{R}}^{q+1}_t(\Omega)\big) \qquad .$$

Gilt desweiteren $(\varepsilon,\mu) \in \mathrm{C}^{2,q}(\Xi) \times \mathrm{C}^{2,q+1}(\Xi)$ *mit beschränkten Ableitungen für ein weiteres Außengebiet* $\Xi \subset \Omega$ *, so liefert dies für alle* $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(t\,r) \cdot (E,H) \in \big(\mathring{\mathbf{R}}^q(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q(\Omega)\big) \times \big(\mathbf{D}^{q+1}(\Omega) \cap \mu^{-1}\mathring{\mathbf{R}}^{q+1}(\Omega)\big)$$

und für alle Außengebiete $\tilde{\Xi} \subset \Xi$ *mit* $\operatorname{dist}(\tilde{\Xi},\partial\Xi) > 0$

$$\exp(t\,r) \cdot (E,H) \in \mathbf{H}^{2,q}(\tilde{\Xi}) \times \mathbf{H}^{2,q+1}(\tilde{\Xi}) \qquad .$$

Beweis:
Satz 4.11, Bemerkung 4.12, Satz 4.19, Bemerkung 4.20 und die Differentialgleichung $M(E,H) = -\,\mathrm{i}\,\omega\Lambda(E,H)$ liefern die Behauptungen, falls wir

$$(E,H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)$$

zeigen können, denn

$$\overline{\operatorname{rot} \mathring{\mathbf{R}}^q(\Omega)} \subset {}_0\mathring{\mathbf{R}}^{q+1}(\Omega) \qquad \text{sowie} \qquad \overline{\operatorname{div} \mathbf{D}^{q+1}(\Omega)} \subset {}_0\mathbf{D}^q(\Omega) \qquad .$$

Die Strahlungsbedingung aus Definition 4.2 (iii) liefert für $\alpha < \beta$ mit $\mathbb{R}^N \setminus \Omega \Subset U(0,\alpha)$ ein $t > -1/2$, so daß

$$\lim_{\beta\to\infty} \big\| r^{-1} R E + H \big\|_{0,t,Z(\alpha,\beta)} < \infty$$

gilt. Wir multiplizieren dies aus und erhalten

$$\left\|r^{-1}RE+H\right\|^2_{0,t,Z(\alpha,\beta)} = \|r^{-1}RE\|^2_{0,t,Z(\alpha,\beta)} + \|H\|^2_{0,t,Z(\alpha,\beta)} + 2\,\mathrm{Re}\langle\Phi r^{-1}RE, H\rangle_{Z(\alpha,\beta)}$$

mit $\varphi(\sigma) := (1+\sigma^2)^t$ und $\Phi := \varphi\circ r$. Lemma 4.21, die Differentialgleichung und die Symmetrie von ε , μ liefern dann

$$\begin{aligned}\langle\Phi r^{-1}RE, H\rangle_{Z(\alpha,\beta)} &= \langle\Psi \operatorname{rot} E, H\rangle_{\Omega\cap U(0,\beta)} + \langle\Psi E, \operatorname{div} H\rangle_{\Omega\cap U(0,\beta)}\\ &= -\,\mathrm{i}\,\omega\,\underbrace{\langle\Psi\mu H, H\rangle_{\Omega\cap U(0,\beta)}}_{\in\mathbb{R}} + \mathrm{i}\,\omega\,\underbrace{\langle\Psi E, \varepsilon E\rangle_{\Omega\cap U(0,\beta)}}_{\in\mathbb{R}} \quad \in \mathrm{i}\cdot\mathbb{R} \qquad .\end{aligned}$$

Somit ist $\mathrm{Re}\langle\Phi r^{-1}RE, H\rangle_{Z(\alpha,\beta)} = 0$ und mit dem Satz von der monotonen Konvergenz bekommen wir im Limes $\beta\to\infty$

$$H \in \mathrm{L}^{2,q+1}_t(\Omega) \qquad .$$

Der zweite Teil der Strahlungsbedingung, $r^{-1}TH + E \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)$, liefert $E \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)$, d. h.

$$(E,H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega) \qquad .$$

■

4.8 Fredholmsche Alternative

Wir haben nun alle Hilfsmittel zusammen und Vorbereitungen getätigt, um die Lösungstheorie zu reellen Frequenzen (ungleich Null) zu beweisen. Das hier erreichte Resultat ist in seiner Struktur mit denjenigen von Weck und Witsch in [52] oder mit Picard in [37] bzw. in der Diplomarbeit [24] vergleichbar und es werden dieselben Methoden zum Ziel führen. Wie schon angekündigt wird uns das Prinzip der Grenzabsorption die Lösung liefern. Zur technischen Vorbereitung benötigen wir das

Lemma 4.23
Seien $(E,H) \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times \mathrm{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ *sowie* $\varphi_\rho := \mathbf{1} - \boldsymbol{\eta}(\rho^{-1}\,\cdot\,)$ *und* $\Phi_\rho := \varphi_\rho\circ r$ *. Dann gilt für alle* $\rho\in\mathbb{R}_+$

$$\langle\operatorname{rot} E, \Phi_\rho H\rangle_\Omega + \langle\Phi_\rho E, \operatorname{div} H\rangle_\Omega = -\big\langle\varphi_\rho'(r)r^{-1}RE, H\big\rangle_\Omega \qquad .$$

Ist zusätzlich $(E,H) \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_s(\Omega)$ *bzw.* $(E,H) \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_t(\Omega) \times \mathrm{D}^{q+1}_s(\Omega)$ *mit* $t,s\in\mathbb{R}$ *und* $t+s\geq 0$ *bzw.* $t+s\geq -1$ *, so folgt*

$$\langle\operatorname{rot} E, H\rangle_\Omega + \langle E, \operatorname{div} H\rangle_\Omega = 0 \qquad .$$

Beweis:
Wir haben $(\Phi_\rho E, H) \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) \times \mathrm{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ und damit

$$0 = \big\langle\operatorname{rot}(\Phi_\rho E), H\big\rangle_\Omega + \langle\Phi_\rho E, \operatorname{div} H\rangle_\Omega = \langle\Phi_\rho \operatorname{rot} E, H\rangle_\Omega + \langle\Phi_\rho E, \operatorname{div} H\rangle_\Omega + \big\langle\varphi_\rho'(r)r^{-1}RE, H\big\rangle_\Omega \qquad .$$

Sei nun $(E,H) \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_s(\Omega)$ bzw. $(E,H) \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_t(\Omega) \times \mathrm{D}^{q+1}_s(\Omega)$ mit den entsprechenden Bedingungen an t und s . Dann folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\langle\operatorname{rot} E, \Phi_\rho H\rangle_\Omega + \langle\Phi_\rho E, \operatorname{div} H\rangle_\Omega \xrightarrow{\rho\to\infty} \langle\operatorname{rot} E, H\rangle_\Omega + \langle E, \operatorname{div} H\rangle_\Omega$$

und

$$\begin{aligned}\left|\big\langle\varphi_\rho'(r)r^{-1}RE, H\big\rangle_\Omega\right| &= \frac{1}{\rho}\cdot\left|\big\langle\boldsymbol{\eta}'(\rho^{-1}r)r^{-1}RE, H\big\rangle_{Z(\rho,2\rho)}\right|\\ &\leq c\cdot\left|\langle r^{-1}r^{-1}RE, H\rangle_{A(\rho)}\right| \leq c\cdot\|E\|_{0,t,A(\rho)}\cdot\|H\|_{0,s,A(\rho)} \xrightarrow{\rho\to\infty} 0 \qquad .\end{aligned}$$

■

Bemerkung 4.24
Für $(E,H) \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)$ *bzw.* $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_t(\Omega) \times \mathrm{D}^{q+1}_t(\Omega)$ *und* $(e,h) \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_s(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_s(\Omega)$ *bzw.* $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_s(\Omega) \times \mathrm{D}^{q+1}_s(\Omega)$ *mit* $t+s\geq 0$ *bzw.* -1 *gilt*

$$\big\langle M(E,H),(e,h)\big\rangle_\Omega + \big\langle(E,H), M(e,h)\big\rangle_\Omega = 0 \qquad .$$

Ein weiterer wesentlicher Bestandteil der Lösungstheorie, welcher die Konvergenz bei der Grenzabsorption generiert, ist die Maxwellsche Kompaktheitseigenschaft (So wollen wir sie im folgenden nennen.). Diese ist eine lokale Eigenschaft des Gebietsrandes.

Definition 4.25
Ein Gebiet $\Xi \subset \mathbb{R}^N$ besitzt die „Maxwellsche Kompaktheitseigenschaft", kurz MKE*, falls für alle $q \in \{0,\dots,N\}$ die Einbettungen*

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Xi) \cap \mathbf{D}^q(\Xi) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}(\Xi)$$

kompakt sind. Ein Gebiet $\Xi \subset \mathbb{R}^N$ besitzt die „lokale Maxwellsche Kompaktheitseigenschaft", kurz LMKE*, falls für alle $q \in \{0,\dots,N\}$ die Einbettungen*

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Xi) \cap \mathbf{D}^q(\Xi) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Xi})$$

kompakt sind.

Zur MKE in beschränkten Gebieten existiert eine reichhaltige Literatur. Zuerst wurde die $\mathbf{H}^{1,q}$–Norm durch die $(\mathbf{R}^q \cap \mathbf{D}^q)$–Norm abgeschätzt (Gaffneysche Ungleichung) und dann mit dem Rellichschen Auswahlsatz argumentiert. Dazu benötigt man relativ glatte Ränder; siehe z. B. Leis, $\big[$[20], page 157, Theorem 8.6$\big]$. Im Fall $q = 0$ ist sogar $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{1,0}(\Xi) = \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^0(\Xi) = \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^0(\Xi) \cap \mathbf{D}^0(\Xi)$. In [44] gelang Weck erstmals ein Beweis der MKE für beschränkte Gebiete mit nichtglatten Rändern („Kegelgebiete"). Weitere Beweise der MKE finden wir bei Picard in [31] („Lipschitz–Gebiete") und im klassischen Fall bei Weber in [42] („Kegelbedingung") sowie Witsch in [57] („Spitzenbedingung"). Ein Beweis der MKE (im klassischen Fall) für beschränkte Gebiete, der die bisher größte Klasse von Rändern behandeln kann, wird von Picard, Weck und Witsch in [37] gegeben, wobei im wesentlichen die Techniken aus [44] mit denen aus [31] und [57] verknüpft werden.

Bemerkung 4.26

(i) *Beschränkte Gebiete mit Kegeleigenschaft, siehe [44], oder Lipschitz–Gebiete, siehe [31], besitzen die* MKE.

(ii) *Die* MKE *bzw.* LMKE *ist eine Eigenschaft des Gebietsrandes.*

(iii) *Seien $\varepsilon_q \in \mathrm{V}^{q,0}_0(\Xi)$ für alle $q \in \{0,\dots,N\}$ gegeben.*
Ξ besitzt genau dann die MKE *bzw.* LMKE*, wenn für alle $q \in \{0,\dots,N\}$ die Einbettungen*

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Xi) \cap \varepsilon_q^{-1}\mathbf{D}^q(\Xi) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}(\Xi) \qquad \textit{bzw.} \qquad \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Xi})$$

kompakt sind, d. h. die MKE *bzw.* LMKE *ist unabhängig von ε_q .*
Desweiteren besitzt Ξ genau dann die MKE *bzw.* LMKE*, wenn für alle $q \in \{0,\dots,N\}$ die Einbettungen*

$$\varepsilon_q^{-1}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Xi) \cap \mathbf{D}^q(\Xi) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}(\Xi) \qquad \textit{bzw.} \qquad \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Xi})$$

kompakt sind, denn aus $E \in \varepsilon_q^{-1}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Xi) \cap \mathbf{D}^q(\Xi)$ folgt $\varepsilon_q E \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Xi) \cap \varepsilon_q \mathbf{D}^q(\Xi)$ und ε_q^{-1} besitzt die gleichen Eigenschaften wie ε_q selbst.

(iv) *Für Außengebiete $\Xi \subset \mathbb{R}^N$ sind äquivalent:*

(a) *Ξ besitzt die* LMKE.

(b) *Für alle $r \geq r_0$ mit $\mathbb{R}^N \setminus \Xi \Subset U(0,r_0)$ besitzt $\Xi \cap U(0,r)$ die* MKE*, d. h. für alle $q \in \{0,\dots,N\}$ und alle $r \geq r_0$ sind die Einbettungen*

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q\big(\Xi \cap U(0,r)\big) \cap \mathbf{D}^q\big(\Xi \cap U(0,r)\big) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}\big(\Xi \cap U(0,r)\big)$$

kompakt.

(b′) *Für alle $r \geq r_0$ mit $\mathbb{R}^N \setminus \Xi \Subset U(0,r_0)$ und alle $\varepsilon_q \in \mathrm{V}^{q,0}_0(\Xi)$ sind für alle $q \in \{0,\dots,N\}$ die Einbettungen*

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q\big(\Xi \cap U(0,r)\big) \cap \varepsilon_q^{-1}\mathbf{D}^q\big(\Xi \cap U(0,r)\big) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}\big(\Xi \cap U(0,r)\big)$$

bzw.

$$\varepsilon_q^{-1}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q\big(\Xi \cap U(0,r)\big) \cap \mathbf{D}^q\big(\Xi \cap U(0,r)\big) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}\big(\Xi \cap U(0,r)\big)$$

kompakt.

(c) *Für alle $t, s \in \mathbb{R}$ mit $t < s$ und $q \in \{0, \dots, N\}$ sind die Einbettungen*

$$\mathring{\mathbf{R}}^q_s(\Xi) \cap \mathbf{D}^q_s(\Xi) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}_t(\Xi)$$

kompakt.

(c′) *Für alle $t, s \in \mathbb{R}$ mit $t < s$ und alle $\varepsilon_q \in \mathrm{V}^{q,0}_0(\Xi)$ sind für alle $q \in \{0, \dots, N\}$ die Einbettungen*

$$\mathring{\mathbf{R}}^q_s(\Xi) \cap \varepsilon_q^{-1} \mathbf{D}^q_s(\Xi) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}_t(\Xi)$$

bzw.

$$\varepsilon_q^{-1} \mathring{\mathbf{R}}^q_s(\Xi) \cap \mathbf{D}^q_s(\Xi) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,q}_t(\Xi)$$

kompakt.

Als Repräsentanten der Argumentationen bringen wir die
Beweisskizze zu (iv), (a) $\Leftrightarrow$ (c):

$\Leftarrow$: Eine in $\mathring{\mathbf{R}}^q(\Xi) \cap \mathbf{D}^q(\Xi)$ beschränkte Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält nach Voraussetzung (wir wählen $t < 0 =: s$) eine Teilfolge, die in $\mathrm{L}^{2,q}_t(\Xi)$ gegen ein $E \in \mathrm{L}^{2,q}_t(\Xi)$ konvergiert. Dann folgt insbesondere $E \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Xi})$ und die Konvergenz dieser Teilfolge in $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Xi})$ gegen E.

$\Rightarrow$: Eine in $\mathring{\mathbf{R}}^q_s(\Xi) \cap \mathbf{D}^q_s(\Xi)$ beschränkte Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält zunächst eine Teilfolge, die schwach in $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Xi)$, sogar in $\mathring{\mathbf{R}}^q_s(\Xi) \cap \mathbf{D}^q_s(\Xi)$, gegen ein $E \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Xi)$, sogar $E \in \mathring{\mathbf{R}}^q_s(\Xi) \cap \mathbf{D}^q_s(\Xi)$, konvergiert. Mittels einer Abschneidetechnik und der LMKE erhalten wir durch sukzessive Teilfolgenauswahl und Übergang zur Diagonalfolge eine Teilfolge $(E_{\pi n})_{n\in\mathbb{N}}$, die in $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Xi})$ gegen dasselbe E konvergiert. Dann gibt es nach Lemma 4.8 zu beliebigem $\delta > 0$ eine Konstante $c > 0$ und ein Kompaktum $K \subset \overline{\Xi}$, so daß gleichmäßig bzgl. n

$$\|E - E_{\pi n}\|_{0,t,\Xi} \leq c \cdot \underbrace{\|E - E_{\pi n}\|_{0,0,K}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \delta \cdot \underbrace{\|E - E_{\pi n}\|_{0,s,\Xi}}_{\text{beschränkt}}$$

gilt. Wir erhalten für beliebige $\delta \in \mathbb{R}_+$

$$\limsup_{n\to\infty} \|E - E_{\pi n}\|^2_{0,t,\Xi} \leq \delta \quad , \text{ d. h. } \quad E_{\pi n} \xrightarrow{n\to\infty} E \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^{2,q}_t(\Xi) \quad .$$

■

Zur Formulierung des Hauptresultates dieses Kapitels benötigen wir noch die

Definition 4.27
Wir definieren

$$\mathbb{P} := \big\{ \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathrm{Max}(\Lambda, \omega, 0, 0) \text{ besitzt eine nichttriviale Lösung.} \big\}$$

und für $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega) := \big\{ (E, H) : (E, H) \text{ löst } \mathrm{Max}(\Lambda, \omega, 0, 0)\,. \big\} \quad .$$

Bemerkung 4.28
Es gilt $\mathbb{P} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und für $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega) = N(\mathcal{M} - \omega) = \big\{ (0, 0) \big\} \quad .$$

Wir sind am Hauptresultat dieses Kapitels angelangt, der Lösungstheorie:

Satz 4.29
Sei $\tau > 1$ und Ω besitze die LMKE. *Dann gelten:*

(i) *Für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind*

$$\mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega) = N(\mathcal{M} - \omega) \subset \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \big(\mathring{\mathbf{R}}^q_t(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathbf{D}^q_t(\Omega) \big) \times \big(\mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega) \cap \mu^{-1}{}_0\mathring{\mathbf{R}}^{q+1}_t(\Omega) \big)$$

endlichdimensional.

(ii) *$\mathbb{P}$ besitzt in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ keinen Häufungspunkt.*

(iii) *Für alle $\omega\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und zu jedem $(F,G)\in\mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}}(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}}(\Omega)$ existiert genau dann eine Lösung (E,H) von $\mathrm{Max}(\Lambda,\omega,F,G)$, wenn für alle $(e,h)\in\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)$*

$$\big\langle (F,G),(e,h)\big\rangle_\Omega=0 \tag{4.12}$$

gilt. Die Lösung kann so gewählt werden, daß für alle $(e,h)\in\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)$

$$\big\langle \Lambda(E,H),(e,h)\big\rangle_\Omega=0 \tag{4.13}$$

erfüllt ist und sie ist dadurch eindeutig bestimmt.

(iv) *Der Lösungsoperator aus* **(iii)**, *welchen wir wie denjenigen in Satz 4.5 auf $\mathcal{L}_\omega$ taufen, bildet für alle $s>1/2$ und $t<-1/2$*

$$\big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)\big)\cap\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)^\perp$$

stetig nach

$$\big(\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_t(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)\big)\cap\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)^{\perp_\Lambda}$$

ab, d. h. zu jedem $\omega\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und allen $s,-t>1/2$ existiert eine Konstante $c=c(\omega,t,s)>0$, so daß für alle

$$(F,G)\in\big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)\big)\cap\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)^\perp$$

die Abschätzung

$$\big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{\mathbf{R}^q_t(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)}\le c\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega}$$

gilt.
Hier bezeichne $\perp_\Lambda$ die Orthogonalität bzgl. des $\langle\Lambda\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\Omega$–Skalarproduktes.

Beweis:
Das polynomiale Abklingen der Eigenlösungen haben wir schon in Satz 4.22 gezeigt.
Wären **(i)** oder **(ii)** falsch, so existierten Folgen $(\omega_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $\big((E_\ell,H_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}\subset N(\mathcal{M}-\omega_\ell)$, so daß $\omega_\ell\xrightarrow{\ell\to\infty}\omega\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $\big((E_\ell,H_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ ein Λ–ONS wäre.
Im Fall **(i)** ist dies klar. Im Fall **(ii)** könnten wir o. B. d. A. $\omega_\ell\neq\omega_k$ für $\ell\neq k$ wählen und mit Bemerkung 4.24 und dem polynomialen Abklingen der Eigenlösungen erhielten wir

$$\mathrm{i}(\underbrace{\omega_k-\omega_\ell}_{\neq 0})\big\langle\Lambda(E_\ell,H_\ell),(E_k,H_k)\big\rangle_\Omega=\big\langle M(E_\ell,H_\ell),(E_k,H_k)\big\rangle_\Omega+\big\langle (E_\ell,H_\ell),M(E_k,H_k)\big\rangle_\Omega=0 \quad .$$

Durch Normierung der Eigenlösungen bekämen wir ein Λ–ONS.
Als ONS konvergiert $\big((E_\ell,H_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ schwach in $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega)$ gegen Null. Desweiteren ist $\big((E_\ell,H_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ in

$$\big(\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Omega)\cap\varepsilon^{-1}{}_0\mathbf{D}^q(\Omega)\big)\times\big(\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)\cap\mu^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}(\Omega)\big)$$

beschränkt. Die LMKE liefert dann die Konvergenz einer Teilfolge $\big((E_{\pi\ell},H_{\pi\ell})\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, und zwar gegen $(0,0)$ wegen der schwachen Konvergenz gegen $(0,0)$. Für ein $1\le s\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{I}$ liefert Satz 4.11 gleichmäßig bzgl. $\big((E_\ell,H_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ und $(\omega_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}1=\big\langle\Lambda(E_{\pi\ell},H_{\pi\ell}),(E_{\pi\ell},H_{\pi\ell})\big\rangle_\Omega&\le c\cdot\big\|(E_{\pi\ell},H_{\pi\ell})\big\|^2_{0,0,\Omega}\\&\le c\cdot\big\|(E_{\pi\ell},H_{\pi\ell})\big\|^2_{0,s-1,\Omega}\le c\cdot\big\|(E_{\pi\ell},H_{\pi\ell})\big\|^2_{0,0,\Omega\cap U(0,\delta)}\xrightarrow{\ell\to\infty}0 \quad ,\end{aligned}$$

ein Widerspruch.
zu (iii): Zunächst ist (4.12) notwendig, denn für $(e,h)\in\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)$ folgt mit dem polynomialen Abklingen aus **(i)** und Bemerkung 4.24

$$\big\langle (F,G),(e,h)\big\rangle_\Omega=\big\langle (M+\mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E,H),(e,h)\big\rangle_\Omega=-\big\langle (E,H),\underbrace{(M+\mathrm{i}\,\omega\Lambda)(e,h)}_{=0}\big\rangle_\Omega=0 \quad .$$

Wenden wir uns nun dem Existenzbeweis mittels des Prinzips der Grenzabsorption zu. Seien dazu $\omega\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $(F,G)\in\mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}}(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}}(\Omega)$, so daß

$$\bigwedge_{(e,h)\in\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)}\big\langle (F,G),(e,h)\big\rangle_\Omega=0$$

gilt. Seien desweiteren $(\sigma_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge und $\big((F_\ell,G_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)$ eine Folge mit einem $s>1/2$ und

$$\bigwedge_{(e,h)\in\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)} \qquad \big\langle (F_\ell,G_\ell),(e,h)\big\rangle_\Omega = 0 \qquad ,$$

so daß $(F_\ell,G_\ell)\xrightarrow{\ell\to\infty}(F,G)\in\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)$. Dann definieren wir

$$\omega_\ell := \sqrt{\omega^2+\mathrm{i}\,\sigma_\ell\omega}\in\mathbb{C}_+\setminus\mathbb{R}$$

mit $\omega_\ell^2=\omega^2+\mathrm{i}\,\sigma_\ell\omega$ und $\omega_\ell\xrightarrow{\ell\to\infty}\omega$ sowie

$$(E_\ell,H_\ell) := \mathcal{L}_{\omega_\ell}(F_\ell,G_\ell)\in\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}(\Omega) \qquad ,$$

die nach Satz 4.5 eindeutigen Lösungen zu $\mathrm{Max}(\Lambda,\omega_\ell,F_\ell,G_\ell)$, d. h. es gilt

$$(M+\mathrm{i}\,\omega_\ell\Lambda)(E_\ell,H_\ell)=(F_\ell,G_\ell) \qquad . \tag{4.14}$$

In Analogie zum Lemma 2.18 gelten auch die Zerlegungen (Wir bezeichnen hierbei $\oplus_\varepsilon$ als die orthogonale Summe bzgl. des $\langle\varepsilon\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\Omega$–Skalarproduktes!)

- $$\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)=\overline{\mathrm{rot}\,\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}\oplus_\varepsilon\varepsilon^{-1}{}_0\mathbf{D}^q(\Omega)=\varepsilon\,\overline{\mathrm{rot}\,\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}\oplus_{\varepsilon^{-1}}{}_0\mathbf{D}^q(\Omega) \qquad , \tag{4.15}$$
- $$\mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega)=\overline{\mathrm{div}\,\mathbf{D}^{q+2}(\Omega)}\oplus_\mu\mu^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}(\Omega)=\mu\,\overline{\mathrm{div}\,\mathbf{D}^{q+2}(\Omega)}\oplus_{\mu^{-1}}{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}(\Omega) \qquad . \tag{4.16}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega)&=\Big(\overline{\mathrm{rot}\,\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}\times\overline{\mathrm{div}\,\mathbf{D}^{q+2}(\Omega)}\Big)\oplus_\Lambda\Lambda^{-1}\Big({}_0\mathbf{D}^q(\Omega)\times{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}(\Omega)\Big)\\&=\Lambda\Big(\overline{\mathrm{rot}\,\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}\times\overline{\mathrm{div}\,\mathbf{D}^{q+2}(\Omega)}\Big)\oplus_{\Lambda^{-1}}\Big({}_0\mathbf{D}^q(\Omega)\times{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}(\Omega)\Big) \qquad .\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Zerlegungen spalten wir unsere Felder auf:

- $$(E_\ell,H_\ell)=:(E^1_\ell,H^1_\ell)+(E^2_\ell,H^2_\ell)\in\Big(\overline{\mathrm{rot}\,\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}\times\overline{\mathrm{div}\,\mathbf{D}^{q+2}(\Omega)}\Big)\oplus_\Lambda\Lambda^{-1}\Big({}_0\mathbf{D}^q(\Omega)\times{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}(\Omega)\Big) \tag{4.17}$$
- $$(F_\ell,G_\ell)=:(F^1_\ell,G^1_\ell)+(F^2_\ell,G^2_\ell)\in\Lambda\Big(\overline{\mathrm{rot}\,\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}\times\overline{\mathrm{div}\,\mathbf{D}^{q+2}(\Omega)}\Big)\oplus_{\Lambda^{-1}}\Big({}_0\mathbf{D}^q(\Omega)\times{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}(\Omega)\Big) \tag{4.18}$$

Da $\overline{\mathrm{rot}\,\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}\times\overline{\mathrm{div}\,\mathbf{D}^{q+2}(\Omega)}\subset{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Omega)\times{}_0\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)$, erhalten wir durch Einsetzen in (4.14)

$$\underline{M(E^2_\ell,H^2_\ell)}+\mathrm{i}\,\omega_\ell\Lambda(E^1_\ell,H^1_\ell)+\underline{\mathrm{i}\,\omega_\ell\Lambda(E^2_\ell,H^2_\ell)}=(F^1_\ell,G^1_\ell)+\underline{(F^2_\ell,G^2_\ell)} \qquad .$$

In dieser Gleichung gehören nun die unterstrichenen Summanden zu ${}_0\mathbf{D}^q(\Omega)\times{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}(\Omega)$ und die restlichen zu $\Lambda\Big(\overline{\mathrm{rot}\,\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}\times\overline{\mathrm{div}\,\mathbf{D}^{q+2}(\Omega)}\Big)$, so daß sich (4.14) in die beiden Gleichungen

$$\mathrm{i}\,\omega_\ell\Lambda(E^1_\ell,H^1_\ell)=(F^1_\ell,G^1_\ell) \qquad \text{und} \qquad (M+\mathrm{i}\,\omega_\ell\Lambda)(E^2_\ell,H^2_\ell)=(F^2_\ell,G^2_\ell) \tag{4.19}$$

aufteilt. Als Orthogonalprojektionen konvergieren die Formen (F^k_ℓ,G^k_ℓ) für $k=1,2$ und somit auch (E^1_ℓ,H^1_ℓ) in $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega)$. Wir machen die zusätzliche Annahme

$$\bigwedge_{t<-\frac12}\ \bigvee_{c>0}\ \bigwedge_{\ell\in\mathbb{N}} \qquad \big\|(E_\ell,H_\ell)\big\|_{0,t,\Omega}\le c \tag{4.20}$$

und werden am Ende des Beweises die zu (4.20) gegenteilige Annahme zum Widerspruch führen.
Sei nun t' ein solches t mit der Eigenschaft (4.20) . Dann ist auch $\big((E^2_\ell,H^2_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{t'}(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{t'}(\Omega)$ und durch (4.17) und (4.19) sogar in $\big(\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_{t'}(\Omega)\cap\varepsilon^{-1}{}_0\mathbf{D}^q_{t'}(\Omega)\big)\times\big(\mathbf{D}^{q+1}_{t'}(\Omega)\cap\mu^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}_{t'}(\Omega)\big)$ beschränkt. Die LMKE liefert für ein beliebiges $\tilde t<t'$ eine Teilfolge $\big((E^2_{\pi\ell},H^2_{\pi\ell})\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$, die in $\mathrm{L}^{2,q}_{\tilde t}(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{\tilde t}(\Omega)$ konvergiert. Mittels (4.19) konvergiert $\big((E^2_{\pi\ell},H^2_{\pi\ell})\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ dann auch in $\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_{\tilde t}(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_{\tilde t}(\Omega)$ und schließlich $\big((E_{\pi\ell},H_{\pi\ell})\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ in $\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_{\tilde t}(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_{\tilde t}(\Omega)$ gegen, sagen wir,

$$(E,H)\in\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_{\tilde t}(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_{\tilde t}(\Omega) \qquad .$$

Dies erfüllt

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E, H) = (F, G) \qquad .$$

Da die Eigenlösungen polynomial abklingen, erhalten wir für beliebige $(e, h) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega)$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Bemerkung 4.24

$$0 = \big\langle (F_{\pi\ell}, G_{\pi\ell}), (e, h) \big\rangle_\Omega = -\big\langle (E_{\pi\ell}, H_{\pi\ell}), (M + \mathrm{i}\,\overline{\omega}_{\pi\ell}\Lambda)(e, h) \big\rangle_\Omega = \mathrm{i}\,\underbrace{(\omega_{\pi\ell} - \omega)}_{\neq 0} \big\langle \Lambda(E_{\pi\ell}, H_{\pi\ell}), (e, h) \big\rangle_\Omega$$

und daher $\big\langle \Lambda(E_{\pi\ell}, H_{\pi\ell}), (e, h) \big\rangle_\Omega = 0$. Da $\big\langle \,\cdot\,, \Lambda(e, h) \big\rangle_\Omega$ für alle $(e, h) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega)$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\tilde{t}}(\Omega)$ ist (polynomiales Abklingen), liefert dies

$$\bigwedge_{(e,h) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega)} \qquad \big\langle \Lambda(E, H), (e, h) \big\rangle_\Omega = 0 \qquad . \tag{4.21}$$

Seien jetzt $t < -1/2$ und $\tilde{s} \leq s$ mit $\tilde{s} \in (1/2, 1)$ beliebig. Dann liefert Satz 4.9 Konstanten $c, \delta > 0$ und ein $\hat{t} > -1/2$, so daß für alle hinreichend großen ℓ unabhängig von $\sigma_{\pi\ell}$, $(F_{\pi\ell}, G_{\pi\ell})$, $(E_{\pi\ell}, H_{\pi\ell})$ oder $\rho > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\big\| (E_{\pi\ell}, H_{\pi\ell}) \big\|_{\mathbf{R}^q_t(\Omega \cap U(0,\rho)) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega \cap U(0,\rho))} + \big\| (r^{-1}S + \mathrm{Id})(E_{\pi\ell}, H_{\pi\ell}) \big\|_{0,\hat{t},\Omega \cap U(0,\rho)} \\ &\leq c \cdot \Big(\big\| (F_{\pi\ell}, G_{\pi\ell}) \big\|_{0,\tilde{s},\Omega} + \big\| (E_{\pi\ell}, H_{\pi\ell}) \big\|_{0,0,\Omega \cap U(0,\delta)} \Big) \leq c \cdot \Big(\big\| (F_{\pi\ell}, G_{\pi\ell}) \big\|_{0,s,\Omega} + \big\| (E_{\pi\ell}, H_{\pi\ell}) \big\|_{0,0,\Omega \cap U(0,\delta)} \Big) \end{aligned}$$

gilt. Bilden wir den Limes $\ell \to \infty$, erhalten wir unabhängig von ρ

$$\begin{aligned} &\big\| (E, H) \big\|_{\mathbf{R}^q_t(\Omega \cap U(0,\rho)) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega \cap U(0,\rho))} + \big\| (r^{-1}S + \mathrm{Id})(E, H) \big\|_{0,\hat{t},\Omega \cap U(0,\rho)} \\ &\leq c \cdot \Big(\big\| (F, G) \big\|_{0,s,\Omega} + \big\| (E, H) \big\|_{0,0,\Omega \cap U(0,\delta)} \Big) \end{aligned} \tag{4.22}$$

und mit dem Satz von der monotonen Konvergenz im Limes $\rho \to \infty$

$$\begin{aligned} &\big\| (E, H) \big\|_{\mathbf{R}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)} + \big\| (r^{-1}S + \mathrm{Id})(E, H) \big\|_{0,\hat{t},\Omega} \\ &\leq c \cdot \Big(\big\| (F, G) \big\|_{0,s,\Omega} + \big\| (E, H) \big\|_{0,0,\Omega \cap U(0,\delta)} \Big) \qquad . \end{aligned} \tag{4.23}$$

Hieraus folgen

$$(E, H) \in \mathring{\mathbf{R}}^q_{<-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)$$

und die Strahlungsbedingung

$$(r^{-1}S + \mathrm{Id})(E, H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}}(\Omega) \qquad .$$

Folglich löst (E, H) das Problem $\mathrm{Max}(\Lambda, \omega, F, G)$. Die Wahl $(F_\ell, G_\ell) := (F, G)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ liefert die Existenz einer Lösung zu $\mathrm{Max}(\Lambda, \omega, F, G)$. Durch (4.21) ist die Lösung eindeutig bestimmt und dies definiert einen Lösungsoperator

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}_\omega : & \big(\mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}}(\Omega) \big) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega)^\perp & \longrightarrow & \big(\mathring{\mathbf{R}}^q_{<-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega) \big) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega)^{\perp_\Lambda} \\ & (F, G) & \longmapsto & (E, H) \quad \text{Lösung zu } \mathrm{Max}(\Lambda, \omega, F, G) \end{array} \quad .$$

Es bleibt nur noch (4.20) zu zeigen. Dazu führen wir die gegenteilige Annahme

$$\bigvee_{t < -\frac{1}{2}} \; \bigwedge_{c > 0} \; \bigvee_{\ell \in \mathbb{N}} \qquad \big\| (E_\ell, H_\ell) \big\|_{0,t,\Omega} > c$$

zu einem Widerspruch. Gilt dies, so gibt es ein $t < -1/2$ und eine Folge

$$\big((E_\ell, H_\ell) \big)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathring{\mathbf{R}}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega) \qquad \text{mit} \qquad \big\| (E_\ell, H_\ell) \big\|_{0,t,\Omega} \xrightarrow{\ell \to \infty} \infty \qquad .$$

Definieren wir

$$(\tilde{E}_\ell, \tilde{H}_\ell) := \big\| (E_\ell, H_\ell) \big\|^{-1}_{0,t,\Omega} \cdot (E_\ell, H_\ell) \qquad \text{und} \qquad (\tilde{F}_\ell, \tilde{G}_\ell) := \big\| (E_\ell, H_\ell) \big\|^{-1}_{0,t,\Omega} \cdot (F_\ell, G_\ell) \qquad ,$$

so folgt $\big\|(\tilde{E}_\ell,\tilde{H}_\ell)\big\|_{0,t,\Omega}=1$ für alle $\ell\in\mathbb{N}$ und $\lim\limits_{\ell\to\infty}\big\|(\tilde{F}_\ell,\tilde{G}_\ell)\big\|_{0,s,\Omega}=0$ sowie

$$(M+\mathrm{i}\,\omega_\ell\Lambda)(\tilde{E}_\ell,\tilde{H}_\ell)=(\tilde{F}_\ell,\tilde{G}_\ell) \qquad .$$

Die obigen Argumente zeigen die Konvergenz einer Teilfolge $\big((\tilde{E}_{\pi\ell},\tilde{H}_{\pi\ell})\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{\tilde{t}}(\Omega)$ mit einem $\tilde{t}<t$ gegen ein $(\tilde{E},\tilde{H})\in\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)^{\perp_\Lambda}$, welches $\mathrm{Max}(\Lambda,\omega,0,0)$ löst. Damit ist $(\tilde{E},\tilde{H})=(0,0)$ und Satz 4.9 liefert von $\sigma_{\pi\ell}$, $(\tilde{F}_{\pi\ell},\tilde{G}_{\pi\ell})$ oder $(\tilde{E}_{\pi\ell},\tilde{H}_{\pi\ell})$ unabhängige Konstanten $c,\delta>0$, so daß

$$1=\big\|(\tilde{E}_{\pi\ell},\tilde{H}_{\pi\ell})\big\|_{0,t,\Omega}\le c\cdot\Big(\underbrace{\big\|(\tilde{F}_{\pi\ell},\tilde{G}_{\pi\ell})\big\|_{0,s,\Omega}}_{\xrightarrow{\ell\to\infty}0}+\underbrace{\big\|(\tilde{E}_{\pi\ell},\tilde{H}_{\pi\ell})\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,\delta)}}_{\xrightarrow{\ell\to\infty}0}\Big)$$

gilt, ein Widerspruch.
Damit haben wir die Gültigkeit des Prinzips der Grenzabsorption gezeigt.
zu (iv): Seien $-t,s>1/2$ gewählt. Wir betrachten

$$\begin{array}{cccc}\mathcal{L}_\omega & : & D_s(\mathcal{L}_\omega) & \longrightarrow & W(\mathcal{L}_\omega)\subset W_t(\mathcal{L}_\omega):=\big(\mathring{\mathbf{R}}^q_t(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)\big)\cap\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)^{\perp_\Lambda} \\ & & (F,G) & \longmapsto & (E,H)\end{array} \quad ,$$

wobei

$$D_s(\mathcal{L}_\omega):=\big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)\big)\cap\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)^{\perp}$$

und (E,H) die aus **(iii)** eindeutige Lösung zu $\mathrm{Max}(\Lambda,\omega,F,G)$ sei. Aufgrund des polynomialen Abklingens der Eigenlösungen sind $D_s(\mathcal{L}_\omega)$ und $W_t(\mathcal{L}_\omega)$ Hilbert–Räume. Um die Stetigkeit von $\mathcal{L}_\omega$ nachzuweisen, genügt es nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, die Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}_\omega$ zu zeigen. Seien dazu

$$\big((F_\ell,G_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}\subset D_s(\mathcal{L}_\omega) \qquad \text{und} \qquad \big((E_\ell,H_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}\subset W(\mathcal{L}_\omega)$$

mit $(E_\ell,H_\ell):=\mathcal{L}_\omega(F_\ell,G_\ell)$ Folgen, so daß $\big((F_\ell,G_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)$ gegen $(F,G)\in D_s(\mathcal{L}_\omega)$ und $\big((E_\ell,H_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ in $\mathring{\mathbf{R}}^q_t(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)$ gegen $(E,H)\in W_t(\mathcal{L}_\omega)$ konvergieren.
Wir müssen $(E,H)=\mathcal{L}_\omega(F,G)$ zeigen.
Zunächst gilt

$$(M+\mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E,H)=(F,G) \qquad .$$

Die Abschätzung (4.22) liefert für die Lösungen (E_ℓ,H_ℓ) von $\mathrm{Max}(\Lambda,\omega,F_\ell,G_\ell)$ ein $\hat{t}>-1/2$ und für alle $\tilde{t}<-1/2$ Konstanten $c,\delta>0$, die nicht von (E_ℓ,H_ℓ) oder (F_ℓ,G_ℓ) abhängen, so daß für alle $\rho>0$

$$\big\|(E_\ell,H_\ell)\big\|_{\mathbf{R}^q_{\tilde{t}}\left(\Omega\cap U(0,\rho)\right)\times\mathbf{D}^{q+1}_{\tilde{t}}\left(\Omega\cap U(0,\rho)\right)}+\big\|(r^{-1}S+\mathrm{Id})(E_\ell,H_\ell)\big\|_{0,\hat{t},\Omega\cap U(0,\rho)}$$

$$\le c\cdot\Big(\big\|(F_\ell,G_\ell)\big\|_{0,s,\Omega}+\big\|(E_\ell,H_\ell)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,\delta)}\Big)$$

gilt. Die Grenzübergänge $\ell\to\infty$ und $\rho\to\infty$ (in dieser Reihenfolge!) ergeben

$$(E,H)\in W_{<-\frac{1}{2}}(\mathcal{L}_\omega)$$

und die Strahlungsbedingung für (E,H). Also ist (E,H) die eindeutige Lösung des Problems $\mathrm{Max}(\Lambda,\omega,F,G)$ mit $(E,H)\in\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)^{\perp_\Lambda}$, d. h. $(E,H)=\mathcal{L}_\omega(F,G)$. ■

Bemerkung 4.30
Gilt $\operatorname{supp}\hat{\Lambda}\cup(\mathbb{R}^N\setminus\Omega)\Subset U(0,\rho)$ *mit einem* $\rho>0$*, so folgt für alle* $\omega\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *und* $(E,H)\in\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)$

$$\operatorname{supp}(E,H)\subset\overline{\Omega}\cap U(0,\rho) \qquad .$$

In diesem Fall löst (E,H) *nämlich in* $A(\rho)$ *die Helmholtz–Gleichung*

$$(\Delta+\omega^2)(E,H)=(0,0)$$

und muß somit nach der Rellichschen Abschätzung $\Big($*siehe* LEIS, *[[20], p. 59,]*$\Big)$ *in* $A(\rho)$ *verschwinden. Genügt die Maxwell–Gleichung desweiteren dem Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit, so folgt*

$$\mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega)=\big\{(0,0)\big\} \qquad .$$

Bemerkung 4.31
Seien $\omega \in \mathbb{P} \neq \emptyset$ *und* $d_q(\omega) := \dim \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega)$ *sowie* $\big\{(e_\ell, h_\ell)\big\}_{\ell=1}^{d_q(\omega)}$ *eine Basis von* $\mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega)$ *. Dann können wir zu gegebenem* $\gamma \in \mathbb{C}^{d_q(\omega)}$ *eine Lösung* (E, H) *von* $\mathrm{Max}(\Lambda, \omega, F, G)$ *aus Satz 4.29 (iii) auch so wählen, daß*

$$\big\langle \Lambda(E, H), (e_\ell, h_\ell)\big\rangle_\Omega = \gamma_\ell \qquad , \qquad \ell = 1, \ldots, d_q(\omega)$$

gilt. Auch hierdurch ist die Lösung eindeutig bestimmt.

Der Lösungsoperator $\mathcal{L}_\omega$ läßt sich noch wesentlich schärfer, als dies in Satz 4.29 (iv) geschehen ist, abschätzen. Dies wollen wir im letzten Abschnitt dieses Kapitels festhalten.

4.9 Einige Abschätzungen des Lösungsoperators

Lemma 4.32
Seien $\tau > 1$ *,* Ω *mit* LMKE *,* $s, -t > 1/2$ *und* $K \Subset \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ *. Dann gibt es Konstanten* $c, \delta > 0$ *und ein* $\hat{t} > -1/2$ *, so daß für alle* $\omega \in K$ *und* $(F, G) \in \big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)\big) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega)^\perp$ *die Abschätzung*

$$\big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{\mathbf{R}^q_t(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)} + \big\|(r^{-1}S + \mathrm{Id})\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,\hat{t},\Omega} \leq c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,\delta)}\Big)$$

gilt.

Beweis:
Wegen der Differentialgleichung genügt es $\big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,t,\Omega}$ und den Strahlungsterm abzuschätzen.
Da $\mathcal{M}$ selbstadjungiert ist, ist die operatorwertige Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{L} : & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} & \longrightarrow & B\big(\mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega)\big) \\ & \omega & \longmapsto & \mathcal{L}_\omega = \mathrm{i}(\mathcal{M} - \omega)^{-1}\Lambda^{-1} \end{array}$$

holomorph und insbesondere auf $\hat{K} \Subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Nach Satz 4.5 gilt gleichmäßig bzgl. $\omega \in \hat{K}$

$$\|\mathcal{L}_\omega\| \leq \frac{c}{|\operatorname{Im}\omega|} \qquad .$$

Damit folgt gleichmäßig bzgl. $\omega \in \hat{K}$ und $(F, G) \in \big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)\big)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,t,\Omega} + \big\|(r^{-1}S + \mathrm{Id})\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,\hat{t},\Omega} \\ &\leq c \cdot \big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,0,\Omega} \leq \frac{c}{|\operatorname{Im}\omega|} \cdot \big\|(F,G)\big\|_{0,0,\Omega} \leq \frac{c}{|\operatorname{Im}\omega|} \cdot \big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad . \end{aligned}$$

Nähern wir uns der reellen Achse, indem wir z. B. Frequenzen aus

$$\tilde{K} := \Big\{z \in \mathbb{C}_+ : z^2 = \lambda^2 + \mathrm{i}\,\sigma\lambda\,,\ \lambda \in J\,,\ 0 < \sigma < \min\big\{1, |\lambda| \cdot \pi/2\big\}\Big\} \qquad , \qquad J \Subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

betrachten, liefert Satz 4.9 Konstanten $c, \delta > 0$ und ein $\hat{t} > -1/2$, so daß gleichmäßig bzgl. $\omega \in \tilde{K}$ und $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)$ die Abschätzung

$$\big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{\mathbf{R}^q_t(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)} + \big\|(r^{-1}S + \mathrm{Id})\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,\hat{t},\Omega} \leq c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,\delta)}\Big)$$

gilt. Diese Abschätzung gilt auch für die Grenzabsorptionslösung $\big($siehe (4.23)$\big)$ und somit gleichmäßig bzgl. $\omega \in \overline{\tilde{K}}$ und $(F, G) \in \big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)\big) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega)^\perp$. ∎

Unter schärferen Voraussetzungen an die Daten ergibt sich

Korollar 4.33
Seien $\tau > 1$ *,* Ω *mit* LMKE *,* $s, -t > 1/2$ *und* $K \Subset \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ *mit* $\overline{K} \cap \mathbb{P} = \emptyset$ *. Dann gibt es Konstanten* $c > 0$ *und* $\hat{t} > -1/2$ *, so daß für alle* $\omega \in K$ *und* $(F, G) \in \mathbf{D}^q_s(\Omega) \times \mathring{\mathbf{R}}^{q+1}_s(\Omega)$ *die Abschätzung*

$$\big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{\mathbf{R}^q_t(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)} + \big\|(r^{-1}S + \mathrm{Id})\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,\hat{t},\Omega} \leq c \cdot \big\|(F,G)\big\|_{\mathbf{D}^q_s(\Omega)\times\mathbf{R}^{q+1}_s(\Omega)}$$

gilt. Insbesondere ist der Operator

$$\mathcal{L}_\omega \,:\, \mathbf{D}^q_s(\Omega) \times \mathring{\mathbf{R}}^{q+1}_s(\Omega) \longrightarrow \mathring{\mathbf{R}}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)$$

bzgl. $\omega \in K$ *gleichgradig stetig.*

Beweis:
Wenn die Abschätzung falsch wäre, gäbe es zu $s, -t > 1/2$ und $\hat{t} > -1/2$ (aus Lemma 4.32) Folgen

- $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$,
- $\big((F_n, G_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{D}_s^q(\Omega) \times \mathring{\mathbf{R}}_s^{q+1}(\Omega)$,
- $\big((E_n, H_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathring{\mathbf{R}}_t^q(\Omega) \times \mathbf{D}_t^{q+1}(\Omega)$, $(E_n, H_n) := \mathcal{L}_{\omega_n}(F_n, G_n)$,

mit

$$\big\|(E_n, H_n)\big\|_{\mathbf{R}_t^q(\Omega)\times\mathbf{D}_t^{q+1}(\Omega)} + \big\|(r^{-1}S + \mathrm{Id})(E_n, H_n)\big\|_{0,\hat{t},\Omega} = 1$$

und

$$\big\|(F_n, G_n)\big\|_{\mathbf{D}_s^q(\Omega)\times\mathbf{R}_s^{q+1}(\Omega)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad .$$

Nach Teilfolgenauswahl nehmen wir o. B. d. A. $\omega_n \to \omega \in \overline{K}$ an. Der Differentialgleichung entnehmen wir durch Differentiation

$$\mathrm{i}\,\omega_n \operatorname{div} \varepsilon E_n = \operatorname{div} F_n \qquad , \qquad \mathrm{i}\,\omega_n \operatorname{rot} \mu H_n = \operatorname{rot} G_n \qquad ,$$

so daß wir die Beschränktheit von (E_n, H_n) in $\big(\mathring{\mathbf{R}}_t^q(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}_t^q(\Omega)\big) \times \big(\mathbf{D}_t^{q+1}(\Omega) \cap \mu^{-1}\mathring{\mathbf{R}}_t^{q+1}(\Omega)\big)$ erhalten. Die LMKE liefert eine Teilfolge, welche wir o. B. d. A. wieder mit (E_n, H_n) bezeichnen, die für alle $\tilde{t} < t$ in $\mathrm{L}_{\tilde{t}}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_{\tilde{t}}^{2,q+1}(\Omega)$ gegen ein

$$(E, H) \in \big(\mathring{\mathbf{R}}_{\tilde{t}}^q(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}_{\tilde{t}}^q(\Omega)\big) \times \big(\mathbf{D}_{\tilde{t}}^{q+1}(\Omega) \cap \mu^{-1}\mathring{\mathbf{R}}_{\tilde{t}}^{q+1}(\Omega)\big)$$

konvergiert. Mit Lemma 4.32 gibt es zu beliebigem $\tilde{\tilde{t}} < -1/2$ ein $\hat{\hat{t}} > -1/2$ und $c, \delta > 0$, so daß gleichmäßig bzgl. ω_n , (F_n, G_n) und (E_n, H_n)

$$\big\|(E_n, H_n)\big\|_{\mathbf{R}_{\tilde{\tilde{t}}}^q(\Omega)\times\mathbf{D}_{\tilde{\tilde{t}}}^{q+1}(\Omega)} + \big\|(r^{-1}S + \mathrm{Id})(E_n, H_n)\big\|_{0,\hat{\hat{t}},\Omega} \le c \cdot \Big(\underbrace{\big\|(F_n, G_n)\big\|_{0,s,\Omega}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{\big\|(E_n, H_n)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,\delta)}}_{\text{beschränkt}} \Big)$$

gilt. Damit erfüllt (E, H) die Strahlungsbedingung und es gelten $(E, H) \in \mathring{\mathbf{R}}_{<-\frac{1}{2}}^q(\Omega) \times \mathbf{D}_{<-\frac{1}{2}}^{q+1}(\Omega)$ sowie

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E, H) \xleftarrow{n\to\infty} (M + \mathrm{i}\,\omega_n\Lambda)(E_n, H_n) = (F_n, G_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0, 0) \qquad ,$$

d. h. $(E, H) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega) = \big\{(0, 0)\big\}$. Schließlich liefert wiederum Lemma 4.32 $c, \delta > 0$, so daß wir gleichmäßig bzgl. ω_n , (F_n, G_n) und (E_n, H_n)

$$\begin{aligned} 1 &= \big\|(E_n, H_n)\big\|_{\mathbf{R}_t^q(\Omega)\times\mathbf{D}_t^{q+1}(\Omega)} + \big\|(r^{-1}S + \mathrm{Id})(E_n, H_n)\big\|_{0,\hat{t},\Omega} \\ &\le c \cdot \Big(\underbrace{\big\|(F_n, G_n)\big\|_{0,s,\Omega}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{\big\|(E_n, H_n)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,\delta)}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

erhalten, ein Widerspruch. ■

Als letztes Resultat dieses Kapitels wollen wir noch zeigen, daß sich die Resolvente sogar in der Operatornorm stetig auf die reelle Achse fortsetzen läßt.

Satz 4.34
Seien $\tau > 1$, Ω mit LMKE *, $s, -t > 1/2$ und $K \Subset \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ mit $\overline{K} \cap \mathbb{P} = \emptyset$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{L} \;:\; & K & \longrightarrow & B\big(\mathbf{D}_s^q(\Omega) \times \mathring{\mathbf{R}}_s^{q+1}(\Omega), \mathring{\mathbf{R}}_t^q(\Omega) \times \mathbf{D}_t^{q+1}(\Omega)\big) \\ & \omega & \longmapsto & \mathcal{L}_\omega \end{array}$$

gleichmäßig stetig.

Beweis:
Wir definieren

$$B_{s,t} := B\big(\mathbf{D}_s^q(\Omega) \times \mathring{\mathbf{R}}_s^{q+1}(\Omega), \mathring{\mathbf{R}}_t^q(\Omega) \times \mathbf{D}_t^{q+1}(\Omega)\big) \qquad .$$

Für $\omega, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega)$ liefert die Resolventenformel

$$(\mathcal{M} - \omega)^{-1} - (\mathcal{M} - \lambda)^{-1} = (\omega - \lambda)(\mathcal{M} - \omega)^{-1}(\mathcal{M} - \lambda)^{-1}$$

mit $\mathcal{L}_\omega = \mathrm{i}(\mathcal{M} - \omega)^{-1}\Lambda^{-1}$ $\big($siehe (4.2)$\big)$

- $\mathcal{L}_\omega(F, G) - \mathcal{L}_\lambda(F, G) = \mathrm{i}(\omega - \lambda)(\mathcal{M} - \omega)^{-1}(\mathcal{M} - \lambda)^{-1}\Lambda^{-1}(F, G)$,
- $\begin{aligned} M\big(\mathcal{L}_\omega(F, G) - \mathcal{L}_\lambda(F, G)\big) &= -\,\mathrm{i}(\omega - \lambda)\Lambda\mathcal{L}_\omega(F, G) - \mathrm{i}\,\lambda\Lambda\big(\mathcal{L}_\omega(F, G) - \mathcal{L}_\lambda(F, G)\big) \\ &= (\omega - \lambda)\Lambda(\mathcal{M} - \omega)^{-1}\big(1 + \lambda(\mathcal{M} - \lambda)^{-1}\big)\Lambda^{-1}(F, G) \end{aligned}$

und daher gleichmäßig bzgl. $\omega, \lambda \in \hat{K} \Subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\big(\omega \to (\mathcal{M} - \omega)^{-1}$ ist auf $\hat{K}$ beschränkt!$\big)$

$$\|\mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}_\lambda\|_{B_{s,t}} \leq \|\mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}_\lambda\|_{B_{0,0}} \leq c \cdot |\omega - \lambda| \qquad .$$

Also ist $\mathbb{L}$ auf $\hat{K}$ sogar Lipschitz–stetig.
Nun müssen wir noch den Grenzübergang nach $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ untersuchen. Sei also $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ mit $\omega_n \to \omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dann müssen wir $\mathcal{L}_{\omega_n} \xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{L}_\omega$ in $B_{s,t}$ zeigen, d. h.

$$\bigwedge_{\delta>0} \ \bigvee_{m} \ \bigwedge_{n\geq m} \qquad \|\mathcal{L}_{\omega_n} - \mathcal{L}_\omega\|_{B_{s,t}} \leq \delta \qquad .$$

Nehmen wir das Gegenteil an, so gibt es ein $\delta > 0$ und Folgen

$$(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset K \qquad , \qquad \big((F_m, G_m)\big)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{D}^q_s(\Omega) \times \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}_s(\Omega)$$

mit $\omega_m \to \omega$ und

$$\big\|(F_m, G_m)\big\|_{\mathbf{D}^q_s(\Omega)\times\mathbf{R}^{q+1}_s(\Omega)} = 1$$

sowie

$$\big\|(\mathcal{L}_{\omega_m} - \mathcal{L}_\omega)(F_m, G_m)\big\|_{\mathbf{R}^q_t(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)} > \delta \qquad . \tag{4.24}$$

Nach Korollar 4.33 existieren zu jedem $\tilde{t} < -1/2$ eine Konstante $c > 0$ und ein $\hat{t} > -1/2$, so daß gleichmäßig bzgl. $\lambda \in \{\omega, \omega_m\}$ und (F_m, G_m) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \big\|\mathcal{L}_\lambda(F_m, G_m)\big\|_{\mathbf{R}^q_{\tilde{t}}(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_{\tilde{t}}(\Omega)} &+ \big\|(r^{-1}S + \mathrm{Id})\mathcal{L}_\lambda(F_m, G_m)\big\|_{0,\hat{t},\Omega} \\ &\leq c \cdot \big\|(F_m, G_m)\big\|_{\mathbf{D}^q_s(\Omega)\times\mathbf{R}^{q+1}_s(\Omega)} = c \end{aligned} \tag{4.25}$$

erfüllt ist. Damit sind

$$(e_m, h_m) := \mathcal{L}_{\omega_m}(F_m, G_m) \qquad , \qquad \mathcal{L}_\omega(F_m, G_m)$$

und

$$(E_m, H_m) := (\mathcal{L}_{\omega_m} - \mathcal{L}_\omega)(F_m, G_m) = (e_m, h_m) - \mathcal{L}_\omega(F_m, G_m)$$

in $\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_{\tilde{t}}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_{\tilde{t}}(\Omega)$ beschränkt. Mit $G_m \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}_s(\Omega)$ folgt $\mu H_m \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)$ und wegen

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E_m, H_m) = \mathrm{i}(\omega - \omega_m)\Lambda\mathcal{L}_{\omega_m}(F_m, G_m) = \mathrm{i}(\omega - \omega_m)\Lambda(e_m, h_m)$$

erhalten wir

- $\mathrm{i}\,\omega \operatorname{div} \varepsilon E_m = \mathrm{i}(\omega - \omega_m) \operatorname{div} \varepsilon e_m = \dfrac{\omega - \omega_m}{\omega_m} \operatorname{div} F_m \xrightarrow{m\to\infty} 0 \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega)$,
- $\mathrm{i}\,\omega \operatorname{rot} \mu H_m = \mathrm{i}(\omega - \omega_m) \operatorname{rot} \mu h_m = \dfrac{\omega - \omega_m}{\omega_m} \operatorname{rot} G_m \xrightarrow{m\to\infty} 0 \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^{2,q+2}_s(\Omega)$,
- $(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E_m, H_m) \xrightarrow{m\to\infty} (0, 0) \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\tilde{t}}(\Omega)$.

Somit ist $\big((E_m, H_m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\big(\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_{\tilde{t}}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_{\tilde{t}}(\Omega)\big) \times \big(\mu^{-1}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}_{\tilde{t}}(\Omega) \cap \mathbf{D}^{q+1}_{\tilde{t}}(\Omega)\big)$ beschränkt und wir können mit Hilfe der LMKE eine für alle $t' < \tilde{t}$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{t'}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{t'}(\Omega)$ konvergente Teilfolge $(E_{\pi m}, H_{\pi m})$ mit

$$(E_{\pi m}, H_{\pi m}) \xrightarrow{m\to\infty}: (E, H) \in \mathrm{L}^{2,q}_{t'}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{t'}(\Omega)$$

auswählen. Ferner folgt

$$(E,H) \in \big(\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_{t'}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathbf{D}^q_{t'}(\Omega)\big) \times \big(\mu^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}_{t'}(\Omega) \cap \mathbf{D}^{q+1}_{t'}(\Omega)\big)$$

und

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E,H) = (0,0) \qquad .$$

Desweiteren erfüllt (E,H) mit (4.25) die Strahlungsbedingung und es gilt

$$(E,H) \in \big(\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_{<-\frac{1}{2}}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathbf{D}^q_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)\big) \times \big(\mu^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega) \cap \mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)\big) \qquad .$$

Also folgt $(E,H) \in \mathcal{N}(\mathrm{Max},\Lambda,\omega) = \big\{(0,0)\big\}$. Schließlich bekommen wir

$$(E_{\pi m}, H_{\pi m}) \xrightarrow{m\to\infty} (0,0) \qquad \text{in} \qquad \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_{t'}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_{t'}(\Omega) \qquad . \tag{4.26}$$

Da $\tilde{t} < -1/2$ beliebig war, ist auch $t' < -1/2$ beliebig nahe bei $-1/2$, so daß wir $t' \geq t$ annehmen dürfen. Dann steht aber die Aussage (4.26) im Widerspruch zu (4.24) . ■

5 Der Ganzraumfall

Wir tragen in diesem Kapitel Ergebnisse zusammen, die sich speziell nur auf den isotropen und homogenen Ganzraumfall, d. h.

$$\Omega := \mathbb{R}^N \qquad \text{und} \qquad \Lambda := \mathrm{Id} \qquad ,$$

beziehen. In diesem Fall bezeichnen wir den zeitharmonischen Lösungsoperator mit

$$L_\omega \qquad \text{statt} \qquad \mathcal{L}_\omega \qquad .$$

Wir können dann mit Grundlösungen und Darstellungsformeln hantieren und durch „Trennung der Variablen" die Lösungen bestimmter Differentialgleichungen auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen, welche dann sogar explizit gelöst werden können.
Insbesondere werden wir zur Herleitung einer Darstellungsformel zur Maxwell–Gleichung die Grundlösung zur skalaren Helmholtz–Gleichung verwenden, weswegen wir zunächst einige Eigenschaften dieser herleiten.
Sofern wir keine weiteren Einschränkungen angeben sei in diesem Kapitel stets $q \in \{0, \ldots, N\}$.

5.1 Die Grundlösung zur Helmholtz–Gleichung

Die Grundlösung zum skalaren Helmholtz–Operator

$$\Delta + \omega^2 \qquad , \qquad \omega \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0\} \qquad ,$$

im $\mathbb{R}^N$ ist

$$\Phi_{\omega,\nu}(x) = \varphi_{\omega,\nu}\big(|x|\big) \qquad \text{mit} \qquad \varphi_{\omega,\nu}(t) = c_N \omega^\nu t^{-\nu} H^1_\nu(\omega t) \qquad , \qquad \nu := \frac{N-2}{2} \qquad ,$$

wobei die Konstante c_N nur von der Raumdimension abhängt und $H^1_\nu(z)$ die erste Hankel–Funktion bezeichne, welche eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$z^2\, u'' + z\, u' + (z^2 - \nu^2)\, u = 0$$

darstellt. Die Hankel–Funktion erfüllt (siehe z. B. bei Magnus, Oberhettinger und Soni, [[21], p. 67])

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} H^1_\nu(z) = \frac{\nu}{z} \cdot H^1_\nu(z) - H^1_{\nu+1}(z) \tag{5.1}$$

und für ungerade Dimensionen N ist (siehe z. B. [[21], p. 72])

$$H^1_\nu(z) = z^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp(\mathrm{i}\, z) \sum_{\ell=0}^{\nu-1/2} c^\nu_\ell z^{-\ell} \qquad , \qquad c^\nu_\ell \in \mathbb{C} \qquad . \tag{5.2}$$

Von nun an und bis zum Ende dieses Kapitels betrachten wir nur noch <u>ungerade</u> Raumdimensionen N.
Zunächst gelten durch Umsummierung und mit (5.1)

- $$\varphi_{\omega,\nu}(t) = c_N t^{2-N} \exp(\mathrm{i}\,\omega t) \sum_{\ell=0}^{\nu-1/2} c^\nu_{\nu-\frac{1}{2}-\ell} (\omega t)^\ell \qquad , \tag{5.3}$$
- $$\varphi'_{\omega,\nu}(t) = -c_N t^{1-N} \exp(\mathrm{i}\,\omega t) \sum_{\ell=0}^{\nu+1/2} c^{\nu+1}_{\nu+\frac{1}{2}-\ell} (\omega t)^\ell \qquad . \tag{5.4}$$

Wir wollen nun $\varphi_{\omega,\nu}(t)$ und $\varphi'_{\omega,\nu}(t)$ abschätzen und um $\omega = 0$ in eine Taylor–Reihe entwickeln. Wegen $\operatorname{Im}\omega \geq 0$ brauchen wir dazu nur die Funktion $z \to \exp(\mathrm{i}\, z)$ in der oberen Halbebene zu betrachten, wo sie mitsamt allen Ableitungen beschränkt ist. Wir erhalten daher

Lemma 5.1 *Seien $\nu := (N-2)/2$ und $K \Subset \mathbb{C}_+$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, die nur von N und K abhängt, so daß für alle $\omega \in K$ und alle $t \in \mathbb{R}_+$ sowie $x \in \mathbb{R}^N$ die folgenden Abschätzungen gelten:*

(i) $\big|\varphi_{\omega,\nu}(t)\big| \leq c \cdot \big(t^{2-N} + t^{\frac{1-N}{2}}\big) \qquad , \qquad \big|\Phi_{\omega,\nu}(x)\big| \leq c \cdot \big(|x|^{2-N} + |x|^{\frac{1-N}{2}}\big)$

(ii) $\big|\varphi'_{\omega,\nu}(t)\big| \leq c \cdot \big(t^{1-N} + t^{\frac{1-N}{2}}\big) \qquad , \qquad \big|\nabla\Phi_{\omega,\nu}(x)\big| \leq c \cdot \big(|x|^{1-N} + |x|^{\frac{1-N}{2}}\big)$

und

Lemma 5.2
Seien $J \in \mathbb{N}_0$ *und* $\nu := (N-2)/2$. *Dann existieren Konstanten* $c_j, c'_j \in \mathbb{C}$ *und Funktionen* $\operatorname{Rest}_J, \widetilde{\operatorname{Rest}}_J$, *so daß für* $t \in \mathbb{R}_+$ *und* $\omega \in \mathbb{C}_+$ *die Entwicklungen*

$$\text{(i)} \qquad \varphi_{\omega,\nu}(t) = t^{2-N} \sum_{j=0}^{J} c_j (\omega t)^j + \operatorname{Rest}_J(\omega t) \cdot t^{3-N+J} \cdot \omega^{J+1} \qquad ,$$

$$\text{(ii)} \qquad \varphi'_{\omega,\nu}(t) = t^{1-N} \sum_{j=0}^{J} c'_j (\omega t)^j + \widetilde{\operatorname{Rest}}_J(\omega t) \cdot t^{2-N+J} \cdot \omega^{J+1}$$

gelten. Hierbei sind die Funktionen $\operatorname{Rest}_J(z)$ *und* $\widetilde{\operatorname{Rest}}_J(z)$ *gleichmäßig bzgl.* $z \in \mathbb{C}_+$ *beschränkt und die Schranken hängen nur von* N *und* J *ab.*

5.2 Eine Darstellungsformel der Ganzraumlösung

Wir wollen in diesem Abschnitt aus der Darstellungsformel zum skalaren Helmholtz–Operator eine entsprechende Formel für den Maxwell–Operator finden. Wegen Bemerkung 4.30 gilt

$$\mathcal{N}(\mathrm{Max}, \mathrm{Id}, \omega) = \big\{(0,0)\big\} \qquad .$$

Damit ist L_ω auf ganz $\mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}} \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}}$ definiert und wir können uns zu $\omega \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ und $(F,G) \in \mathrm{C}^{\infty,q}_0 \times \mathrm{C}^{\infty,q+1}_0$ die Lösung

$$(E,H) := L_\omega(F,G)$$

anschauen. Satz 3.6 liefert

$$(E,H) \in \big(\mathbf{H}^{2,q}_{<-\frac{1}{2}} \cap \mathrm{C}^{\infty,q}\big) \times \big(\mathbf{H}^{2,q+1}_{<-\frac{1}{2}} \cap \mathrm{C}^{\infty,q+1}\big) \qquad .$$

Nach Lemma 4.13 (iii) impliziert

$$(M + \mathrm{i}\,\omega)(E,H) = (F,G)$$

die Gleichung

$$(\Delta + \omega^2)(E,H) = \Big(M - \mathrm{i}\,\omega - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\Box\Big)(F,G) =: (f,g) \in \mathrm{C}^{\infty,q}_0 \times \mathrm{C}^{\infty,q+1}_0 \qquad . \tag{5.5}$$

Für die eindeutige Strahlungslösung (e,h) des Problems

- $(\Delta + \omega^2)(e,h) = (f,g)$,
- $(e,h) \in \mathbf{H}^{2,q}_{<-\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}^{2,q+1}_{<-\frac{1}{2}}$,
- $\exp(-\mathrm{i}\,\omega r) \cdot (e,h) \in \mathrm{H}^{1,q}_{>-\frac{3}{2}} \times \mathrm{H}^{1,q+1}_{>-\frac{3}{2}}$

folgt dann $(E,H) = (e,h)$. Für nichtreelle Frequenzen $\omega \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{R}$ ist dies trivial, denn Satz 3.6 liefert $(E,H) \in \mathbf{H}^{2,q} \times \mathbf{H}^{2,q+1}$. Daher gilt dies auch für reelle Frequenzen $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, weil man die Lösungen beider Strahlungsprobleme mit Hilfe der Grenzabsorption erhält.
Die Darstellungsformel zum skalaren Helmholtz–Operator, welche wir z. B. bei Leis in $\big[$[20], page 78/79, Remark 4.28$\big]$ finden, liefert dann für $\omega \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ mit $E = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} E_I \,\mathrm{d}x^I$ und $H = \sum_{J \in \mathcal{I}(q+1,N)} H_J \,\mathrm{d}x^J$

- $E_I = f_I \star \Phi_{\omega,\nu}$, $I \in \mathcal{I}(q,N)$,
- $H_J = g_J \star \Phi_{\omega,\nu}$, $J \in \mathcal{I}(q+1,N)$.

Hierbei wollen wir die Faltung im $\mathbb{R}^N$ mit $\star$ bezeichnen, d. h. es gilt mit dem Operator $\vartheta_x f(y) := f(x-y)$

- $E_I(x) = \big\langle f_I, \vartheta_x \overline{\Phi_{\omega,\nu}} \big\rangle_{\mathbb{R}^N}$, $I \in \mathcal{I}(q,N)$,
- $H_J(x) = \big\langle g_J, \vartheta_x \overline{\Phi_{\omega,\nu}} \big\rangle_{\mathbb{R}^N}$, $J \in \mathcal{I}(q+1,N)$.

Für geeignete q–Formen $e = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} e_I \, \mathrm{d}x^I$ und $h = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} h_I \, \mathrm{d}x^I$ definieren wir die Faltung

$$e \star h(x) := \big\langle e, \vartheta_x \overline{h} \big\rangle_{\mathbb{R}^N} \qquad \text{mit} \qquad \vartheta_x h(y) := \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \vartheta_x h_I(y) \, \mathrm{d}y^I \qquad .$$

Dann gilt

$$e \star h = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} e_I \star h_I$$

und desweiteren für geeignete Formen die partielle Integration

$$\operatorname{rot} e \star h(x) = \langle \operatorname{rot} e, \vartheta_x \overline{h} \rangle_{\mathbb{R}^N} = -\langle e, \operatorname{div} \vartheta_x \overline{h} \rangle_{\mathbb{R}^N} = \langle e, \vartheta_x \operatorname{div} \overline{h} \rangle_{\mathbb{R}^N} = e \star \operatorname{div} h(x) \qquad . \tag{5.6}$$

Definieren wir die speziellen Formen

$$\Phi^I_{\omega,\nu} := \Phi_{\omega,\nu} \cdot \mathrm{d}x^I \qquad ,$$

so können wir unsere Form (E, H) durch

$$E = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} f \star \Phi^I_{\omega,\nu} \cdot \mathrm{d}x^I \qquad \text{und} \qquad H = \sum_{J \in \mathcal{I}(q+1,N)} g \star \Phi^J_{\omega,\nu} \cdot \mathrm{d}x^J$$

darstellen. Transformieren wir wieder auf (F, G), erhalten wir mit (5.5)

- $$E = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \Big(\operatorname{div} G - \mathrm{i}\,\omega F - \frac{\mathrm{i}}{\omega} \operatorname{rot} \operatorname{div} F \Big) \star \Phi^I_{\omega,\nu} \cdot \mathrm{d}x^I \qquad , \tag{5.7}$$
- $$H = \sum_{J \in \mathcal{I}(q+1,N)} \Big(\operatorname{rot} F - \mathrm{i}\,\omega G - \frac{\mathrm{i}}{\omega} \operatorname{div} \operatorname{rot} G \Big) \star \Phi^J_{\omega,\nu} \cdot \mathrm{d}x^J \qquad . \tag{5.8}$$

Nun möchten wir mit (5.6) partiell integrieren. Schauen wir uns z. B. den Term

$$(\operatorname{div} G) \star \Phi^I_{\omega,\nu}$$

an.
Da (F, G) kompakten Träger besitzt, spielt die Integrierbarkeit von $\Phi_{\omega,\nu}$ bei Unendlich zunächst keine Rolle. Bei Null gilt nach Lemma 5.1

$$\big| \Phi_{\omega,\nu}(y) \big| \le c \cdot |y|^{2-N} \qquad \text{und} \qquad \big| \nabla \Phi_{\omega,\nu}(y) \big| \le c \cdot |y|^{1-N} \qquad ,$$

d. h. $\Phi_{\omega,\nu}$, $\nabla \Phi_{\omega,\nu} \in \mathrm{L}^1\big(U(0,1)\big)$. Mit der Abschneidefunktion

$$\psi_n(y) := \boldsymbol{\eta}\big(n \cdot |x - y|\big) \qquad ,$$

die

$$\big| \nabla \psi_n(y) \big| = \Big| \boldsymbol{\eta}'\big(n \cdot |x - y|\big) \cdot n \cdot \frac{x - y}{|x - y|} \Big| \le c \cdot n \le c \cdot |x - y|^{-1}$$

erfüllt und somit

$$\psi_n \cdot \vartheta_x \Phi_{\omega,\nu} \, , \; \nabla \psi_n \cdot \vartheta_x \Phi_{\omega,\nu} \, , \; \psi_n \cdot \nabla(\vartheta_x \Phi_{\omega,\nu}) \in \mathrm{L}^1\big(U(x,1)\big)$$

liefert, definieren wir

$$G_n := \psi_n \cdot G \qquad .$$

Dann folgt mit (5.6) aus

$$(\operatorname{div} G_n) \star \Phi^I_{\omega,\nu}(x) = G_n \star \operatorname{rot} \Phi^I_{\omega,\nu}(x)$$

durch Grenzübergang $n \to \infty$ und nach dem Satz von Lebesgue

$$(\operatorname{div} G) \star \Phi^I_{\omega,\nu}(x) = G \star \operatorname{rot} \Phi^I_{\omega,\nu}(x) \qquad .$$

Benutzen wir diese partielle Integrationsregel in (5.7) und (5.8), erhalten wir die Darstellungen

- $$E = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \Big(G \star (\operatorname{rot} \Phi^I_{\omega,\nu}) - \mathrm{i}\,\omega F \star \Phi^I_{\omega,\nu} - \frac{\mathrm{i}}{\omega} (\operatorname{div} F) \star (\operatorname{div} \Phi^I_{\omega,\nu}) \Big) \cdot \mathrm{d}x^I \quad , \tag{5.9}$$
- $$H = \sum_{J \in \mathcal{I}(q+1,N)} \Big(F \star (\operatorname{div} \Phi^J_{\omega,\nu}) - \mathrm{i}\,\omega G \star \Phi^J_{\omega,\nu} - \frac{\mathrm{i}}{\omega} (\operatorname{rot} G) \star (\operatorname{rot} \Phi^J_{\omega,\nu}) \Big) \cdot \mathrm{d}x^J \quad . \tag{5.10}$$

Definieren wir zur Verschönerung der Notation konstante q– bzw. $(q+1)$–Formen durch

$$A := \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} A_I \, \mathrm{d}x^I \quad , \quad B := \sum_{J \in \mathcal{I}(q+1,N)} B_J \, \mathrm{d}x^J \quad \text{für} \quad A_I, B_J \in \mathbb{C} \quad ,$$

so können wir mit

$$A_{\omega,\nu} := \Phi_{\omega,\nu} \cdot A \quad \text{und} \quad B_{\omega,\nu} := \Phi_{\omega,\nu} \cdot B$$

die Formeln (5.9) und (5.10) eleganter schreiben und zusammenfassen, denn es gilt dann

$$\begin{aligned} &\big\langle (E,H),(A,B) \big\rangle_{q,q+1} = \langle E, A \rangle_q + \langle H, B \rangle_{q+1} \\ = &\sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \Big(G \star (\operatorname{rot} \Phi^I_{\omega,\nu}) \cdot A_I - \mathrm{i}\,\omega F \star \Phi^I_{\omega,\nu} \cdot A_I - \frac{\mathrm{i}}{\omega} (\operatorname{div} F) \star (\operatorname{div} \Phi^I_{\omega,\nu}) \cdot A_I \Big) \\ &+ \sum_{J \in \mathcal{I}(q+1,N)} \Big(F \star (\operatorname{div} \Phi^J_{\omega,\nu}) \cdot B_J - \mathrm{i}\,\omega G \star \Phi^J_{\omega,\nu} \cdot B_J - \frac{\mathrm{i}}{\omega} (\operatorname{rot} G) \star (\operatorname{rot} \Phi^J_{\omega,\nu}) \cdot B_J \Big) \quad . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Wegen

$$A_{\omega,\nu} = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} \Phi_{\omega,\nu} \cdot A_I \, \mathrm{d}x^I = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} A_I \cdot \Phi^I_{\omega,\nu} \quad \text{und damit} \quad \operatorname{rot} A_{\omega,\nu} = \sum_{I \in \mathcal{I}(q,N)} A_I \cdot \operatorname{rot} \Phi^I_{\omega,\nu}$$

erhalten wir aus (5.11) die Darstellung

$$\begin{aligned} &\big\langle (E,H),(A,B) \big\rangle_{q,q+1} \\ &= G \star (\operatorname{rot} A_{\omega,\nu}) + F \star (\operatorname{div} B_{\omega,\nu}) - \mathrm{i}\,\omega \big(F \star A_{\omega,\nu} + G \star B_{\omega,\nu} \big) \\ &\quad - \frac{\mathrm{i}}{\omega} \Big((\operatorname{div} F) \star (\operatorname{div} A_{\omega,\nu}) + (\operatorname{rot} G) \star (\operatorname{rot} B_{\omega,\nu}) \Big) \quad . \end{aligned} \tag{5.12}$$

Definieren wir auf kanonische Weise für geeignete Formen–Paare die Faltung

$$(u,U) \star (v,V)(x) = u \star v(x) + U \star V(x) \quad ,$$

so liefert dies schließlich die kompakte Darstellungsformel

$$\begin{aligned} &\big\langle (E,H)(x),(A,B) \big\rangle_{q,q+1} \\ &= (F,G) \star \big(M - \mathrm{i}\,\omega \big) (A_{\omega,\nu}, B_{\omega,\nu})(x) - \frac{\mathrm{i}}{\omega} (\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G) \star (\operatorname{div} A_{\omega,\nu}, \operatorname{rot} B_{\omega,\nu})(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^N \quad . \end{aligned} \tag{5.13}$$

Um auch Daten (F,G) ohne kompakten Träger darstellen zu können, benötigen wir das

Lemma 5.3
Seien $3 \le N \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Dann liefert der Integralkern $|x-y|^p \cdot b(x,y)$ einen stetigen linearen Operator von L^2_s nach L^2_t , falls nur eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $p = s - t - N$ *und* $-N/2 < t < s < N/2$

(ii) $p > -N/2$ *und* $s, -t > \max\{N/2, N/2 + p\}$

Beweis:
(i) wird von McOwen in $\big[$[22], Lemma 1$\big]$ und **(ii)** von Weck und Witsch in $\big[$[53], Lemma 13$\big]$ bewiesen. ■

Wir bekommen den

Satz 5.4
Seien $0 \neq \omega \in K \Subset \mathbb{C}_+$ und $s \in (1/2, N/2)$ sowie $t := s - (N+1)/2$. Dann gilt für alle

$$(F,G) \in \mathbf{D}_s^q \times \mathbf{R}_s^{q+1}$$

und alle konstanten Formen $(A,B) \in \mathrm{A}^q \times \mathrm{A}^{q+1}$ im Sinne von L_t^2 die Darstellungsformel

$$\begin{aligned}&\big\langle L_\omega(F,G),(A,B)\big\rangle_{q,q+1}\\ &= (F,G) \star \big(M - \mathrm{i}\,\omega\big)(A_{\omega,\nu}, B_{\omega,\nu}) - \frac{\mathrm{i}}{\omega}(\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G) \star (\operatorname{div} A_{\omega,\nu}, \operatorname{rot} B_{\omega,\nu}) \quad .\end{aligned}$$

Desweiteren existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $0 \neq \omega \in K$ und alle $(F,G) \in \mathbf{D}_s^q \times \mathbf{R}_s^{q+1}$ die Abschätzung

$$\big\|L_\omega(F,G)\big\|_{\mathbf{R}_t^q \times \mathbf{D}_t^{q+1}} \leq c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \frac{1}{|\omega|} \cdot \big\|(\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N}\Big)$$

gilt.

Beweis:
Wählen wir zu $s \in (1/2, N/2)$ und $(F,G) \in \mathbf{D}_s^q \times \mathbf{R}_s^{q+1}$ mit Lemma 3.1 eine Folge

$$\big((F_n, G_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_0^{\infty,q} \times \mathrm{C}_0^{\infty,q+1} \qquad \text{mit} \qquad (F_n,G_n) \xrightarrow{n\to\infty} (F,G) \qquad \text{in} \qquad \mathbf{D}_s^q \times \mathbf{R}_s^{q+1} \quad ,$$

so liefert zunächst Satz 4.29 (iv) für $t = s - (N+1)/2 < -1/2$ die Konvergenz von

$$(E_n, H_n) := L_\omega(F_n, G_n)$$

in $\mathbf{R}_t^q \times \mathbf{D}_t^{q+1}$ gegen

$$(E,H) := L_\omega(F,G) \in \mathbf{R}_t^q \times \mathbf{D}_t^{q+1} \quad .$$

Desweiteren können wir mit der Darstellungsformel (5.13) für beliebige konstante q– bzw. $(q+1)$–Formen A bzw. B die Form (E_n, H_n) ausdrücken:

$$\begin{aligned}&\big\langle (E_n,H_n),(A,B)\big\rangle_{q,q+1}\\ &= (F_n,G_n) \star \big(M - \mathrm{i}\,\omega\big)(A_{\omega,\nu}, B_{\omega,\nu}) - \frac{\mathrm{i}}{\omega}(\operatorname{div} F_n, \operatorname{rot} G_n) \star (\operatorname{div} A_{\omega,\nu}, \operatorname{rot} B_{\omega,\nu})\end{aligned} \tag{5.14}$$

An z. B. (5.11) sehen wir, daß die auftretenden Faltungskerne im wesentlichen aus

$$\varphi_{\omega,\nu} \circ r \qquad \text{und} \qquad \varphi'_{\omega,\nu} \circ r$$

bestehen und sich diese mit Lemma 5.1 wie folgt abschätzen lassen:

$$\big|\varphi_{\omega,\nu}(r)\big|\,,\ \big|\varphi'_{\omega,\nu}(r)\big| \leq c \cdot \big(r^{2-N} + r^{1-N} + r^{\frac{1-N}{2}}\big) \leq c \cdot \big(r^{1-N} + r^{\frac{1-N}{2}}\big)$$

Für $s \in (1/2, N/2)$ sind $t = s - (N+1)/2 \in (-N/2, -1/2)$ und $-N/2 < t < s < N/2$ sowie

$$p := \frac{1-N}{2} = s - t - N$$

und nach Lemma 5.3 (i) sind Integraloperatoren mit Kernen der Gestalt

$$|x-y|^p \cdot b(x,y) \tag{5.15}$$

stetig als Operatoren von L_s^2 nach L_t^2. Für $\tilde{t} := s-1$ gelten $-N/2 < \tilde{t} < s < N/2$ und $p := 1 - N = s - \tilde{t} - N$. Wiederum sind nach Lemma 5.3 (i) Integraloperatoren mit Kernen der Gestalt (5.15) stetig als Operatoren von L_s^2 nach $\mathrm{L}_{\tilde{t}}^2$. Wegen $\tilde{t} = s - 1 > -1/2 > t$ und der Monotonie der gewichteten Normen liefern folglich alle auftretenden Kerne stetige Integraloperatoren von L_s^2 nach L_t^2. Also konvergiert auch die rechte Seite von (5.14) in L_t^2, und wir erhalten die behauptete Darstellungsformel.
Wegen der Differentialgleichung genügt es, $\big\|L_\omega(F,G)\big\|_{0,t,\mathbb{R}^N}$ abzuschätzen. Nach Lemma 5.1 sind die relevanten Faltungsoperatoren sogar gleichmäßig bzgl. $0 \neq \omega \in K$ beschränkt, so daß die Darstellungsformel die gewünschte Abschätzung

$$\big\|L_\omega(F,G)\big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \frac{1}{|\omega|} \cdot \big\|(\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N}\Big)$$

liefert. ∎

Bemerkung 5.5
Da sich die zweiten Ableitungen von $\varphi_{\omega,\nu}$ bei Null nur noch wie r^{-N} verhalten, können wir mit dieser Methode in der Darstellungsformel nicht alle Ableitungen von (F,G) entfernen, denn dann wäre Lemma 5.3 nicht mehr anwendbar.

5.3 Niederfrequenzasymptotik im Ganzraum

Wir wollen nun mit Hilfe der Darstellungsformel und der Taylor–Entwicklung der Grundlösung die Niederfrequenzasymptotik explizit angeben.
Setzen wir die Taylor–Entwicklungen aus Lemma 5.2 in die Darstellungsformel des Satzes 5.4 ein, erhalten wir nach Umsortierung und komponentenweiser Auswertung

$$\begin{aligned} L_\omega(F,G) = \sum_{j=0}^{J} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^j \cdot \Big(\Phi_j(F,G) + \frac{\mathrm{i}}{\omega}\Psi_j(\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G)\Big) \\ + \omega^{J+1} \cdot \Big(\mathsf{Rest}_{\omega,J}(F,G) + \frac{1}{\omega}\widetilde{\mathsf{Rest}}_{\omega,J}(\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G)\Big) \quad . \end{aligned} \tag{5.16}$$

Hierbei sind Φ_j und Ψ_j bzw. $\mathsf{Rest}_{\omega,J}$ und $\widetilde{\mathsf{Rest}}_{\omega,J}$ Faltungsoperatoren mit Integralkernen der Gestalt

$$b_j(x,y) \cdot |x-y|^{1-N+j} \quad , \quad j = 0,\dots,J \qquad \text{bzw.} \qquad b_{\mathsf{Rest}}(x,y,\omega) \cdot |x-y|^{2-N+J} \quad . \tag{5.17}$$

Die Kernteile $b_j(x,y)$ sind beschränkt und unabhängig von ω. Desweiteren sind nach Lemma 5.2 die Kernteile $b_{\mathsf{Rest}}(x,y,\omega)$ gleichmäßig bzgl. $x,y \in \mathbb{R}^N$ und $\omega \in \mathbb{C}_+$ beschränkt.
Damit kommen wir zu folgender Asymptotik:

Lemma 5.6
Seien $J \in \mathbb{N}_0$ und $s > J + 1/2$ sowie $t < \min\big\{s, N/2\big\} - J - 2$. Dann gibt es zu $j = 0,\dots,J$ beschränkte lineare Operatoren Φ_j und Ψ_j mit

$$\Phi_j \in \mathrm{B}\left(\mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s, \mathrm{L}^{2,q}_t \times \mathrm{L}^{2,q+1}_t\right) \qquad \textit{und} \qquad \Psi_j \in \mathrm{B}\left(\mathrm{L}^{2,q-1}_s \times \mathrm{L}^{2,q+2}_s, \mathrm{L}^{2,q}_t \times \mathrm{L}^{2,q+1}_t\right)$$

und eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $\omega \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ und alle $(F,G) \in \mathbf{D}^q_s \times \mathbf{R}^{q+1}_s$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\Big\| L_\omega(F,G) - \sum_{j=0}^{J} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^j \cdot \big(\Phi_j(F,G) + \frac{\mathrm{i}}{\omega}\Psi_j(\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G)\big)\Big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} \\ &\le c \cdot |\omega|^{J+1} \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \frac{1}{|\omega|} \cdot \big\|(\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N}\Big) \end{aligned}$$

gilt.

Beweis:
Die in (5.16) und (5.17) auftretenden Faltungskernteile b_j bzw. b_{Rest} hängen entweder gar nicht von ω ab oder sind gleichmäßig bzgl. $\omega \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ beschränkt. Damit müssen wir nur noch zeigen, daß Integralkerne der Gestalt

$$|x-y|^{1-N+j} \qquad , \qquad j = 0,\dots,J+1 \qquad ,$$

stetige lineare Operatoren von L^2_s nach L^2_t erzeugen.
Halten wir s und t fest und verkleinern J, so bleiben die Voraussetzungen erfüllt und wir brauchen weniger zu zeigen. Daher genügt es, den Fall $j = J+1$, also den Kern

$$|x-y|^{2-N+J} \qquad ,$$

zu betrachten (Das ergibt sich auch daraus, daß alle Kerne zu $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ gehören und für $|x-y| > 1$ mit j wachsen.).
Wir unterscheiden zwei Fälle:
`1. Fall,` $J \le N-3$: Hier wollen wir s und t durch

$$-N/2 < \tilde{t} < \tilde{s} < N/2$$

ersetzen, so daß

$$\tilde{s} - \tilde{t} = J + 2 \qquad \text{und} \qquad t \le \tilde{t} < \tilde{s} \le s$$

gelten. Dann folgt mit Lemma 5.3 (i) die Stetigkeit der betreffenden Faltungsoperatoren von $\mathrm{L}^2_{\tilde{s}}$ nach $\mathrm{L}^2_{\tilde{t}}$ und damit wegen der Monotonie der gewichteten Normen die Stetigkeit von L^2_s nach L^2_t.
Für $s < N/2$ wählen wir $\tilde{s} := s$ und beachten $\tilde{t} := s - J - 2 > t$ sowie $\tilde{t} > J + 1/2 - J - 2 = -3/2 \ge -N/2$.
Gilt $s \ge N/2$ und $t > -N/2$, so setzen wir $\tilde{t} := t$ und beachten $\tilde{s} := t + J + 2 < N/2$.
Bleibt noch der Fall $s \ge N/2$ und $t \le -N/2$ zu betrachten. Hier wählen wir $\tilde{t}, \tilde{s} \in (-N/2, N/2)$ beliebig mit

$\tilde{s} - \tilde{t} = J + 2$; dies ist möglich, da $J + 2 \leq N - 1 < N$.
`2. Fall,` $J \geq N - 2$: Hier gelten

$$p := J + 2 - N \geq 0 > -N/2$$

und

$$p + N/2 = J + 2 - N/2 \begin{cases} \leq J + 1/2 < s \\ < -t \end{cases} ,$$

so daß die behauptete Stetigkeit aus Lemma 5.3 (ii) folgt. ∎

Korollar 5.7
Seien $J \in \mathbb{N}_0$, $s > J + 1/2$ und $t < \min\{s, N/2\} - J - 2$ sowie Φ_j, Ψ_j, $j = 0, \dots, J$, die Operatoren aus Lemma 5.6. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $\omega \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ und alle $(F, G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s$ mit der Zerlegung aus Lemma 2.12,

$$(F, G) = (F_{\mathrm{D}}, G_{\mathrm{R}}) + (F_{\mathrm{R}}, G_{\mathrm{D}}) + (F_{\mathcal{S}}, G_{\mathcal{S}}) \in ({}_0\mathrm{D}^q_s \times {}_0\mathrm{R}^{q+1}_s) \dotplus ({}_0\mathrm{R}^q_s \times {}_0\mathrm{D}^{q+1}_s) \dotplus (\mathcal{S}^q_s \times \mathcal{S}^{q+1}_s) ,$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \Big\| L_\omega(F, G) &- \sum_{j=0}^{J} (-\mathrm{i}\,\omega)^j \cdot \Phi_j(F, G) \\ &+ \sum_{j=0}^{J} (-\mathrm{i}\,\omega)^j \cdot \Phi_j(F_{\mathrm{R}}, G_{\mathrm{D}}) + \frac{\mathrm{i}}{\omega} \cdot (F_{\mathrm{R}}, G_{\mathrm{D}}) - \frac{\mathrm{i}}{\omega} \sum_{j=0}^{J} (-\mathrm{i}\,\omega)^j \cdot \Psi_j(\operatorname{div} F_{\mathcal{S}}, \operatorname{rot} G_{\mathcal{S}}) \Big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} \\ &\leq c \cdot |\omega|^{J+1} \cdot \Big(\big\|(F, G)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \frac{1}{|\omega|} \cdot \big\|(\operatorname{div} F_{\mathcal{S}}, \operatorname{rot} G_{\mathcal{S}})\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} \Big) \end{aligned}$$

gilt.

Beweis:
Zunächst ist L_ω auf ganz $\mathrm{L}^{2,q}_s \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s$ wohldefiniert. Desweiteren können wir Lemma 5.6 auf $(F_{\mathrm{D}}, G_{\mathrm{R}})$ und $(F_{\mathcal{S}}, G_{\mathcal{S}})$ anwenden. Wegen $(F_{\mathrm{R}}, G_{\mathrm{D}}) \in ({}_0\mathrm{R}^q_s \times {}_0\mathrm{D}^{q+1}_s)$ folgt

$$(M + \mathrm{i}\,\omega)(F_{\mathrm{R}}, G_{\mathrm{D}}) = \mathrm{i}\,\omega(F_{\mathrm{R}}, G_{\mathrm{D}})$$

und mit $s > J + 1/2 > -1/2$ erfüllt $(F_{\mathrm{R}}, G_{\mathrm{D}})$ auch die Strahlungsbedingung, so daß wir

$$L_\omega(F_{\mathrm{R}}, G_{\mathrm{D}}) = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}(F_{\mathrm{R}}, G_{\mathrm{D}})$$

erhalten. Setzen wir diese drei Asymptotiken zusammen, liefert die Stetigkeit der Projektoren aus Lemma 2.12 die Behauptung. ∎

5.4 Türme spezieller statischer Lösungen

Wir wollen nun mit Hilfe des sphärischen Kalküls für $k, \sigma \in \mathbb{N}_0$ „Türme” homogener Formen

$${}^{\pm}D^{q,k}_{\sigma,m} \qquad \text{und} \qquad {}^{\pm}R^{q,k}_{\sigma,m} \qquad \text{aus} \qquad \mathrm{C}^{\infty,q}\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big) ,$$

die sich aus Radiuspotenzen und den sphärischen Eigenformen $S^q_{\sigma,m}$ und $T^q_{\sigma,m}$ zusammensetzen, bestimmen, so daß

- $\operatorname{rot} {}^{\pm}D^{q,0}_{\sigma,m} = 0$, • $\operatorname{div} {}^{\pm}R^{q+1,0}_{\sigma,m} = 0$, (5.18)
- $\operatorname{div} {}^{\pm}D^{q,k}_{\sigma,m} = 0$, • $\operatorname{rot} {}^{\pm}R^{q+1,k}_{\sigma,m} = 0$, (5.19)
- $\operatorname{rot} {}^{\pm}D^{q,k}_{\sigma,m} = {}^{\pm}R^{q+1,k-1}_{\sigma,m}$, • $\operatorname{div} {}^{\pm}R^{q+1,k}_{\sigma,m} = {}^{\pm}D^{q,k-1}_{\sigma,m}$ (5.20)

und damit auch $M({}^{\pm}D^{q,k+1}_{\sigma,m}, {}^{\pm}R^{q+1,\ell+1}_{\gamma,n}) = ({}^{\pm}D^{q,\ell}_{\gamma,n}, {}^{\pm}R^{q+1,k}_{\sigma,m})$ gelten. Diese Türme sind schon von Weck und Witsch in $\big[$[53], p. 1503$\big]$ angegeben, wir wollen sie aber zunächst ein wenig genauer diskutieren. Dazu erinnern wir uns an die Eigenformen $S^q_{\sigma,m}$ und $T^q_{\sigma,m}$ sowie an $\omega^{q-1}_\sigma = (q + \sigma)^{\frac{1}{2}} \cdot (q' + \sigma)^{\frac{1}{2}}$ aus Kapitel 2 und kommen zur

Definition 5.8
Für $q \in \{1,\ldots,N-1\}$ und $k,\sigma \in \mathbb{N}_0$ sowie $m \in \{1,\ldots,\mu_\sigma^q\}$ definieren wir die „regulären Turmformen”

- $${}^{+}D^{q,2k}_{\sigma,m} := {}^{+}\alpha^{q,k}_{\sigma} \cdot r^{2k+\sigma} \cdot \big(-\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma} \check{\rho} T^{q-1}_{\sigma,m} + (q' + 2k + \sigma)\, \check{\tau} S^{q}_{\sigma,m} \big) \quad ,$$
- $${}^{+}D^{q-1,2k+1}_{\sigma,m} := {}^{+}\alpha^{q,k}_{\sigma} \cdot r^{2k+1+\sigma} \cdot \check{\tau} T^{q-1}_{\sigma,m} \quad ,$$
- $${}^{+}R^{q,2k}_{\sigma,m} := {}^{+}\alpha^{q,k}_{\sigma} \cdot r^{2k+\sigma} \cdot \big((q + 2k + \sigma)\, \check{\rho} T^{q-1}_{\sigma,m} + \mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma} \check{\tau} S^{q}_{\sigma,m} \big) \quad ,$$
- $${}^{+}R^{q+1,2k+1}_{\sigma,m} := {}^{+}\alpha^{q,k}_{\sigma} \cdot r^{2k+1+\sigma} \cdot \check{\rho} S^{q}_{\sigma,m}$$

und

- $${}^{-}D^{q,2k}_{\sigma,m} := {}^{-}\alpha^{q,k}_{\sigma} \cdot r^{2k-\sigma-N} \cdot \big(-\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma} \check{\rho} T^{q-1}_{\sigma,m} + (q' + 2k - \sigma - N)\, \check{\tau} S^{q}_{\sigma,m} \big) \quad ,$$
- $${}^{-}D^{q-1,2k+1}_{\sigma,m} := {}^{-}\alpha^{q,k}_{\sigma} \cdot r^{2k+1-\sigma-N} \cdot \check{\tau} T^{q-1}_{\sigma,m} \quad ,$$
- $${}^{-}R^{q,2k}_{\sigma,m} := {}^{-}\alpha^{q,k}_{\sigma} \cdot r^{2k-\sigma-N} \cdot \big((q + 2k - \sigma - N)\, \check{\rho} T^{q-1}_{\sigma,m} + \mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma} \check{\tau} S^{q}_{\sigma,m} \big) \quad ,$$
- $${}^{-}R^{q+1,2k+1}_{\sigma,m} := {}^{-}\alpha^{q,k}_{\sigma} \cdot r^{2k+1-\sigma-N} \cdot \check{\rho} S^{q}_{\sigma,m} \quad .$$

Hierbei genügen die Koeffizienten der Rekursion

$${}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma} := \frac{{}^{\pm}\alpha^{q,k-1}_{\sigma}}{2k \cdot (2k \pm 2\sigma \pm N)} \quad , \quad {}^{-}\alpha^{q,0}_{\sigma} := 1 \quad , \quad {}^{+}\alpha^{q,0}_{\sigma} := \frac{-1}{2\sigma + N} \quad .$$

Für $q \in \{0, N\}$ definieren wir die vier „Ausnahmeturmformen”

- $${}^{+}D^{0,2k}_{0,1} := {}^{+}\alpha^{0,k}_{0} \cdot r^{2k} \cdot (2k + N) \cdot \check{\tau} S^{0}_{0,1} \quad ,$$
- $${}^{+}D^{N-1,2k+1}_{0,1} := {}^{+}\alpha^{N,k}_{0} \cdot r^{2k+1} \cdot \check{\tau} T^{N-1}_{0,1} \quad ,$$
- $${}^{+}R^{N,2k}_{0,1} := {}^{+}\alpha^{N,k}_{0} \cdot r^{2k} \cdot (2k + N) \cdot \check{\rho} T^{N-1}_{0,1} \quad ,$$
- $${}^{+}R^{1,2k+1}_{0,1} := {}^{+}\alpha^{0,k}_{0} \cdot r^{2k+1} \cdot \check{\rho} S^{0}_{0,1}$$

und

- $${}^{-}D^{0,2k}_{0,1} := {}^{-}\alpha^{0,k}_{0} \cdot r^{2k-N} \cdot 2k \cdot \check{\tau} S^{0}_{0,1} \quad ,$$
- $${}^{-}D^{N-1,2k+1}_{0,1} := {}^{-}\alpha^{N,k}_{0} \cdot r^{2k+1-N} \cdot \check{\tau} T^{N-1}_{0,1} \quad ,$$
- $${}^{-}R^{N,2k}_{0,1} := {}^{-}\alpha^{N,k}_{0} \cdot r^{2k-N} \cdot 2k \cdot \check{\rho} T^{N-1}_{0,1} \quad ,$$
- $${}^{-}R^{1,2k+1}_{0,1} := {}^{-}\alpha^{0,k}_{0} \cdot r^{2k+1-N} \cdot \check{\rho} S^{0}_{0,1} \quad .$$

Hier erfüllen die Koeffizienten die Rekursion

$${}^{\pm}\alpha^{q,k}_{0} := \frac{{}^{\pm}\alpha^{q,k-1}_{0}}{2k \cdot (2k \pm N)} \quad , \quad {}^{-}\alpha^{q,0}_{0} := 1 \quad , \quad {}^{+}\alpha^{q,0}_{0} := \frac{1}{N} \quad .$$

Bemerkung 5.9

(i) *Die Turmformen sind wohldefiniert, da N ungerade ist und der Nenner in der Koeffizientenrekursion folglich nicht verschwinden kann.*

(ii) *Auch bei geraden Dimensionen ist die Rekursion für die $(+)$–Turmformen stets und für die $(-)$–Turmformen bis $k < N/2$ wohldefiniert. Für größere k müßten wir im letzteren Fall mit zusätzlichen logarithmischen Radialfunktionen arbeiten. Für gerade Dimensionen $N \geq 4$ sind daher alle Turmformen bis zur Höhe drei wohldefiniert.*

Definition 5.10
Für Turmformen ${}^{\pm}D^{q,k}_{\sigma,m}$ bzw. ${}^{\pm}R^{q,k}_{\sigma,m}$ aus Definition 5.8 definieren wir deren „Homogenitätsgrad” durch

$$h({}^{\pm}D^{q,k}_{\sigma,m}) := h({}^{\pm}R^{q,k}_{\sigma,m}) := {}^{\pm}\mathrm{h}^{k}_{\sigma} := \begin{cases} k + \sigma & , \quad \pm = + \\ k - \sigma - N & , \quad \pm = - \end{cases} \quad .$$

Desweiteren wollen wir k als ihre „Höhe”, σ als ihren „Index” und m als ihren „Zählindex” bezeichnen.

Bemerkung 5.11
Die Turmformen ${}^{\pm}D^{q,k}_{\sigma,m}$ *bzw.* ${}^{\pm}R^{q,k}_{\sigma,m}$ *aus Definition 5.8 sind* ${}^{\pm}\mathrm{h}^{k}_{\sigma}$*–homogen. Setzen wir alle nicht definierten Terme Null, lassen sich diese Turmformen etwas kompakter schreiben:*

- $${}^{\pm}D^{q,2k}_{\sigma,m} := {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma} \cdot r^{{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma}} \cdot \big(-\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma} \check{\rho} T^{q-1}_{\sigma,m} + (q' + {}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma})\,\check{\tau} S^{q}_{\sigma,m} \big)$$
- $${}^{\pm}D^{q-1,2k+1}_{\sigma,m} := {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma} \cdot r^{{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k+1}_{\sigma}} \cdot \check{\tau} T^{q-1}_{\sigma,m}$$
- $${}^{\pm}R^{q,2k}_{\sigma,m} := {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma} \cdot r^{{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma}} \cdot \big((q + {}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma})\,\check{\rho} T^{q-1}_{\sigma,m} + \mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma} \check{\tau} S^{q}_{\sigma,m} \big)$$
- $${}^{\pm}R^{q+1,2k+1}_{\sigma,m} := {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma} \cdot r^{{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k+1}_{\sigma}} \cdot \check{\rho} S^{q}_{\sigma,m}$$

Die Koeffizienten genügen der Rekursion

$${}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma} := \frac{{}^{\pm}\alpha^{q,k-1}_{\sigma}}{2k \cdot (2k \pm 2\sigma \pm N)} \quad , \quad {}^{-}\alpha^{q,0}_{\sigma} := 1 \quad , \quad {}^{+}\alpha^{q,0}_{\sigma} := \frac{(-1)^{1+\delta_{q,0}+\delta_{q,N}}}{2\sigma + N} \quad .$$

Man beachte, daß bei den Ausnahmeturmformen nur der Index $(\sigma, m) = (0, 1)$ *vorkommt und*

$${}^{-}D^{0,0}_{0,1} = 0 \qquad \textit{sowie} \qquad {}^{-}R^{N,0}_{0,1} = 0$$

gelten. Für die obige Koeffizientenrekursion erhalten wir mit der Gamma–Funktion Γ *die expliziten Formeln*

$${}^{+}\alpha^{q,k}_{\sigma} = \frac{\Gamma(1 + N/2 + \sigma)}{4^k \cdot k! \cdot \Gamma(k + 1 + N/2 + \sigma)} \cdot \frac{(-1)^{1+\delta_{q,0}+\delta_{q,N}}}{2\sigma + N} \quad \textit{und} \quad {}^{-}\alpha^{q,k}_{\sigma} = \frac{\Gamma(1 - N/2 - \sigma)}{4^k \cdot k! \cdot \Gamma(k + 1 - N/2 - \sigma)} \quad .$$

Bemerkung 5.12
Die Rekursion bzw. explizite Darstellung der ${}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma}$ *zeigt, daß diese Koeffizienten für* $k \to \infty$ *rapide gegen Null gehen. Daher sind die Turmformen* ${}^{\pm}D^{q,k}_{\sigma,m}$ *und* ${}^{\pm}R^{q,k}_{\sigma,m}$ *mitsamt allen Ableitungen für alle* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *gleichmäßig bzgl.* x *mit* $a \leq |x| \leq b$ *und* $k, \sigma, m \in \mathbb{N}_0$ *beschränkt.*

Wir bekommen das

Lemma 5.13
Für alle q, k, σ, m *im Sinne von Definition 5.8 sind* ${}^{\pm}D^{q,k}_{\sigma,m}$ *und* ${}^{\pm}R^{q,k}_{\sigma,m}$ *Lösungen der Systeme* (5.18)—(5.20).

Beweis:
Diskutieren wir z. B. die regulären Formen ${}^{\pm}D^{q,k}_{\sigma,m}$. Da wir es mit homogenen Formen zu tun haben, benutzen wir die Formeln (2.13) und (2.14) und häufig (2.21).

- $$\begin{aligned} \operatorname{div} {}^{\pm}D^{q-1,2k+1}_{\sigma,m} &= {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma} [\check{\rho} \;\; \check{\tau}]\, \widetilde{\operatorname{div}} \begin{bmatrix} \rho\big(r^{{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k+1}_{\sigma}} \check{\tau} T^{q-1}_{\sigma,m}\big) \\ \tau\big(r^{{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k+1}_{\sigma}} \check{\tau} T^{q-1}_{\sigma,m}\big) \end{bmatrix} \\ &= {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma} r^{{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k+1}_{\sigma}-1} [\check{\rho} \;\; \check{\tau}] \begin{bmatrix} -\operatorname{Div} & 0 \\ (q-1)' + {}^{\pm}\mathrm{h}^{2k+1}_{\sigma} & \operatorname{Div} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T^{q-1}_{\sigma,m} \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \operatorname{rot} {}^{\pm}D^{q-1,2k+1}_{\sigma,m} &= {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma} [\check{\rho} \;\; \check{\tau}]\, \widetilde{\operatorname{rot}} \begin{bmatrix} \rho\big(r^{{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k+1}_{\sigma}} \check{\tau} T^{q-1}_{\sigma,m}\big) \\ \tau\big(r^{{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k+1}_{\sigma}} \check{\tau} T^{q-1}_{\sigma,m}\big) \end{bmatrix} \\ &= {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma} r^{{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k+1}_{\sigma}-1} [\check{\rho} \;\; \check{\tau}] \begin{bmatrix} -\operatorname{Rot} & q - 1 + {}^{\pm}\mathrm{h}^{2k+1}_{\sigma} \\ 0 & \operatorname{Rot} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T^{q-1}_{\sigma,m} \end{bmatrix} \\ &= {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma} r^{{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma}} \big((q + {}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma}) \check{\rho} T^{q-1}_{\sigma,m} + \mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma} \check{\tau} S^{q}_{\sigma,m} \big) \\ &= {}^{\pm}R^{q,2k}_{\sigma,m} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\operatorname{div} {}^{\pm}D^{q,2k}_{\sigma,m} &= {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma}[\check\rho\ \ \check\tau]\,\widetilde{\operatorname{div}}\begin{bmatrix}\rho\Big(r^{\pm\mathrm{h}^{2k}_{\sigma}}\big(-\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma}\check\rho T^{q-1}_{\sigma,m}+(q'+{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma})\,\check\tau S^{q}_{\sigma,m})\Big)\\ \tau\Big(r^{\pm\mathrm{h}^{2k}_{\sigma}}\big(-\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma}\check\rho T^{q-1}_{\sigma,m}+(q'+{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma})\,\check\tau S^{q}_{\sigma,m})\Big)\end{bmatrix}\\
&= {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma}r^{\pm\mathrm{h}^{2k}_{\sigma}-1}[\check\rho\ \ \check\tau]\begin{bmatrix}-\operatorname{Div} & 0\\ q'+{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma} & \operatorname{Div}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma}T^{q-1}_{\sigma,m}\\ (q'+{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma})S^{q}_{\sigma,m}\end{bmatrix}\\
&= {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma}r^{\pm\mathrm{h}^{2k}_{\sigma}-1}\big(-\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma}(q'+{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma})+\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma}(q'+{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma})\big)\check\tau T^{q-1}_{\sigma,m}\\
&= 0
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\operatorname{rot} {}^{\pm}D^{q,2k}_{\sigma,m} &= {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma}[\check\rho\ \ \check\tau]\,\widetilde{\operatorname{rot}}\begin{bmatrix}\rho\Big(r^{\pm\mathrm{h}^{2k}_{\sigma}}\big(-\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma}\check\rho T^{q-1}_{\sigma,m}+(q'+{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma})\,\check\tau S^{q}_{\sigma,m})\Big)\\ \tau\Big(r^{\pm\mathrm{h}^{2k}_{\sigma}}\big(-\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma}\check\rho T^{q-1}_{\sigma,m}+(q'+{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma})\,\check\tau S^{q}_{\sigma,m})\Big)\end{bmatrix}\\
&= {}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma}r^{\pm\mathrm{h}^{2k}_{\sigma}-1}[\check\rho\ \ \check\tau]\begin{bmatrix}-\operatorname{Rot} & q+{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma}\\ 0 & \operatorname{Rot}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_{\sigma}T^{q-1}_{\sigma,m}\\ (q'+{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma})S^{q}_{\sigma,m}\end{bmatrix}\\
&= \big((q'+{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma})(q+{}^{\pm}\mathrm{h}^{2k}_{\sigma})-(\omega^{q-1}_{\sigma})^2\big)\cdot{}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma}\cdot r^{\pm\mathrm{h}^{2k-1}_{\sigma}}\check\rho S^{q}_{\sigma,m}\\
&= 2k(2k\pm 2\sigma\pm N)\cdot{}^{\pm}\alpha^{q,k}_{\sigma}\cdot r^{\pm\mathrm{h}^{2k-1}_{\sigma}}\check\rho S^{q}_{\sigma,m}\\
&= \begin{cases}{}^{\pm}\alpha^{q,k-1}_{\sigma}\cdot r^{\pm\mathrm{h}^{2k-1}_{\sigma}}\check\rho S^{q}_{\sigma,m} & \text{, falls } k\ge 1\\ 0 & \text{, falls } k=0\end{cases}\\
&= \begin{cases}{}^{\pm}R^{q+1,2k-1}_{\sigma,m} & \text{, falls } k\ge 1\\ 0 & \text{, falls } k=0\end{cases}
\end{aligned}$$

Analog beweisen wir die Formeln für ${}^{\pm}R^{q,k}_{\sigma,m}$ und die Ausnahmetürme. ■

Bemerkung 5.14
Für $k = 0, 1$ und alle σ, m gelten

$$\Delta\,{}^{\pm}D^{q,k}_{\sigma,m} = \Delta\,{}^{\pm}R^{q,k}_{\sigma,m} = 0$$

und daher liefert ein Vergleich mit den Potentialformen von Seite 21 für $q \in \{1, \dots, N-1\}$

- ${}^{-}D^{q,0}_{\sigma,m} = -(q+\sigma)^{\frac12}(2\sigma+N)^{\frac12}Q^{q,3}_{\sigma+2,m}$,
- ${}^{-}R^{q,0}_{\sigma,m} = \mathrm{i}(q'+\sigma)^{\frac12}(2\sigma+N)^{\frac12}Q^{q,3}_{\sigma+2,m}$,
- ${}^{+}D^{q,0}_{\sigma,m} = \mathrm{i}(q'+\sigma)^{\frac12}(2\sigma+N)^{-\frac12}P^{q,4}_{\sigma,m}$,
- ${}^{+}R^{q,0}_{\sigma,m} = -(q+\sigma)^{\frac12}(2\sigma+N)^{-\frac12}P^{q,4}_{\sigma,m}$,
- ${}^{-}D^{q-1,1}_{\sigma,m} = Q^{q-1,2}_{\sigma+1,m}$,
- ${}^{-}R^{q+1,1}_{\sigma,m} = Q^{q+1,1}_{\sigma+1,m}$,
- ${}^{+}D^{q-1,1}_{\sigma,m} = \dfrac{-1}{2\sigma+N}P^{q-1,2}_{\sigma+1,m}$,
- ${}^{+}R^{q+1,1}_{\sigma,m} = \dfrac{-1}{2\sigma+N}P^{q+1,1}_{\sigma+1,m}$

und für $q \in \{0, N\}$

- ${}^{-}D^{0,2}_{0,1} = \dfrac{-\mathrm{i}}{2-N}Q^{0,4}_{0,1}$,
- ${}^{-}R^{N,2}_{0,1} = \dfrac{1}{2-N}Q^{N,4}_{0,1}$,
- ${}^{+}D^{0,0}_{0,1} = -\mathrm{i}\,P^{0,4}_{0,1}$,
- ${}^{+}R^{N,0}_{0,1} = P^{N,4}_{0,1}$,
- ${}^{-}D^{N-1,1}_{0,1} = Q^{N-1,2}_{1,1}$,
- ${}^{-}R^{1,1}_{0,1} = Q^{1,1}_{1,1}$,
- ${}^{+}D^{N-1,1}_{0,1} = \dfrac{1}{N}P^{N-1,2}_{1,1}$,
- ${}^{+}R^{1,1}_{0,1} = \dfrac{1}{N}P^{1,1}_{1,1}$.

Insbesondere sind für $q \in \{1, \dots, N-1\}$ die Formen ${}^{-}D^{q,0}_{\sigma,m}$ und ${}^{-}R^{q,0}_{\sigma,m}$ bzw. ${}^{+}D^{q,0}_{\sigma,m}$ und ${}^{+}R^{q,0}_{\sigma,m}$ linear abhängig. Wir schreiben in diesem Fall

$${}^{-}D^{q,0}_{\sigma,m} \cong {}^{-}R^{q,0}_{\sigma,m} \qquad \textit{und} \qquad {}^{+}D^{q,0}_{\sigma,m} \cong {}^{+}R^{q,0}_{\sigma,m} \quad .$$

Die Formen $Q^{q,4}_{\sigma,m}$ bzw. $P^{q,3}_{\sigma+2,m}$ sind Linearkombinationen aus ${}^{-}D^{q,2}_{\sigma,m}$ und ${}^{-}R^{q,2}_{\sigma,m}$ bzw. ${}^{+}D^{q,2}_{\sigma,m}$ und ${}^{+}R^{q,2}_{\sigma,m}$.

Bemerkung 5.15
Die folgenden Bilder verdeutlichen die Türme und definieren die Begriffe „Rotations–" bzw. „Divergenzturm":

...			...	...		
		div $\swarrow$			$\searrow$ rot	
...	...					...
		rot $\searrow$			$\swarrow$ div	
4. Stock			${}^{\pm}R^{q,4}_{\sigma,m}$	${}^{\pm}D^{q,4}_{\sigma,m}$		
		div $\swarrow$			$\searrow$ rot	
3. Stock	${}^{\pm}D^{q-1,3}_{\sigma,m}$					${}^{\pm}R^{q+1,3}_{\sigma,m}$
		rot $\searrow$			$\swarrow$ div	
2. Stock			${}^{\pm}R^{q,2}_{\sigma,m}$	${}^{\pm}D^{q,2}_{\sigma,m}$		
		div $\swarrow$			$\searrow$ rot	
1. Stock	${}^{\pm}D^{q-1,1}_{\sigma,m}$					${}^{\pm}R^{q+1,1}_{\sigma,m}$
		rot $\searrow$			$\swarrow$ div	
Erdgeschoß			${}^{\pm}R^{q,0}_{\sigma,m}$ $\cong$	${}^{\pm}D^{q,0}_{\sigma,m}$		
	Rotationsturm			Divergenzturm		

Die obigen Türme sind in dieser Allgemeinheit nur für $q \in \{1, \ldots, N-1\}$ definiert. In den Ausnahmefällen $q \in \{0, N\}$ haben wir (Beachte ${}^{-}D^{0,0}_{0,1} = 0$ und ${}^{-}R^{N,0}_{0,1} = 0$!):

...			...	...		
		div $\swarrow$			$\searrow$ rot	
...	...					...
		rot $\searrow$			$\swarrow$ div	
4. Stock			${}^{\pm}R^{N,4}_{0,1}$	${}^{\pm}D^{0,4}_{0,1}$		
		div $\swarrow$			$\searrow$ rot	
3. Stock	${}^{\pm}D^{N-1,3}_{0,1}$					${}^{\pm}R^{1,3}_{0,1}$
		rot $\searrow$			$\swarrow$ div	
2. Stock			${}^{\pm}R^{N,2}_{0,1}$	${}^{\pm}D^{0,2}_{0,1}$		
		div $\swarrow$			$\searrow$ rot	
1. Stock	${}^{\pm}D^{N-1,1}_{0,1}$					${}^{\pm}R^{1,1}_{0,1}$
		rot $\searrow$			$\swarrow$ div	
Erdgeschoß			${}^{\pm}R^{N,0}_{0,1}$	${}^{\pm}D^{0,0}_{0,1}$		
	Rotationsturm			Divergenzturm		

Bemerkung 5.16
Obwohl $\operatorname{div} {}^{-}R^{1,1}_{0,1} = 0$ *ist, existiert kein* $D \in \mathrm{D}^2_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big)$ *mit* $\operatorname{div} D = {}^{-}R^{1,1}_{0,1}$ *. Entsprechend existiert trotz* $\operatorname{rot} {}^{-}D^{N-1,1}_{0,1} = 0$ *kein* $R \in \mathrm{R}^{N-2}_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big)$ *mit* $\operatorname{rot} R = {}^{-}D^{N-1,1}_{0,1}$ *. Insbesondere gibt es zu* ${}^{-}R^{1,1}_{0,1} = Q^{1,1}_{1,1}$ *keinen Divergenz– und zu* ${}^{-}D^{N-1,1}_{0,1} = Q^{N-1,2}_{1,1}$ *keinen Rotationsturm.*

Beweis:
Gäbe es ein $D \in \mathrm{D}^2_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big)$ mit $\operatorname{div} D = {}^-R^{1,1}_{0,1}$, so hätten wir mit Bemerkung 5.14 und Lemma 2.9 einerseits

$$\begin{aligned}\big\langle \operatorname{rot}(\eta^+ D^{0,0}_{0,1}), {}^-R^{1,1}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} &= \big\langle \underbrace{\operatorname{rot}(\eta^+ D^{0,0}_{0,1})}_{\in \mathrm{C}^{\infty,1}_0(\mathbb{R}^N\setminus\{0\})}, \operatorname{rot} {}^-D^{0,2}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\big\langle \operatorname{div}\operatorname{rot}(\eta^+ D^{0,0}_{0,1}), {}^-D^{0,2}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \\ &= -\big\langle C^+ D^{0,0}_{0,1}, {}^-D^{0,2}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\frac{1}{2-N}\big\langle C P^{0,4}_{0,1}, Q^{0,4}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = 1\end{aligned}$$

und andererseits

$$\big\langle \operatorname{rot}(\eta^+ D^{0,0}_{0,1}), {}^-R^{1,1}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \big\langle \operatorname{rot}(\eta^+ D^{0,0}_{0,1}), \operatorname{div} D\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\big\langle \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\eta^+ D^{0,0}_{0,1}), D\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = 0 \qquad ,$$

einen Widerspruch. Analog folgt die Behauptung über den Rotationsturm mit Hilfe der Testform ${}^+R^{N,0}_{0,1}$. ∎

Bemerkung 5.17
Aus Bemerkung 5.11 folgt $\rho^\pm D^{q,2k+1}_{\sigma,m} = 0$ *bzw.* $\tau^\pm R^{q,2k+1}_{\sigma,m} = 0$ *und somit* $T^\pm D^{q,2k+1}_{\sigma,m} = 0$ *bzw.* $R^\pm R^{q,2k+1}_{\sigma,m} = 0$ *aus* (2.8) *bzw.* (2.7). *Damit gelten nicht nur*

$$\operatorname{div} {}^\pm D^{q,2k+1}_{\sigma,m} = 0 \qquad \textit{bzw.} \qquad \operatorname{rot} {}^\pm R^{q,2k+1}_{\sigma,m} = 0 \qquad ,$$

sondern auch für alle $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ *mit Bemerkung 2.2*

$$\operatorname{div}\big(\varphi(r){}^\pm D^{q,2k+1}_{\sigma,m}\big) = 0 \qquad \textit{bzw.} \qquad \operatorname{rot}\big(\varphi(r){}^\pm R^{q,2k+1}_{\sigma,m}\big) = 0 \qquad .$$

Nun möchten wir Skalarprodukte der Form

$$\big\langle C\,{}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta D^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \quad , \quad \big\langle C\,{}^\theta R^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta R^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \quad , \quad \big\langle C\,{}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta R^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N}$$

mit $C = C_{\Delta,\eta}$ und η aus (1.33) diskutieren. Dazu benötigen wir zunächst das

Lemma 5.18
Für z. B. $(E,H) \in \mathrm{C}^{\infty,q} \times \mathrm{C}^{\infty,q+1}$ *und* $e \in \mathrm{C}^{\infty,q}$ *gelten*

(i) $C = C_{\Delta,\eta} = \operatorname{rot} C_{\operatorname{div},\eta} + \operatorname{div} C_{\operatorname{rot},\eta} + C_{\operatorname{rot},\eta}\operatorname{div} + C_{\operatorname{div},\eta}\operatorname{rot}$,

(ii) $\langle C_{\operatorname{rot},\eta} E, H\rangle_{\mathbb{R}^N} = \langle E, C_{\operatorname{div},\eta} H\rangle_{\mathbb{R}^N}$,

(iii) $\langle CE, e\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\langle E, Ce\rangle_{\mathbb{R}^N}$.

Beweis:
(i) folgt direkt aus der Definition des Kommutators und **(ii)** mit Bemerkung 2.2, denn

$$\langle C_{\operatorname{rot},\eta} E, H\rangle_{\mathbb{R}^N} = \big\langle \hat{\eta}'(r)\, r^{-1} RE, H\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \big\langle E, \hat{\eta}'(r)\, r^{-1} TH\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \langle E, C_{\operatorname{div},\eta} H\rangle_{\mathbb{R}^N} \qquad .$$

Mit **(i)**, **(ii)** und partieller Integration erhalten wir **(iii)**. ∎

Seien nun

$$\begin{aligned} u, v \in &\Big\{ {}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m} : k,\sigma \in \mathbb{N}_0 \wedge m = 1,\dots,\mu^{q,k}_\sigma \wedge \theta \in \{+,-\}\Big\} \\ &\cup \Big\{ {}^\theta R^{q,k}_{\sigma,m} : k,\sigma \in \mathbb{N}_0 \wedge m = 1,\dots,\mu^{q-1,k+1}_\sigma \wedge \theta \in \{+,-\}\Big\} \end{aligned} \tag{5.21}$$

mit

$$\mu^{q,k}_\sigma := \begin{cases} \mu^q_\sigma & \text{, falls } k \text{ gerade} \\ \mu^{q+1}_\sigma & \text{, falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \qquad . \tag{5.22}$$

Dann gilt mit dem Homogenitätsgrad $h(u)$

$$\rho u(r) = r^{h(u)} \rho u(1) \qquad \text{bzw.} \qquad \tau u(r) = r^{h(u)} \tau u(1)$$

und wir bestimmen mit Hilfe des Lemmas 2.4 und (2.18):

$$\begin{aligned}
&-\langle u, Cv\rangle_{\mathbb{R}^N} = \langle Cu, v\rangle_{\mathbb{R}^N}\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} r^{N-1}\langle Cu, v\rangle_{(r)}\,dr = \int_{\mathbb{R}_+} r^{N-1}\Big(\big\langle \rho C\check{\rho}\,\rho u(r), \rho v(r)\big\rangle_{S^{N-1}} + \big\langle \tau C\check{\tau}\,\tau u(r), \tau v(r)\big\rangle_{S^{N-1}}\Big)\,dr\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} r^{N-1}\big(\Gamma_{\hat{\eta}} r^{h(u)}\big) r^{h(v)}\Big(\big\langle \rho u(1), \rho v(1)\big\rangle_{S^{N-1}} + \big\langle \tau u(1), \tau v(1)\big\rangle_{S^{N-1}}\Big)\,dr\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} r^{N-1+h(v)}\Big(2\hat{\eta}'(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^{h(u)} + \hat{\eta}''(r)r^{h(u)} + (N-1)r^{-1}\hat{\eta}'(r)r^{h(u)}\Big)\langle u, v\rangle_{(1)}\,dr\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} r^{N-1+h(v)}\Big(\big(2h(u)+N-1\big)\hat{\eta}'(r)r^{h(u)-1} + \hat{\eta}''(r)r^{h(u)}\Big)\,dr\cdot\langle u, v\rangle_{(1)}\\
&= \big(h(u)-h(v)\big)\cdot\langle u, v\rangle_{(1)}\cdot\int_{\mathbb{R}_+}\hat{\eta}'(r)r^{N-2+h(u)+h(v)}\,dr
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Betrachten wir die Definitionen der Turmformen aus Bemerkung 5.11 , so sehen wir, daß aufgrund der Orthogonalität der Eigenformen $T^q_{\sigma,m}$ und $S^q_{\sigma,m}$ der Ausdruck $\langle u, v\rangle_{(1)}$ nur dann nicht verschwinden kann, falls mit $\theta, \vartheta \in \{+,-\}$ einer der folgenden Fälle eintritt:

- $u = {}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}$, $v = {}^\vartheta D^{q,\ell}_{\sigma,m}$, $k-\ell$ gerade
- $u = {}^\theta R^{q,k}_{\sigma,m}$, $v = {}^\vartheta R^{q,\ell}_{\sigma,m}$, $k-\ell$ gerade
- $u = {}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}$, $v = {}^\vartheta R^{q,\ell}_{\sigma,m}$, k,ℓ gerade
- $u = {}^\theta R^{q,k}_{\sigma,m}$, $v = {}^\vartheta D^{q,\ell}_{\sigma,m}$, k,ℓ gerade

Etwas genauer:

- $\big\langle {}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta D^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{(1)} \neq 0 \quad\vee\quad \big\langle {}^\theta R^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta R^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{(1)} \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \sigma=\gamma \ \wedge\ m=n \ \wedge\ k-\ell \text{ gerade}$ (5.24)
- $\big\langle {}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta R^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{(1)} \neq 0 \quad\vee\quad \big\langle {}^\theta R^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta D^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{(1)} \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \sigma=\gamma \ \wedge\ m=n \ \wedge\ k,\ell \text{ gerade}$ (5.25)

Wir erhalten das

Lemma 5.19
Seien u und v reguläre Turmformen maximaler Höhe K und maximalem Index Z . Desweiteren sei $\hat{\jmath}$ in (1.34) *(zu beliebigen $0 < r_1 < r_2 < \infty$) hinreichend groß gewählt, etwa*

$$\hat{\jmath} \geq N + 2 + 2K + 2Z \quad .$$

Dann gilt

$$\langle Cu, v\rangle_{\mathbb{R}^N} = 0$$

außer in den folgenden Spezialfällen:

- $\big\langle C\,{}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta D^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sigma=\gamma\ ,\ m=n\ ,\ \theta\cdot\vartheta = -\ \textit{ und } (k,\ell)\in\big\{(0,2),(1,1),(2,0)\big\}$
- $\big\langle C\,{}^\theta R^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta R^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sigma=\gamma\ ,\ m=n\ ,\ \theta\cdot\vartheta = -\ \textit{ und } (k,\ell)\in\big\{(0,2),(1,1),(2,0)\big\}$
- $\big\langle C\,{}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta R^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sigma=\gamma\ ,\ m=n\ ,\ \theta\cdot\vartheta = -\ \textit{ und } (k,\ell)\in\big\{(0,2),(2,0)\big\}$

Genauer erhält man in den Spezialfällen

- $$\begin{aligned}&\big\langle C\,{}^- D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^+ D^{q,\ell}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\big\langle C\,{}^+ D^{q,\ell}_{\sigma,m}, {}^- D^{q,k}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N}\\ &= \big\langle C\,{}^- R^{q,\ell}_{\sigma,m}, {}^+ R^{q,k}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\big\langle C\,{}^+ R^{q,k}_{\sigma,m}, {}^- R^{q,\ell}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \begin{cases} -\frac{q+\sigma}{N+2\sigma} & ,\ (k,\ell)=(0,2)\\ 1 & ,\ (k,\ell)=(1,1)\\ -\frac{q'+\sigma}{N+2\sigma} & ,\ (k,\ell)=(2,0)\end{cases}\end{aligned}$$

und

- $$\begin{aligned}&\big\langle C\,{}^- D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^+ R^{q,\ell}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \big\langle C\,{}^+ D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^- R^{q,\ell}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N}\\ &= \big\langle C\,{}^- R^{q,\ell}_{\sigma,m}, {}^+ D^{q,k}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \big\langle C\,{}^+ R^{q,\ell}_{\sigma,m}, {}^- D^{q,k}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \mathrm{i}\,\frac{\omega^{q-1}_\sigma}{N+2\sigma}\cdot\begin{cases} -1 & ,\ (k,\ell)=(0,2)\\ 1 & ,\ (k,\ell)=(2,0)\end{cases}\quad .\end{aligned}$$

Beweis:
Betrachten wir z. B. $u := {}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}$ und $v := {}^\vartheta D^{q,\ell}_{\gamma,n}$. Mit (5.23) und (5.24) bestimmen wir

$$\begin{aligned}\big\langle C\,{}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta D^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} &= \big({}^\theta \mathrm{h}^k_\sigma - {}^\vartheta \mathrm{h}^\ell_\gamma\big)\cdot\big\langle {}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta D^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{(1)}\cdot\int_{\mathbb{R}_+}\hat\eta'(r)r^{N-2+{}^\theta\mathrm{h}^k_\sigma+{}^\vartheta\mathrm{h}^\ell_\gamma}\,dr \\ &= \big({}^\theta \mathrm{h}^k_\sigma - {}^\vartheta \mathrm{h}^\ell_\sigma\big)\cdot\delta_{\sigma,\gamma}\cdot\delta_{m,n}\cdot\big\langle {}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta D^{q,\ell}_{\sigma,m}\big\rangle_{(1)}\cdot\int_{\mathbb{R}_+}\hat\eta'(r)r^{N-2+{}^\theta\mathrm{h}^k_\sigma+{}^\vartheta\mathrm{h}^\ell_\sigma}\,dr\end{aligned}\tag{5.26}$$

und haben desweiteren

$$\big\langle {}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta D^{q,\ell}_{\sigma,m}\big\rangle_{(1)} \neq 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad k-\ell \text{ gerade} \qquad . \tag{5.27}$$

Wann ist nun (5.26) von Null verschieden?
Wegen $-\hat\jmath \leq -N-2-2Z \leq N-2+{}^\theta\mathrm{h}^k_\sigma+{}^\vartheta\mathrm{h}^\ell_\sigma \leq N-2+2K+2Z \leq \hat\jmath$ und (1.34) ist das Integral in (5.26) nur von Null verschieden, falls $N-2+{}^\theta\mathrm{h}^k_\sigma+{}^\vartheta\mathrm{h}^\ell_\sigma$ verschwindet. Im Fall $\theta\cdot\vartheta=+$ ist jedoch entweder $N-2+{}^+\mathrm{h}^k_\sigma+{}^+\mathrm{h}^\ell_\sigma = N-2+k+\ell+2\sigma\neq 0$ oder $N-2+{}^-\mathrm{h}^k_\sigma+{}^-\mathrm{h}^\ell_\sigma = N-2+k+\ell-2\sigma-2N\neq 0$, da $k+\ell$ nach (5.27) gerade und N ungerade ist. Für $\theta\cdot\vartheta=-$ gilt

$$N-2+{}^-\mathrm{h}^k_\sigma+{}^+\mathrm{h}^\ell_\sigma = N-2+{}^+\mathrm{h}^k_\sigma+{}^-\mathrm{h}^\ell_\sigma = -2+k+\ell=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad (k,\ell)\in\big\{(0,2),(1,1),(2,0)\big\} \qquad .$$

Die gleichen Argumente gelten auch für $\big\langle C\,{}^\theta R^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta R^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N}$. Im Fall der Skalarprodukte $\big\langle C\,{}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta R^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N}$ bzw. $\big\langle C\,{}^\theta R^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\vartheta D^{q,\ell}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N}$ entfällt die Möglichkeit $(k,\ell)=(1,1)$, denn hier müssen nach (5.25) k und ℓ gerade sein. Damit ist die wesentliche Aussage des Lemmas gezeigt.
Bestimmen wir nun noch die Werte der speziellen Skalarprodukte. Mit (5.26) erhalten wir z. B.:

$$\big\langle C\,{}^- D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^+ D^{q,\ell}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \big({}^-\mathrm{h}^k_\sigma - {}^+\mathrm{h}^\ell_\sigma\big)\cdot\big\langle {}^- D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^+ D^{q,\ell}_{\sigma,m}\big\rangle_{(1)}$$

$$= (k-\ell-2\sigma-N)\cdot\begin{cases} {}^-\alpha^{q,0}_\sigma\cdot{}^+\alpha^{q,1}_\sigma\cdot\big((\omega^{q-1}_\sigma)^2+(q'+{}^-\mathrm{h}^0_\sigma)(q'+{}^+\mathrm{h}^2_\sigma)\big) & ,\ (k,\ell)=(0,2) \\ {}^-\alpha^{q+1,0}_\sigma\cdot{}^+\alpha^{q+1,0}_\sigma & ,\ (k,\ell)=(1,1) \\ {}^-\alpha^{q,1}_\sigma\cdot{}^+\alpha^{q,0}_\sigma\cdot\big((\omega^{q-1}_\sigma)^2+(q'+{}^-\mathrm{h}^2_\sigma)(q'+{}^+\mathrm{h}^0_\sigma)\big) & ,\ (k,\ell)=(2,0)\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-2-2\sigma-N}{2(2+2\sigma+N)(-2\sigma-N)}\cdot\big((\omega^{q-1}_\sigma)^2+(q'-\sigma-N)(q'+2+\sigma)\big) = -\frac{q+\sigma}{N+2\sigma} & ,\ (k,\ell)=(0,2) \\ (-2\sigma-N)\frac{-1}{2\sigma+N}=1 & ,\ (k,\ell)=(1,1) \\ \frac{2-2\sigma-N}{2(2-2\sigma-N)(-2\sigma-N)}\cdot\big((\omega^{q-1}_\sigma)^2+(q'+2-\sigma-N)(q'+\sigma)\big) = -\frac{q'+\sigma}{N+2\sigma} & ,\ (k,\ell)=(2,0)\end{cases}$$

Mit Lemma 5.18 ergibt sich dann (Die Skalarprodukte sind reell!)

$$\big\langle C\,{}^- D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^+ D^{q,\ell}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\big\langle C\,{}^+ D^{q,\ell}_{\sigma,m}, {}^- D^{q,k}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \qquad .$$

Analog beweisen wir die Behauptungen über die restlichen Skalarprodukte. ■

Lemma 5.20
Lemma 5.19 gilt sinngemäß für alle Turmformen, wenn man die Ausnahmen ${}^-D^{0,0}_{0,1}=0$ und ${}^-R^{N,0}_{0,1}=0$ beachtet. Außerdem ergeben sich in den Spezialfällen für die Ausnahmeformen die Skalarprodukte

- $$\begin{aligned}&\big\langle C\,{}^-D^{0,2}_{0,1}, {}^+D^{0,0}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\big\langle C\,{}^+D^{0,0}_{0,1}, {}^-D^{0,2}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \\ &= \big\langle C\,{}^-R^{N,2}_{0,1}, {}^+R^{N,0}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\big\langle C\,{}^+R^{N,0}_{0,1}, {}^-R^{N,2}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = 1\end{aligned}$$

und

- $$\begin{aligned}&\big\langle C\,{}^-R^{1,1}_{0,1}, {}^+R^{1,1}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\big\langle C\,{}^+R^{1,1}_{0,1}, {}^-R^{1,1}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \\ &= \big\langle C\,{}^-D^{N-1,1}_{0,1}, {}^+D^{N-1,1}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -\big\langle C\,{}^+D^{N-1,1}_{0,1}, {}^-D^{N-1,1}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = -1 \qquad .\end{aligned}$$

Bemerkung 5.21
Für Turmformen u,v kann $\langle Cu,v\rangle_{\mathbb{R}^N}$ also nur dann von Null verschieden sein, wenn u und v verschiedene Vorzeichen $\pm$ und gleiche Indizes σ und Zählindizes m besitzen. Zusätzlich müssen im Falle $u={}^\pm D^{q,k}_{\sigma,m}$ und $v={}^\mp D^{q,\ell}_{\sigma,m}$ bzw. $u={}^\pm R^{q,k}_{\sigma,m}$ und $v={}^\mp R^{q,\ell}_{\sigma,m}$ die Höhen (k,ℓ) zu $\big\{(0,2),(1,1),(2,0)\big\}$ und im Falle $u={}^\pm D^{q,k}_{\sigma,m}$ und $v={}^\mp R^{q,\ell}_{\sigma,m}$ bzw. umgekehrt sogar zu $\big\{(0,2),(2,0)\big\}$ gehören.

Am Ende dieses Abschnitts wollen wir nun noch ein zu Satz 2.8 ähnliches Entwicklungsresultat zeigen:

Satz 5.22
Seien $K \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ sowie $(E,H) \in \mathrm{C}^{\infty,q}\big(Z(r_1,r_2)\big) \times \mathrm{C}^{\infty,q+1}\big(Z(r_1,r_2)\big)$ in $Z(r_1,r_2)$ eine Lösung des Systems

- $M^K(E,0) = (0,0) \quad \wedge \quad \operatorname{div} E = 0 \quad ,$
- $M^K(0,H) = (0,0) \quad \wedge \quad \operatorname{rot} H = 0 \quad .$

Dann gelten in $Z(r_1,r_2)$ mit eindeutigen Konstanten ${}^{\cdot}e^{q,K}_{\cdot,\cdot,\cdot}$, ${}^{\cdot}h^{q+1,K}_{\cdot,\cdot,\cdot}$, $\hat{e}^{q,K}$, $\hat{h}^{q+1,K} \in \mathbb{C}$ und der gleichen Konvergenz wie in Satz 2.8 die folgenden Darstellungen:

- $$E = \sum_{\substack{k \leq K-1\,,\\ \theta\in\{+,-\}\,,\,\sigma\in\mathbb{N}_0\,,\\ m=1,\dots,\mu^{q,k}_\sigma}} {}^\theta e^{q,K}_{k,\sigma,m} \cdot {}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m} \quad + \hat{e}^{q,K} \cdot \begin{cases} {}^-D^{0,K}_{0,1} & , \textit{falls } q=0 \textit{ und } K \textit{ gerade} \\ {}^-R^{1,1}_{0,1} & , \textit{falls } q=1 \\ {}^-D^{N-1,K}_{0,1} & , \textit{falls } q=N-1 \textit{ und } K \textit{ ungerade} \\ 0 & , \textit{sonst} \end{cases}$$

- $$H = \sum_{\substack{k \leq K-1\,,\\ \theta\in\{+,-\}\,,\,\sigma\in\mathbb{N}_0\,,\\ m=1,\dots,\mu^{q,k+1}_\sigma}} {}^\theta h^{q+1,K}_{k,\sigma,m} \cdot {}^\theta R^{q+1,k}_{\sigma,m} \quad + \hat{h}^{q+1,K} \cdot \begin{cases} {}^-R^{1,K}_{0,1} & , \textit{falls } q=0 \textit{ und } K \textit{ ungerade} \\ {}^-D^{N-1,1}_{0,1} & , \textit{falls } q=N-2 \\ {}^-R^{N,K}_{0,1} & , \textit{falls } q=N-1 \textit{ und } K \textit{ gerade} \\ 0 & , \textit{sonst} \end{cases}$$

Im Fall $0 < r_1 < r_2 = \infty$ gilt mit einem $s \in \mathbb{R}$

$$(E,H) \in \Big(\mathrm{C}^{\infty,q}\big(A(r_1)\big) \cap \mathrm{L}^{2,q}_s\big(A(r_1)\big)\Big) \times \Big(\mathrm{C}^{\infty,q+1}\big(A(r_1)\big) \cap \mathrm{L}^{2,q+1}_s\big(A(r_1)\big)\Big)$$

genau dann, wenn alle Summanden der Gestalt ${}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}$ und ${}^\theta R^{q+1,k}_{\sigma,m}$, für die

$${}^\theta \mathrm{h}^k_\sigma \geq -s - N/2$$

gilt, d. h. $k+\sigma \geq -s-N/2$ für $\theta = +$ und $k-\sigma \geq -s+N/2$ für $\theta = -$, verschwinden. Insbesondere treten im Fall $s \geq -N/2$ nur Terme mit $\theta = -$ auf. In diesem Fall können wir unsere Darstellungen etwas präzisieren:

- $$E = \sum_{\substack{k \leq K-1\,,\\ \sigma > s+k-\frac{N}{2}\,,\\ m=1,\dots,\mu^{q,k}_\sigma}} {}^- e^{q,K}_{k,\sigma,m} \cdot {}^- D^{q,k}_{\sigma,m} \quad + \hat{e}^{q,K} \cdot \begin{cases} {}^-D^{0,K}_{0,1} & , \textit{falls } q=0 \textit{ und } K \textit{ gerade} \\ & \quad \textit{und } s < N/2-K \\ {}^-R^{1,1}_{0,1} & , \textit{falls } q=1 \textit{ und } s < N/2-1 \\ {}^-D^{N-1,K}_{0,1} & , \textit{falls } q=N-1 \textit{ und } K \textit{ ungerade} \\ & \quad \textit{und } s < N/2-K \\ 0 & , \textit{sonst} \end{cases}$$

- $$H = \sum_{\substack{k \leq K-1\,,\\ \sigma > s+k-\frac{N}{2}\,,\\ m=1,\dots,\mu^{q,k+1}_\sigma}} {}^- h^{q+1,K}_{k,\sigma,m} \cdot {}^- R^{q+1,k}_{\sigma,m} \quad + \hat{h}^{q+1,K} \cdot \begin{cases} {}^-R^{1,K}_{0,1} & , \textit{falls } q=0 \textit{ und } K \textit{ ungerade} \\ & \quad \textit{und } s < N/2-K \\ {}^-D^{N-1,1}_{0,1} & , \textit{falls } q=N-2 \textit{ und } s < N/2-1 \\ {}^-R^{N,K}_{0,1} & , \textit{falls } q=N-1 \textit{ und } K \textit{ gerade} \\ & \quad \textit{und } s < N/2-K \\ 0 & , \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis:
Da eine Form ${}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}$ bzw. ${}^\theta R^{q,k}_{\sigma,m}$ den Homogenitätsgrad ${}^\theta \mathrm{h}^k_\sigma$ besitzt, gilt

$$\begin{aligned} {}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^\theta R^{q,k}_{\sigma,m} \in \mathrm{L}^{2,q}_s\big(A(1)\big) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,{}^\theta \mathrm{h}^k_\sigma + 2s + N - 1 < -1 \quad \Leftrightarrow \quad {}^\theta \mathrm{h}^k_\sigma < -N/2 - s \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} k+\sigma < -N/2-s & , \text{falls } \theta = + \\ k-\sigma < N/2-s & , \text{falls } \theta = - \end{cases} \quad . \end{aligned} \tag{5.28}$$

Damit ist die Integrierbarkeit der einzelnen Summanden geklärt. Wie in Satz 2.8 konvergiert nun eine derartige Reihe genau dann in L^2_s, wenn alle Summanden zu L^2_s gehören. Dies liefert die Behauptungen des zweiten Teils des Satzes. Kommen wir nun zum Beweis der eigentlichen Darstellung durch Induktion über K.

`Induktionsanfang` ($K=1$): Sei $E \in \mathrm{C}^{\infty,q}\big(Z(r_1,r_2)\big)$ mit $\operatorname{rot} E = 0$ und $\operatorname{div} E = 0$. Mit Satz 2.8, es gilt ja $\Delta E = 0$, haben wir in $Z(r_1,r_2)$

$$E = \sum_{k,\sigma,m} \alpha^q_{k,\sigma,m} \cdot P^{q,k}_{\sigma,m} + \sum_{k,\sigma,m} \beta^q_{k,\sigma,m} \cdot Q^{q,k}_{\sigma,m} \qquad . \tag{5.29}$$

Durch Testen der Rotationsfreiheit mit $\varphi(r)\check{\rho}T^q_{\sigma-1,m}$ $\big($oder $\varphi(r)\check{\tau}S^{q+1}_{\sigma-1,m}\big)$ für $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_0\big((r_1,r_2),\mathbb{R}\big)$, d. h. Bestimmung von

$$0 = \big\langle \operatorname{rot} E, \varphi(r)\check{\rho}T^q_{\sigma-1,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N}$$

durch partielle Integration und Einsetzen der Entwicklung (5.29), sehen wir $\alpha^q_{2,\sigma,m} = \beta^q_{2,\sigma,m} = 0$, außer $\beta^{N-1}_{2,1,1}$. Die Testfunktion $\varphi(r)\check{\rho}S^q_{\sigma-2,m}$ $\big($oder $\varphi(r)\check{\rho}S^q_{\sigma,m}\big)$ liefert genauso $\alpha^q_{3,\sigma,m} = \beta^q_{4,\sigma-2,m} = 0$. Analoges Testen der Divergenzfreiheit mit $\varphi(r)\check{\rho}T^{q-2}_{\sigma-1,m}$ $\big($oder $\varphi(r)\check{\tau}S^{q-1}_{\sigma-1,m}\big)$ ergibt $\alpha^q_{1,\sigma,m} = \beta^q_{1,\sigma,m} = 0$, außer $\beta^1_{1,1,1}$. Entsprechend bekommen wir dann noch durch die Testfunktion $\varphi(r)\check{\tau}T^{q-1}_{\sigma-2,m}$ $\big($oder $\varphi(r)\check{\tau}T^{q-1}_{\sigma,m}\big)$ das Verschwinden von $\beta^q_{4,\sigma,m}$ und $\alpha^q_{3,\sigma,m}$, welches ja schon bekannt ist. Schließlich bleibt von (5.29) nur noch die Darstellung

$$E = \sum_{\sigma,m} \alpha^q_{4,\sigma,m} \cdot P^{q,4}_{\sigma,m} + \sum_{\sigma,m} \beta^q_{3,\sigma,m} \cdot Q^{q,3}_{\sigma,m} + \begin{cases} \beta^1_{1,1,1} \cdot Q^{1,1}_{1,1} & \text{, falls } q=1 \\ \beta^{N-1}_{2,1,1} \cdot Q^{N-1,2}_{1,1} & \text{, falls } q=N-1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

übrig. Mit Bemerkung 5.14 liefert dies dann den Induktionsanfang für E und somit auch für H, da H das gleiche System auf der Stufe $q+1$ löst.

`Induktionsschritt` ($K \rightsquigarrow K+1$): Betrachten wir z. B. E mit $M^{K+1}(E,0) = (0,0)$ und $\operatorname{div} E = 0$. Dann erfüllt $H := \operatorname{rot} E$

$$M^K(0,H) = (0,0) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot} H = 0 \qquad .$$

Die Induktionsvoraussetzung liefert die Darstellung

$$H = \sum_{\substack{k \le K-1\,, \\ \theta\in\{+,-\}\,,\,\sigma\in\mathbb{N}_0\,, \\ m=1,\dots,\mu^{q,k+1}_\sigma}} {}^\theta h^{q+1,K}_{k,\sigma,m} \cdot {}^\theta R^{q+1,k}_{\sigma,m} + \hat{h}^{q+1,K} \cdot \begin{cases} -R^{1,K}_{0,1} & \text{, falls } q=0 \text{ und } K \text{ ungerade} \\ -D^{N-1,1}_{0,1} & \text{, falls } q=N-2 \\ -R^{N,K}_{0,1} & \text{, falls } q=N-1 \text{ und } K \text{ gerade} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

und mit dem Ansatz

$$\tilde{E} := \sum_{\substack{k \le K-1\,, \\ \theta\in\{+,-\}\,,\,\sigma\in\mathbb{N}_0\,, \\ m=1,\dots,\mu^{q,k+1}_\sigma}} {}^\theta h^{q+1,K}_{k,\sigma,m} \cdot {}^\theta D^{q,k+1}_{\sigma,m} + \hat{h}^{q+1,K} \cdot \begin{cases} -D^{0,K+1}_{0,1} & \text{, falls } q=0 \text{ und } K \text{ ungerade} \\ -D^{N-1,K+1}_{0,1} & \text{, falls } q=N-1 \text{ und } K \text{ gerade} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

erhalten wir für $e := E - \tilde{E}$

$$\operatorname{div} e = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot} e = \hat{h}^{q+1,K} \cdot \begin{cases} -D^{N-1,1}_{0,1} & \text{, falls } q=N-2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad .$$

Im Fall $q \neq N-2$ liefert der Induktionsanfang

$$e = \sum_{\substack{\theta\in\{+,-\}\,,\,\sigma\in\mathbb{N}_0\,, \\ m=1,\dots,\mu^{q,0}_\sigma}} {}^\theta e^{q,1}_{0,\sigma,m} \cdot {}^\theta D^{q,0}_{\sigma,m} + \hat{e}^{q,1} \cdot \begin{cases} -R^{1,1}_{0,1} & \text{, falls } q=1 \\ -D^{N-1,1}_{0,1} & \text{, falls } q=N-1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

und mit

$$
\begin{aligned}
E &= e + \tilde{E} \\
&= \sum_{\substack{\theta\in\{+,-\}\,,\,\sigma\in\mathbb{N}_0\,,\\ m=1,\dots,\mu_\sigma^{q,0}}} {}^\theta e^{q,1}_{0,\sigma,m} \cdot {}^\theta D^{q,0}_{\sigma,m} \quad + \hat{e}^{q,1} \cdot \begin{cases} {}^-R^{1,1}_{0,1} & \text{, falls } q = 1 \\ {}^-D^{N-1,1}_{0,1} & \text{, falls } q = N-1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \\
&+ \sum_{\substack{1\le k\le K\,,\\ \theta\in\{+,-\}\,,\,\sigma\in\mathbb{N}_0\,,\\ m=1,\dots,\mu_\sigma^{q,k}}} {}^\theta h^{q+1,K}_{k-1,\sigma,m} \cdot {}^\theta D^{q,k}_{\sigma,m} \quad + \hat{h}^{q+1,K} \cdot \begin{cases} {}^-D^{0,K+1}_{0,1} & \text{, falls } q = 0 \text{ und } K+1 \text{ gerade} \\ {}^-D^{N-1,K+1}_{0,1} & \text{, falls } q = N-1 \text{ und } K+1 \text{ ungerade} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

die Behauptung. Im Fall $q = N-2$ haben wir zunächst nur

$$\operatorname{div} e = 0 \qquad \text{und} \qquad \Delta e = 0 \qquad .$$

Wir erhalten wie im Induktionsanfang für e die Darstellung (5.29) und sehen mit den gleichen Argumenten, daß die Divergenzfreiheit diese Darstellung auf

$$e = \sum_{\substack{k=2,4\,,\\ \sigma,m}} \alpha^{N-2}_{k,\sigma,m} \cdot P^{N-2,k}_{\sigma,m} + \sum_{\substack{k=2,3\,,\\ \sigma,m}} \beta^{N-2}_{k,\sigma,m} \cdot Q^{N-2,k}_{\sigma,m} + \begin{cases} \beta^1_{1,1,1} \cdot Q^{1,1}_{1,1} & \text{, falls } q = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

reduziert. Mit Bemerkung 5.14 und neuen Konstanten ist also

$$e = \sum_{\substack{0\le k\le 1\,,\\ \theta\in\{+,-\}\,,\,\sigma\in\mathbb{N}_0\,,\\ m=1,\dots,\mu_\sigma^{N-2,k}}} {}^\theta e^{N-2,2}_{k,\sigma,m} \cdot {}^\theta D^{N-2,k}_{\sigma,m} + \hat{e}^{1,2} \cdot \begin{cases} {}^-R^{1,1}_{0,1} & \text{, falls } q = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad .$$

Somit liefert $E = e + \tilde{E}$ auch in diesem Fall die Behauptung.
Analog zeigen wir die Darstellung für H. ∎

Zur Verkürzung der Notation in den folgenden Kapiteln bringen wir noch die

Definition 5.23
Für $k, \sigma \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

- ${}^\pm\mathfrak{D}^{q,k}_{\sigma,m} := \operatorname{Lin}\{{}^\pm D^{q,k}_{\sigma,m}\}$,
- ${}^\pm\mathfrak{D}^{q,k}_{\sigma} := \bigoplus_{1\le m\le\mu_\sigma^{q,k}} {}^\pm\mathfrak{D}^{q,k}_{\sigma,m}$,
- ${}^\pm\mathfrak{D}^{q,k}_{\le t} := \bigoplus_{\gamma\le t} {}^\pm\mathfrak{D}^{q,k}_{\gamma}$,
- ${}^-\mathfrak{D}^{q,\le K}_{t} := \dot{\sum_{\substack{0\le k\le K\,,\\ 0\le\gamma\le t+k}}} {}^-\mathfrak{D}^{q,k}_{\gamma} = \dot{\sum_{0\le k\le K}} {}^-\mathfrak{D}^{q,k}_{\le t+k}$,
- ${}^\pm\mathfrak{R}^{q,k}_{\sigma,m} := \operatorname{Lin}\{{}^\pm R^{q,k}_{\sigma,m}\}$,
- ${}^\pm\mathfrak{R}^{q,k}_{\sigma} := \bigoplus_{1\le m\le\mu_\sigma^{q-1,k+1}} {}^\pm\mathfrak{R}^{q,k}_{\sigma,m}$,
- ${}^\pm\mathfrak{R}^{q,k}_{\le t} := \bigoplus_{\gamma\le t} {}^\pm\mathfrak{R}^{q,k}_{\gamma}$,
- ${}^-\mathfrak{R}^{q,\le K}_{t} := \dot{\sum_{\substack{0\le k\le K\,,\\ 0\le\gamma\le t+k}}} {}^-\mathfrak{R}^{q,k}_{\gamma} = \dot{\sum_{0\le k\le K}} {}^-\mathfrak{R}^{q,k}_{\le t+k}$.

Hierbei sei die Orthogonalität der Summen im Sinne des $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{(1)}$–Skalarproduktes zu verstehen.

Bemerkung 5.24
Nach (5.28) *haben wir für alle $m \in \mathbb{N}_0$, da die Turmformen homogen sind,*

$${}^\pm\mathfrak{D}^{q,k}_\sigma, {}^\pm\mathfrak{R}^{q,k}_\sigma \subset \mathrm{L}^{2,q}_s\big(A(1)\big) \quad \Leftrightarrow \quad {}^\pm\mathfrak{D}^{q,k}_\sigma, {}^\pm\mathfrak{R}^{q,k}_\sigma \subset \mathrm{H}^{m,q}_s\big(A(1)\big) \quad \Leftrightarrow \quad {}^\pm\mathrm{h}^k_\sigma < -s - N/2 \qquad ,$$

d. h.

$${}^+\mathfrak{D}^{q,k}_\sigma, {}^+\mathfrak{R}^{q,k}_\sigma \subset \mathrm{H}^{m,q}_{<-\sigma-k-\frac{N}{2}}\big(A(1)\big) \qquad \text{und} \qquad {}^-\mathfrak{D}^{q,k}_\sigma, {}^-\mathfrak{R}^{q,k}_\sigma \subset \mathrm{H}^{m,q}_{<\sigma-k+\frac{N}{2}}\big(A(1)\big) \qquad .$$

Insbesondere sind ${}^-\mathfrak{D}^{q,k}_\sigma, {}^-\mathfrak{R}^{q,k}_\sigma$ genau dann Teilmengen von $\mathrm{H}^{m,q}_s\big(A(1)\big)$, wenn $\sigma > k + s - N/2$ gilt. Folglich liegen die Mengen

$${}^-\mathfrak{D}^{q,\le K}_{s-\frac{N}{2}} \qquad \text{und} \qquad {}^-\mathfrak{R}^{q,\le K}_{s-\frac{N}{2}}$$

in $\mathrm{H}^{m,q}_{<\frac{N}{2}-K}\big(A(1)\big)$, aber gerade nicht in $\mathrm{H}^{m,q}_s\big(A(1)\big)$.

5.5 Spezielle Strahlungslösungen

Wir wollen in diesem Abschnitt spezielle Lösungen der homogenen Maxwell–Gleichung in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$,

$$(M + \mathrm{i}\,\omega)(E,H) = (0,0) \qquad , \qquad \omega \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0\} \qquad , \tag{5.30}$$

suchen, welche der Strahlungsbedingung genügen. Mit Hilfe eines Separationsansatzes, also des sphärischen Kalküls, und der altbekannten Eigenformen $S^q_{\sigma,m}$ und $T^q_{\sigma,m}$ werden wir die Bestimmung dieser Formen auf das Lösen der Besselschen Differentialgleichung zurückführen. Wegen

$$(\operatorname{div} E, \operatorname{rot} H) = (0,0)$$

sind E und H nach der Regularitätstheorie des dritten Kapitels C^∞–Formen und mit Lemma 4.13 haben wir

$$(\Delta + \omega^2)(E,H) = (0,0) \qquad .$$

Versuchen wir also zunächst eine Lösung des Systems

$$\operatorname{div} E = 0 \qquad \text{und} \qquad (\Delta + \omega^2)E = 0 \tag{5.31}$$

zu finden. Diese beiden Formeln übersetzen sich mit (2.3) und (2.6) zu

- $$[\check\rho \;\; \check\tau] r^{-1} \begin{bmatrix} -\operatorname{Div} & 0 \\ r^{-q'+1}\,\mathrm{D}\, r^{q'} & \operatorname{Div} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho E \\ \tau E \end{bmatrix} = 0 \qquad ,$$
- $$[\check\rho \;\; \check\tau] r^{-2} \begin{bmatrix} \mathrm{B} + r^2\,\mathrm{R}_1 + r^2\omega^2 & -2\operatorname{Div} \\ 2\operatorname{Rot} & \mathrm{B} + r^2\,\mathrm{R}_2 + r^2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho E \\ \tau E \end{bmatrix} = 0 \qquad ,$$

also in das System

- $$\operatorname{Div} \rho E = 0 \qquad , \tag{5.32}$$
- $$r^{1-q'}\,\mathrm{D}\, r^{q'} \rho E + \operatorname{Div} \tau E = 0 \qquad , \tag{5.33}$$
- $$\big(\mathrm{B} + r^2(\mathrm{R}_1 + \omega^2)\big)\rho E - 2\operatorname{Div} \tau E = 0 \qquad , \tag{5.34}$$
- $$2\operatorname{Rot} \rho E + \big(\mathrm{B} + r^2(\mathrm{R}_2 + \omega^2)\big)\tau E = 0 \qquad . \tag{5.35}$$

Die ersten zwei Gleichungen schlagen die folgenden beiden Ansätze vor:

`1. Ansatz:` $\rho E := 0$, $\tau E := e(r) \cdot T^q_{\sigma,m}$

`2. Ansatz:` $\rho E := e_\rho(r) \cdot T^{q-1}_{\sigma,m}$, $\tau E := e_\tau(r) \cdot S^q_{\sigma,m}$

Diskutieren wir den ersten Ansatz. (5.32), (5.33) und (5.34) sind trivialerweise erfüllt. (5.35) wird zu

$$\big(\mathrm{B} + r^2(\mathrm{R}_2 + \omega^2)\big)\, e(r) \cdot T^q_{\sigma,m} = 0 \qquad \overset{(2.19)}{\Longleftrightarrow} \qquad \big(-\lambda^q_\sigma + r^2(\mathrm{R}_2 + \omega^2)\big)\, e(r) \cdot T^q_{\sigma,m} = 0 \qquad .$$

Mit (2.12) ist dies äquivalent zu der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$r^2 e''(r) + (N-1)\, r\, e'(r) + \big(r^2\omega^2 + q(q'-2) - \lambda^q_\sigma\big)\, e(r) = 0 \qquad ,$$

welche wir mit der Substitution

$$e(r) := r^\ell \cdot \varphi(\omega\, r)$$

in die Gleichung

$$\omega^2\, r^2 \varphi''(\omega\, r) + (2\ell + N - 1)\, \omega\; r\, \varphi'(\omega\, r) + \big(r^2\omega^2 + q(q'-2) - \lambda^q_\sigma + \ell(\ell + N - 2)\big)\, \varphi(\omega\, r) = 0$$

überführen. Setzen wir noch $t := \omega\, r$ und

$$2\ell + N - 1 := 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 1 - N/2 \qquad ,$$

so erhalten wir die Besselsche Differentialgleichung

$$t^2 \varphi''(t) + t\varphi'(t) + \big(t^2 - \nu_\sigma^2\big)\varphi(t) = 0 \qquad , \qquad \nu_\sigma := N/2 + \sigma \qquad . \tag{5.36}$$

Somit erfüllt E die Sommerfeldsche Strahlungsbedingung zur Helmholtz–Gleichung, falls φ eine Vielfache von $H^1_{\nu_\sigma}$, der Hankel–Funktion erster Art zu ν_σ, ist. Wir bekommen also eine erste Lösung

$$E^{1,\omega}_{\sigma,m} := r^{1-\frac{N}{2}} \cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) \cdot \check{\tau} T^q_{\sigma,m} \qquad .$$

Im zweiten Ansatz ist (5.32) erfüllt und (5.33), (5.34) und (5.35) übersetzen sich in das System

- $$r^{1-q'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\big(r^{q'}e_\rho(r)T^{q-1}_{\sigma,m}\big) + e_\tau(r)\,\mathrm{Div}\,S^q_{\sigma,m} = 0 \qquad ,$$
- $$\big(\mathrm{B} + r^2(\mathrm{R}_1 + \omega^2)\big)e_\rho(r)T^{q-1}_{\sigma,m} - 2\,\mathrm{Div}\,e_\tau(r)S^q_{\sigma,m} = 0 \qquad ,$$
- $$2\,\mathrm{Rot}\,e_\rho(r)T^{q-1}_{\sigma,m} + \big(\mathrm{B} + r^2(\mathrm{R}_2 + \omega^2)\big)e_\tau(r)S^q_{\sigma,m} = 0 \qquad ,$$

welches sich mit (2.19), (2.20) und (2.21) zu dem Koeffizientensystem

- $$r\,e'_\rho(r) + q'e_\rho(r) + \mathrm{i}\,\omega^{q-1}_\sigma e_\tau(r) = 0 \qquad , \tag{5.37}$$
- $$r^2(\mathrm{R}_1 + \omega^2)e_\rho(r) - \lambda^{q-1}_\sigma e_\rho(r) - 2\,\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_\sigma e_\tau(r) = 0 \qquad , \tag{5.38}$$
- $$r^2(\mathrm{R}_2 + \omega^2)e_\tau(r) - \kappa^q_\sigma e_\tau(r) + 2\,\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_\sigma e_\rho(r) = 0 \tag{5.39}$$

wandelt. Setzen wir nun (5.37) in (5.38) ein, erhalten wir mit (2.11) die Gleichung

$$r^2 e''_\rho(r) + (N+1)\,r\,e'_\rho(r) + \big(r^2\omega^2 - \sigma(\sigma+N)\big)\,e_\rho(r) = 0 \qquad ,$$

welche wieder mit der Substitution

$$e_\rho(r) := r^k \cdot \varphi(\omega\, r) \qquad , \qquad t := \omega\, r \qquad ,$$

in die folgende Differentialgleichung überführt wird:

$$t^2\varphi''(t) + (2k+N+1)\,t\,\varphi'(t) + \big(t^2 + k(k+N) - \sigma(\sigma+N)\big)\varphi(t) = 0$$

Die Wahl

$$2k + N + 1 := 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = -N/2$$

liefert uns wiederum die Besselsche Differentialgleichung (5.36) mit gleichem ν_σ. Aus (5.37) können wir dann

$$e_\tau(r) = \frac{\mathrm{i}}{\omega^{q-1}_\sigma} r^k\big((q'+k)\varphi(\omega\, r) + \omega\, r\,\varphi'(\omega\, r)\big)$$

bestimmen. Wie wir ein wenig später an einem einfachen Argument sehen können, erfüllt E wiederum die Sommerfeldsche Strahlungsbedingung zur Helmholtz–Gleichung, falls φ eine Vielfache von $H^1_{\nu_\sigma}$ ist. Man vergleiche dies auch mit Weck und Witsch, $\big[$[53], p. 1520$\big]$. Wir erhalten eine zweite Lösung

$$E^{2,\omega}_{\sigma,m} := r^{-\frac{N}{2}} \cdot \Big(H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) \cdot \check{\rho} T^{q-1}_{\sigma,m} + \frac{\mathrm{i}}{\omega^{q-1}_\sigma}\big((N/2 - q) \cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) + \omega\, r \cdot (H^1_{\nu_\sigma})'(\omega\, r)\big) \cdot \check{\tau} S^q_{\sigma,m}\Big) \qquad .$$

Definieren wir dann

$$H^{n,\omega}_{\sigma,m} := \frac{\mathrm{i}}{\omega}\,\mathrm{rot}\,E^{n,\omega}_{\sigma,m} \qquad , \qquad n = 1,2 \qquad ,$$

so gilt

$$\mathrm{rot}\,E^{n,\omega}_{\sigma,m} + \mathrm{i}\,\omega H^{n,\omega}_{\sigma,m} = 0$$

per Definition und desweiteren wegen $\mathrm{div}\,E^{n,\omega}_{\sigma,m} = 0$ und $(\Delta + \omega^2)E^{n,\omega}_{\sigma,m} = 0$

$$\mathrm{div}\,H^{n,\omega}_{\sigma,m} = \frac{\mathrm{i}}{\omega}\,\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,E^{n,\omega}_{\sigma,m} = \frac{\mathrm{i}}{\omega}\Delta E^{n,\omega}_{\sigma,m} = -\,\mathrm{i}\,\omega E^{n,\omega}_{\sigma,m} \qquad ,$$

d. h. die Formen

$$(E^{n,\omega}_{\sigma,m}, H^{n,\omega}_{\sigma,m}) \qquad , \qquad n = 1,2 \qquad ,$$

sind in der Tat Lösungen zu (5.30). Bestimmen wir $H^{n,\omega}_{\sigma,m}$ noch explizit:

- $$\begin{aligned} H^{1,\omega}_{\sigma,m} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\,\mathrm{rot}\,E^{1,\omega}_{\sigma,m} = \frac{\mathrm{i}}{\omega}\,[\check\rho\ \ \check\tau]\,r^{-1}\begin{bmatrix} -\mathrm{Rot} & r^{1-q}\,\mathrm{D}\,r^{q} \\ 0 & \mathrm{Rot}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho E^{1,\omega}_{\sigma,m}\\ \tau E^{1,\omega}_{\sigma,m}\end{bmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\,[\check\rho\ \ \check\tau]\,r^{-1}\begin{bmatrix} -\mathrm{Rot} & r^{1-q}\,\mathrm{D}\,r^{q} \\ 0 & \mathrm{Rot}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ r^{1-\frac{N}{2}}\,H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r)\cdot T^q_{\sigma,m}\end{bmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\cdot[\check\rho\ \ \check\tau]\begin{bmatrix} r^{-q}\,\mathrm{D}\,r^{q+1-\frac{N}{2}}\,H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r)\cdot T^q_{\sigma,m} \\ \mathrm{i}\,\omega^q_\sigma r^{-\frac{N}{2}}\,H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r)\cdot S^{q+1}_{\sigma,m}\end{bmatrix} \\ &= -\frac{\omega^q_\sigma}{\omega}\cdot r^{-\frac{N}{2}}\cdot\Big(H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r)\cdot\check\tau S^{q+1}_{\sigma,m} \\ &\qquad\qquad + \frac{\mathrm{i}}{\omega^q_\sigma}\big((N/2-q-1)\cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) - \omega\, r\cdot(H^1_{\nu_\sigma})'(\omega\, r)\big)\cdot\check\rho T^q_{\sigma,m}\Big) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} H^{2,\omega}_{\sigma,m} &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\,\mathrm{rot}\,E^{2,\omega}_{\sigma,m} = \frac{\mathrm{i}}{\omega}\,[\check\rho\ \ \check\tau]\,r^{-1}\begin{bmatrix} -\mathrm{Rot} & r^{1-q}\,\mathrm{D}\,r^{q} \\ 0 & \mathrm{Rot}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho E^{2,\omega}_{\sigma,m}\\ \tau E^{2,\omega}_{\sigma,m}\end{bmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\,[\check\rho\ \ \check\tau]\,r^{-1}\begin{bmatrix} -\mathrm{Rot} & r^{1-q}\,\mathrm{D}\,r^{q} \\ 0 & \mathrm{Rot}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r^{-\frac{N}{2}}\,H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r)\cdot T^{q-1}_{\sigma,m} \\ \dots\ \cdot S^q_{\sigma,m}\end{bmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\Bigg(-\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_\sigma r^{-1-\frac{N}{2}}\,H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) \\ &\qquad + r^{-q}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^{q-\frac{N}{2}}\,\frac{\mathrm{i}}{\omega^{q-1}_\sigma}\big((N/2-q)\cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) + \omega\, r\cdot(H^1_{\nu_\sigma})'(\omega\, r)\big)\Big)\Bigg)\cdot\check\rho S^q_{\sigma,m} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\Bigg(-\Big(\mathrm{i}\,\omega^{q-1}_\sigma + \frac{\mathrm{i}}{\omega^{q-1}_\sigma}(N/2-q)^2\Big)\cdot r^{-1-\frac{N}{2}}\,H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) \\ &\qquad + \frac{\mathrm{i}}{\omega^{q-1}_\sigma}\,\big(N/2-q+q-N/2+1\big)\,\omega\cdot r^{-\frac{N}{2}}\cdot(H^1_{\nu_\sigma})'(\omega\, r) \\ &\qquad + \frac{\mathrm{i}}{\omega^{q-1}_\sigma}\,\omega^2\cdot r^{1-\frac{N}{2}}\cdot(H^1_{\nu_\sigma})''(\omega\, r)\Bigg)\cdot\check\rho S^q_{\sigma,m} \\ &= -\frac{1}{\omega\omega^{q-1}_\sigma}\cdot r^{-1-\frac{N}{2}}\Big(-\big((\omega^{q-1}_\sigma)^2 + (N/2-q)^2\big)\cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) \\ &\qquad + \omega\, r\cdot(H^1_{\nu_\sigma})'(\omega\, r) + \omega^2\, r^2\cdot(H^1_{\nu_\sigma})''(\omega\, r)\Big)\cdot\check\rho S^q_{\sigma,m} \end{aligned}$$

Setzen wir hier die Bessel–Gleichung (5.36) ein, folgt

$$\begin{aligned} H^{2,\omega}_{\sigma,m} &= -\frac{r^{-1-\frac{N}{2}}}{\omega\omega^{q-1}_\sigma}\cdot\Big(-\omega^2\, r^2 + \big(\underbrace{\nu^2_\sigma - (N/2-q)^2 - (q+\sigma)(q'+\sigma)}_{=0}\big)\Big)\cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r)\cdot\check\rho S^q_{\sigma,m} \\ &= \frac{\omega}{\omega^{q-1}_\sigma}\cdot r^{1-\frac{N}{2}}\cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r)\cdot\check\rho S^q_{\sigma,m} \qquad . \end{aligned}$$

An der expliziten Formel für $H^{2,\omega}_{\sigma,m}$ sehen wir, daß auch diese Form der Sommerfeldschen Strahlungsbedingung zur Helmholtz–Gleichung genügt, d. h. auch im zweiten Fall war die Wahl der ersten Hankel–Funktion berechtigt. Alternativ könnten wir die Formen $(E^{n,\omega}_{\sigma,m}, H^{n,\omega}_{\sigma,m})$ auch finden, indem wir das Problem

$$\mathrm{rot}\,H = 0 \qquad \text{und} \qquad (\Delta+\omega^2)H = 0 \tag{5.40}$$

lösen. Analog zu (5.31) würde uns dies für die $(q+1)$–Form H auf das System

- $-\,\mathrm{Rot}\,\rho H + r^{-q}\,\mathrm{D}\,r^{q+1}\tau H = 0 \qquad ,$
- $\mathrm{Rot}\,\tau H = 0 \qquad ,$
- $\big(\mathrm{B} + r^2(\mathrm{R}_1 + \omega^2)\big)\rho H - 2\,\mathrm{Div}\,\tau H = 0 \qquad ,$
- $2\,\mathrm{Rot}\,\rho H + \big(\mathrm{B} + r^2(\mathrm{R}_2 + \omega^2)\big)\tau H = 0$

führen, welches wir völlig analog zu (5.32)–(5.35) mit den folgenden beiden Ansätzen lösen könnten:

1. `Ansatz:` $\rho H := h(r)\cdot S^q_{\sigma,m} \qquad , \qquad \tau H := 0$
2. `Ansatz:` $\rho H := h_\rho(r)\cdot T^q_{\sigma,m} \qquad , \qquad \tau H := h_\tau(r)\cdot S^{q+1}_{\sigma,m}$

Fassen wir also zusammen: Definieren wir zu $\sigma \in \mathbb{N}_0$ und $m = 1, \ldots$ sowie $\nu_\sigma = N/2 + \sigma$ die Formen

- $\tilde{\mathbb{E}}^{1,\omega}_{\sigma,m} := \omega \cdot r^{1-\frac{N}{2}} \cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) \cdot \check{\tau} T^q_{\sigma,m}$,
- $$\tilde{\mathbb{H}}^{1,\omega}_{\sigma,m} := r^{-\frac{N}{2}} \cdot \Big(- \omega^q_\sigma \cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) \cdot \check{\tau} S^{q+1}_{\sigma,m} + \mathrm{i} \cdot \Big(\big(N/2 - (q+1)'\big) \cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) + \omega\, r \cdot (H^1_{\nu_\sigma})'(\omega\, r) \Big) \cdot \check{\rho} T^q_{\sigma,m} \Big) \tag{5.41}$$

und

- $$\tilde{\mathbb{E}}^{2,\omega}_{\sigma,m} := r^{-\frac{N}{2}} \cdot \Big(\omega^{q-1}_\sigma \cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) \cdot \check{\rho} T^{q-1}_{\sigma,m} + \mathrm{i} \cdot \Big(\big(N/2 - q\big) \cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) + \omega\, r \cdot (H^1_{\nu_\sigma})'(\omega\, r) \Big) \cdot \check{\tau} S^q_{\sigma,m} \Big) \quad , \tag{5.42}$$
- $\tilde{\mathbb{H}}^{2,\omega}_{\sigma,m} := \omega \cdot r^{1-\frac{N}{2}} \cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) \cdot \check{\rho} S^q_{\sigma,m}$,

so sind für beliebige Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ die Formen

$$c_n \cdot \big(\tilde{\mathbb{E}}^{n,\omega}_{\sigma,m}, \tilde{\mathbb{H}}^{n,\omega}_{\sigma,m}\big) \in \mathrm{C}^{\infty,q}\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big) \times \mathrm{C}^{\infty,q+1}\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big) \qquad , \qquad n = 1,2 \qquad ,$$

Lösungen zu (5.30), die für $\omega \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{R}$ exponentiell fallen und für $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Strahlungsbedingung zur Helmholtz–Gleichung genügen. Insbesondere haben wir

$$\exp(-\mathrm{i}\,\omega\, r) \cdot \big(\tilde{\mathbb{E}}^{n,\omega}_{\sigma,m}, \tilde{\mathbb{H}}^{n,\omega}_{\sigma,m}\big) \in \mathrm{H}^{1,q}_{>-\frac{3}{2}}\big(A(1)\big) \times \mathrm{H}^{1,q+1}_{>-\frac{3}{2}}\big(A(1)\big) \qquad ,$$

also

$$\begin{aligned}(M - \mathrm{i}\,\omega\, r^{-1} S)\big(\tilde{\mathbb{E}}^{n,\omega}_{\sigma,m}, \tilde{\mathbb{H}}^{n,\omega}_{\sigma,m}\big) &\in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big) \\ &\overset{\text{Dgl.}}{=} (-\mathrm{i}\,\omega - \mathrm{i}\,\omega\, r^{-1} S)\big(\tilde{\mathbb{E}}^{n,\omega}_{\sigma,m}, \tilde{\mathbb{H}}^{n,\omega}_{\sigma,m}\big) \qquad ,\end{aligned}$$

d. h.

$$(r^{-1} S + \mathrm{Id})\big(\tilde{\mathbb{E}}^{n,\omega}_{\sigma,m}, \tilde{\mathbb{H}}^{n,\omega}_{\sigma,m}\big) \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big) \qquad .$$

Damit erfüllen diese Formen auch die Maxwellsche Strahlungsbedingung. Desweiteren sehen wir an (5.2), daß gleichmäßig bzgl. $z \in \mathbb{C}_+$ die Abschätzung

$$\big|H^1_\nu(z)\big| \le c \cdot \big(|z|^{-\frac{1}{2}} + |z|^{-\nu}\big)$$

gilt. Somit haben wir für $\nu \ge 1/2$, $\omega \in \mathbb{C}_+$ und gleichmäßig bzgl. $r \in (1,\infty)$

$$\big|H^1_\nu(\omega\, r)\big| \le c \cdot r^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{, d. h.} \qquad \big|\tilde{\mathbb{E}}^{1,\omega}_{\sigma,m}\big|_q, \big|\tilde{\mathbb{H}}^{2,\omega}_{\sigma,m}\big|_{q+1} \le c \cdot r^{\frac{1-N}{2}} \qquad .$$

Da die Ableitung der Hankel–Funktion für große Argumente dasselbe Verhalten zeigt wie sie selbst, bekommen wir

$$\big|(\tilde{\mathbb{E}}^{n,\omega}_{\sigma,m}, \tilde{\mathbb{H}}^{n,\omega}_{\sigma,m})\big|_{q,q+1} \le c \cdot r^{\frac{1-N}{2}} \qquad , \qquad n = 1,2 \qquad ,$$

und somit

$$\big(\tilde{\mathbb{E}}^{n,\omega}_{\sigma,m}, \tilde{\mathbb{H}}^{n,\omega}_{\sigma,m}\big) \in \mathrm{L}^{2,q}_{<-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{<-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big) \qquad .$$

Die Regularitätstheorie liefert schließlich für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\big(\tilde{\mathbb{E}}^{n,\omega}_{\sigma,m}, \tilde{\mathbb{H}}^{n,\omega}_{\sigma,m}\big) \in \mathbf{H}^{k,q}_{<-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big) \times \mathbf{H}^{k,q+1}_{<-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big) \qquad . \tag{5.43}$$

Unser nächstes Ziel ist es, diese beiden Lösungen in Potenzreihen bzgl. ω zu entwickeln. Nach Magnus, Oberhettinger und Soni in $\big[$[21], p. 66$\big]$ gilt

$$H^1_\nu(z) = \frac{-\mathrm{i}}{\sin(\pi\nu)} \cdot \big(J_{-\nu}(z) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi\nu}\, J_\nu(z)\big) \qquad \text{mit} \qquad J_\nu(z) := \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+1+\nu)} (z/2)^{2k+\nu} \qquad ,$$

der Bessel–Funktion. Dies liefert mit den Koeffizienten aus Bemerkung 5.11

$$H^1_{\nu_\sigma}(z) = \mathrm{i}(-1)^{\nu_\sigma+1/2} \cdot \frac{2^{\nu_\sigma}}{\Gamma(1-\nu_\sigma)} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, {}^{-}\alpha^{q,k}_\sigma \cdot z^{2k-\nu_\sigma} + \mathrm{i}(-1)^{\nu_\sigma-1/2} 4^{-\nu_\sigma} \frac{\Gamma(1-\nu_\sigma)}{\Gamma(1+\nu_\sigma)} (2\sigma+N)(-1)^{1+\delta_{q,0}+\delta_{q,N}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, {}^{+}\alpha^{q,k}_\sigma \cdot z^{2k+\nu_\sigma} \Big) \quad .$$

Damit erhalten wir die Darstellung

$$r^{1-\frac{N}{2}} \cdot H^1_{\nu_\sigma}(\omega\, r) = \beta_\sigma\, \omega^{-\nu_\sigma} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \, {}^{-}\alpha^{q,k}_\sigma \cdot r^{2k+1-N-\sigma} + \kappa^q_\sigma\, \omega^{2\nu_\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \, {}^{+}\alpha^{q,k}_\sigma \cdot r^{2k+1+\sigma} \Big)$$

mit den Konstanten

$$\beta_\sigma := \mathrm{i}\, \frac{2^{\nu_\sigma}}{\Gamma(1-\nu_\sigma)} (-1)^{\nu_\sigma+1/2} \qquad \text{und} \qquad \kappa^q_\sigma := \mathrm{i}\, 2\nu_\sigma 4^{-\nu_\sigma} \frac{\Gamma(1-\nu_\sigma)}{\Gamma(1+\nu_\sigma)} (-1)^{\nu_\sigma+1/2+\delta_{q,0}+\delta_{q,N}} \quad .$$

Schließlich bekommen wir mit Bemerkung 5.11 die Reihendarstellungen

- $$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}^{1,\omega}_{\sigma,m} &= \beta_\sigma \cdot \omega^{1-\nu_\sigma} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \, {}^{-}\alpha^{q+1,k}_\sigma \cdot r^{2k+1-N-\sigma} \cdot \check{\tau} T^q_{\sigma,m} \\ &\qquad + \kappa^{q+1}_\sigma\, \omega^{2\nu_\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \, {}^{+}\alpha^{q+1,k}_\sigma \cdot r^{2k+1+\sigma} \cdot \check{\tau} T^q_{\sigma,m} \Big) \\ &= \beta_\sigma \cdot \omega^{1-\nu_\sigma} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot {}^{-}D^{q,2k+1}_{\sigma,m} + \kappa^{q+1}_\sigma\, \omega^{2\nu_\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot {}^{+}D^{q,2k+1}_{\sigma,m} \Big) \quad , \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{H}}^{2,\omega}_{\sigma,m} &= \beta_\sigma \cdot \omega^{1-\nu_\sigma} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \, {}^{-}\alpha^{q,k}_\sigma \cdot r^{2k+1-N-\sigma} \cdot \check{\rho} S^q_{\sigma,m} \\ &\qquad + \kappa^{q}_\sigma\, \omega^{2\nu_\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \, {}^{+}\alpha^{q,k}_\sigma \cdot r^{2k+1+\sigma} \cdot \check{\rho} S^q_{\sigma,m} \Big) \\ &= \beta_\sigma \cdot \omega^{1-\nu_\sigma} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot {}^{-}R^{q+1,2k+1}_{\sigma,m} + \kappa^{q}_\sigma\, \omega^{2\nu_\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot {}^{+}R^{q+1,2k+1}_{\sigma,m} \Big) \quad . \end{aligned}$$

Definieren wir für $q \in \{0, \dots, N-1\}$ die Reihen

- $$\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m} := \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot {}^{-}D^{q,2k+1}_{\sigma,m} + \kappa^{q+1}_\sigma\, \omega^{2\nu_\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot {}^{+}D^{q,2k+1}_{\sigma,m} \quad , \tag{5.44}$$
- $$\mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m} := \frac{\mathrm{i}}{\omega} \operatorname{rot} \mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m} = \frac{\mathrm{i}}{\omega} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot {}^{-}R^{q+1,2k}_{\sigma,m} + \kappa^{q+1}_\sigma\, \omega^{2\nu_\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot {}^{+}R^{q+1,2k}_{\sigma,m} \Big) \tag{5.45}$$

und

- $$\mathbb{H}^{2,\omega}_{\sigma,m} := \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot {}^{-}R^{q+1,2k+1}_{\sigma,m} + \kappa^{q}_\sigma\, \omega^{2\nu_\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot {}^{+}R^{q+1,2k+1}_{\sigma,m} \quad , \tag{5.46}$$
- $$\mathbb{E}^{2,\omega}_{\sigma,m} := \frac{\mathrm{i}}{\omega} \operatorname{div} \mathbb{H}^{2,\omega}_{\sigma,m} = \frac{\mathrm{i}}{\omega} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot {}^{-}D^{q,2k}_{\sigma,m} + \kappa^{q}_\sigma\, \omega^{2\nu_\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot {}^{+}D^{q,2k}_{\sigma,m} \Big) \quad , \tag{5.47}$$

so können wir die Diskussion der Lösungen von (5.30) wie folgt zusammenfassen:

Bemerkung 5.25
Seien $q \in \{0, \dots, N-1\}$, $\sigma \in \mathbb{N}_0$, $m = 1, \dots$ und $\omega \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ sowie $\nu_\sigma := N/2 + \sigma$. Die Reihen $\big(\mathbb{E}^{n,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{n,\omega}_{\sigma,m}\big)$, $n = 1, 2$, konvergieren aufgrund der Konvergenzeigenschaften der Reihe der Hankel–Funktion gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ und definieren dort C^∞–Formen. Desweiteren sind sie Lösungen zu (5.30), welche für $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sowohl der Maxwellschen Strahlungsbedingung als auch der Sommerfeldschen Strahlungsbedingung zur Helmholtz–Gleichung genügen und für $\omega \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{R}$ exponentiell fallen. Insbesondere gelten $\operatorname{div} \mathbb{E}^{n,\omega}_{\sigma,m} = 0$ und $\operatorname{rot} \mathbb{H}^{n,\omega}_{\sigma,m} = 0$ sowie mit (5.41), (5.42) und (5.43) für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\big(\mathbb{E}^{n,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{n,\omega}_{\sigma,m}\big) = \frac{\omega^{\nu_\sigma-1}}{\beta_\sigma} \cdot \big(\tilde{\mathbb{E}}^{n,\omega}_{\sigma,m}, \tilde{\mathbb{H}}^{n,\omega}_{\sigma,m}\big) \in \mathbf{H}^{k,q}_{<-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big) \times \mathbf{H}^{k,q+1}_{<-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big) \quad .$$

6 Elektro–Magneto–Statik

Wir wollen zunächst die „klassischen" Ergebnisse des Abschnitts 2.5 dahingehend verallgemeinern, daß wir statische Maxwell–Probleme der Art

$$\operatorname{rot} E = G \quad , \quad \operatorname{div} \varepsilon E = f \quad , \quad \varepsilon E \text{ erfüllt endlich viele Nebenbedingungen} \tag{6.1}$$

in unserem Außengebiet Ω mit Daten aus $\mathrm{L}^2(\Omega)$ und Lösungen in $\mathrm{L}^2_{-1}(\Omega)$ diskutieren. Der wesentliche Teil dieses Kapitels ist aber die Bereitstellung einer Lösungstheorie zu (6.1), welche Daten in $\mathrm{L}^2_s(\Omega)$ mit $s > 1 - N/2$ zuläßt und Lösungen liefert, die bis auf endliche Summen spezieller statischer Ganzraumlösungen (Turmformen aus Abschnitt 5.4) in $\mathrm{L}^2_{s-1}(\Omega)$ liegen. Wir werden sodann eine Iteration eines speziellen statischen Lösungsoperators angebenen, welche intensiv die Türme der Definition 5.8 benötigt.
Sofern wir keine weiteren Einschränkungen treffen, sei der Rang der Differentialformen $q \in \{0, \ldots, N\}$. Zur Entlastung der Darstellungen werden wir in diesem Kapitel immer die folgenden Voraussetzungen treffen:

(i) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ ungerade, ist ein Außengebiet mit SME und es gilt $\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset U(0, r_0)$.

(ii) Desweiteren wählen wir r_0 so groß, daß für alle q die Träger der Formen aus

$$\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega) \qquad \text{und für } q \neq 1 \qquad \mathrm{B}^q(\Omega)$$

in $U(0, r_0)$ liegen.

(iii) Zu den Radien $r_n := 2^n \cdot r_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, sei die Ausschneidefunktion η aus (1.33) mit (1.32) fixiert.

(iv) $(\varepsilon, \mu) = \mathrm{Id} + (\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}) \in \mathrm{V}^{q,0}_\tau(\Omega) \times \mathrm{V}^{q+1,0}_\tau(\Omega)$, $\tau \geq 0$, sei einmal stetig differenzierbar mit

$$\partial_n \hat{\varepsilon}, \partial_n \hat{\mu} = \mathcal{O}(r^{-1-\tau}) \quad , \quad n = 1, \ldots, N \quad .$$

Der Buchstabe τ wird im folgenden stets dazu benutzt, diese Abklingrate von $(\hat{\varepsilon}, \hat{\mu})$ anzugeben.
Solche Transformationen (ε, μ) wollen wir „τ–konstant" nennen.

Bemerkung 6.1

zu (i): *Die Bedingung „N ungerade" benötigen wir eigentlich erst am Schluß dieses Kapitels für die Turmformen, mit deren Hilfe wir einen statischen Lösungsoperator iterieren. Die* SME *von* Ω *kann oft zur* LMKE *abgeschwächt werden. Manchmal benötigen wir sogar gar keine spezielle Randeigenchaft.*

zu (ii): *Mit dieser Wahl von* r_0 *gilt stets*

$$\big(\operatorname{supp} \eta \cap \operatorname{supp} \overset{\circ}{b}{}^q_i\big) \cup \big(\operatorname{supp} \eta \cap \operatorname{supp} b^q_j\big) = \emptyset \quad , \quad i, j = 1, \ldots, d_q \quad .$$

zu (iv): *Für viele Resultate benötigen wir die Differenzierbarkeit von* (ε, μ) nicht *und für* alle *Ergebnisse brauchen* (ε, μ) *nur in* $A(r_0)$ *differenzierbar zu sein.*
Ist eine Transformation τ*–konstant, so gilt dies auch für ihre Inverse mit demselben* τ *.*

6.1 Leichte Verallgemeinerungen der klassischen Theorie

Lemma 6.2
Seien $\tau > 0$ *und* $\nu = \mathrm{Id} + \hat{\nu}$ *eine* τ*–konstante Transformation im* $\mathbb{R}^N$ *. Dann gibt es eine Konstante* $c > 0$ *und ein Kompaktum* $K \Subset \mathbb{R}^N$ *, so daß für alle* $E \in \mathrm{R}^q_{-1} \cap \nu^{-1} \mathrm{D}^q_{-1}$ *die Abschätzung*

$$\|E\|_{1,-1,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \big(\| \operatorname{rot} E\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \| \operatorname{div} \nu E\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|E\|_{0,0,K}\big)$$

gilt.

Beweis:
Für alle $t \geq 1$ ist nach Satz 3.7 $E \in \mathrm{H}^{1,q}_{-t}$ und es gilt die Abschätzung

$$\|E\|_{1,-t,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \big(\|E\|_{0,-t,\mathbb{R}^N} + \| \operatorname{rot} E\|_{0,1-t,\mathbb{R}^N} + \| \operatorname{div} \nu E\|_{0,1-t,\mathbb{R}^N}\big) \quad . \tag{6.2}$$

Lemma 2.16 liefert ein Kompaktum $\tilde{K}$, so daß

$$\|E\|_{0,-1,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \big(\| \operatorname{rot} E\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \| \operatorname{div} E\|_{0,0,\mathbb{R}^N} + \|E\|_{0,0,\tilde{K}}\big)$$

erfüllt ist. Mit dieser Abschätzung und (6.2) für $t = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\|E\|_{1,-1,\mathbb{R}^N} &\leq c\cdot\big(\|\operatorname{rot}E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{div}\nu E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{div}E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|E\|_{0,0,\tilde K}\big)\\ &\leq c\cdot\big(\|\operatorname{rot}E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{div}\nu E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{div}\hat\nu E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|E\|_{0,0,\tilde K}\big)\\ &\leq c\cdot\Big(\|\operatorname{rot}E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{div}\nu E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|E\|_{0,0,\tilde K}+\|E\|_{0,-1-\tau,\mathbb{R}^N}+\sum_{n=1}^{N}\|\partial_n E\|_{0,-\tau,\mathbb{R}^N}\Big)\end{aligned}$$

sowie mit (6.2) für $t=1+\tau>1$

$$\begin{aligned}\|E\|_{1,-1,\mathbb{R}^N} \leq c\cdot\Big(&\|\operatorname{rot}E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{div}\nu E\|_{0,0,\mathbb{R}^N}+\|E\|_{0,0,\tilde K}\\ &+\|E\|_{0,-1-\tau,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{rot}E\|_{0,-\tau,\mathbb{R}^N}+\|\operatorname{div}\nu E\|_{0,-\tau,\mathbb{R}^N}\Big)\quad .\end{aligned}$$

Lemma 4.8 liefert dann mit einem Kompaktum $K\supset\tilde K$ die erste Behauptung. ■

Mit einer Abschneidetechnik erhalten wir

Lemma 6.3
Sei $\tau>0$. Dann gibt es eine Konstante $c>0$ und ein Kompaktum $K\Subset\mathbb{R}^N$, so daß für alle

$$E\in \mathrm{R}^q_{-1}(\Omega)\cap\varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega)$$

die Abschätzung

$$\|E\|_{0,-1,\Omega}\leq c\cdot\big(\|\operatorname{rot}E\|_{0,0,\Omega}+\|\operatorname{div}\varepsilon E\|_{0,0,\Omega}+\|E\|_{0,0,\Omega\cap K}\big)$$

gilt.

Definition 6.4
Für $s\in\mathbb{R}$ definieren wir durch

$${}_\varepsilon\mathcal{H}^q_s(\Omega):={}_0\mathring{\mathrm{R}}^q_s(\Omega)\cap\varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega)$$

die Räume der „(gewichteten) Dirichlet–Formen" und bezeichnen ihre Dimension mit $d_{q,s}$. Im Fall $s=0$ schreiben wir in Analogie zu der Definition im Satz 2.21 auch ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)$.

Wir erinnern an die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.5 und erhalten das

Lemma 6.5
Im Fall $s=0$ ist die Dimension der Räume der Dirichlet–Formen unabhängig von der Transformation, d. h.

$$d_q=d_{q,0}=\dim\mathcal{H}^q(\Omega)=\dim{}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)\qquad .$$

Insbesondere ist ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q_s(\Omega)$ für alle $s\geq 0$ endlichdimensional.

Beweis:
Betrachten wir mit einer weiteren τ–konstanten Transformation ν den Projektor

$$\begin{array}{cccc}\pi & : & {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) & \longrightarrow & {}_\nu\mathcal{H}^q(\Omega)\\ & & E & \longmapsto & \pi E\end{array}\quad ,$$

wobei πE die Orthogonalprojektion von E bzgl. $\langle\nu\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\Omega$ in $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)$ auf $\nu^{-1}{}_0\mathrm{D}^q(\Omega)$ entlang $\overline{\operatorname{rot}\mathring{\mathbf{R}}^{q-1}(\Omega)}$ sei (siehe (4.15)). π ist wohldefiniert, denn

$$(1-\pi)E\in\overline{\operatorname{rot}\mathring{\mathbf{R}}^{q-1}(\Omega)}\subset{}_0\mathring{\mathrm{R}}^q(\Omega)\qquad\Rightarrow\qquad \pi E=E-(1-\pi)E\in{}_0\mathring{\mathrm{R}}^q(\Omega)\cap\nu^{-1}{}_0\mathrm{D}^q(\Omega)={}_\nu\mathcal{H}^q(\Omega)\qquad ,$$

linear und stetig. Desweiteren ist π injektiv, denn

$$\pi E=0\qquad\Leftrightarrow\qquad E\in{}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)\cap\overline{\operatorname{rot}\mathring{\mathbf{R}}^{q-1}(\Omega)}=\{0\}\qquad .$$

Damit erhalten wir $\dim{}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)\leq\dim{}_\nu\mathcal{H}^q(\Omega)$ und durch Symmetrie sogar

$$\dim{}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)=\dim{}_\nu\mathcal{H}^q(\Omega)\overset{\nu\,\equiv\,\mathrm{Id}}{=}\dim\mathcal{H}^q(\Omega)\qquad .$$

Nach Lemma 2.16 ist $\mathcal{H}^q(\Omega)$ endlichdimensional und somit π sogar bijektiv. ■

Mit Hilfe der LMKE und des Lemmas 6.3 erhalten wir das

Korollar 6.6
Sei $\tau > 0$. Dann ist ${}_{\varepsilon}\mathcal{H}^q_{-1}(\Omega)$ endlichdimensional.

Wir können die Helmholtz–Zerlegungen aus Lemma 2.18 verallgemeinern:

Lemma 6.7
Es gelten die folgenden $\langle \varepsilon\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\Omega$–orthogonalen Zerlegungen:

$$\textbf{(i)}\quad \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) = \overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)} \oplus_\varepsilon \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q(\Omega) = {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega) \oplus_\varepsilon \varepsilon^{-1}\overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)}$$
$$= \varepsilon^{-1}\overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)} \oplus_\varepsilon {}_0\mathrm{D}^q(\Omega) = \varepsilon^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega) \oplus_\varepsilon \overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)}$$

$$\textbf{(ii)}\quad \mathrm{L}^{2,q}(\Omega) = \overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)} \oplus_\varepsilon {}_{\varepsilon}\mathcal{H}^q(\Omega) \oplus_\varepsilon \varepsilon^{-1}\overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)}$$
$$= \varepsilon^{-1}\overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)} \oplus_\varepsilon \varepsilon^{-1}{}_{\varepsilon^{-1}}\mathcal{H}^q(\Omega) \oplus_\varepsilon \overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)}$$

Alle Abschlüsse werden in $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)$ genommen.

Beweis:
(i) ist trivial. Wegen $\overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)} \subset {}_0\mathrm{D}^q(\Omega)$ liefert **(i)**

$$\varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q(\Omega) = \Big({}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q(\Omega)\Big) \oplus_\varepsilon \varepsilon^{-1}\overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)} = {}_{\varepsilon}\mathcal{H}^q(\Omega) \oplus_\varepsilon \varepsilon^{-1}\overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)}$$

und genauso

$${}_0\mathrm{D}^q(\Omega) = \Big(\varepsilon^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega) \cap {}_0\mathrm{D}^q(\Omega)\Big) \oplus_\varepsilon \overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)} = \varepsilon^{-1}{}_{\varepsilon^{-1}}\mathcal{H}^q(\Omega) \oplus_\varepsilon \overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)} \quad .$$

Dies zeigt **(ii)**. ∎

Wir fixieren nun eine Basis
$$\big\{h_1,\ldots,h_{d_{q,-1}}\big\} \tag{6.3}$$
von ${}_{\varepsilon}\mathcal{H}^q_{-1}(\Omega)$, notieren aber dabei nicht ihre Abhängigkeit von ε.
Wir wollen jetzt das Analogon zu Lemma 2.16 (iii) zeigen.

Lemma 6.8
Seien $\tau > 0$ und $\nu \in \mathrm{V}^{q,0}_0(\Omega)$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $E \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega)$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\|E\|_{0,-1,\Omega} \le c\cdot\Big(\|\operatorname{rot}E\|_{0,0,\Omega} + \|\operatorname{div}\varepsilon E\|_{0,0,\Omega} + \sum_{\ell=1}^{d_{q,-1}} \big|\langle \nu\rho^{-1}E, \rho^{-1}h_\ell\rangle_\Omega\big|\Big)$$

Erinnerung: $\rho = (1+r^2)^{1/2}$

Beweis:
Mit der LMKE und Lemma 6.3 kann der Beweis indirekt geführt werden. ∎

Analog zu Lemma 2.18 folgt

Lemma 6.9
Seien $\tau > 0$ und $\nu \in \mathrm{V}^{q,0}_0(\Omega)$. Dann gelten

$$\textbf{(i)}\quad \overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q(\Omega)} = \overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega)} = \operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{-1}(\Omega) = \operatorname{rot}\Big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) \cap {}_{\varepsilon}\mathcal{H}^q_{-1}(\Omega)^{\perp_{-1,\nu}}\Big) \quad ,$$
$$\textbf{(ii)}\quad \overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^q(\Omega)} = \overline{\operatorname{div}\mathrm{D}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega)} = \operatorname{div}\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) = \operatorname{div}\Big(\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{-1}(\Omega) \cap {}_{\varepsilon^{-1}}\mathcal{H}^q_{-1}(\Omega)^{\perp_{-1,\nu}}\Big) \quad .$$

Die Abschlüsse werden wieder in $\mathrm{L}^2(\Omega)$ genommen und mit $\perp_{s,\nu}$ bezeichnen wir die Orthogonalität bzgl. des $\langle \nu\rho^s\,\cdot\,,\rho^s\,\cdot\,\rangle_\Omega$–Skalarproduktes.

Beweis:
Zeigen wir z. B. **(i)**. Die andere Behauptung folgt mit ähnlichen Argumenten. Nach Lemma 3.1 (Der Fall eines Außengebietes beweist sich völlig analog!) haben wir $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q}_{\mathrm{vox}}(\Omega) \overset{\text{dicht}}{\subset} \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q}(\Omega), \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q}_{-1}(\Omega)$ und somit direkt

$$\overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q}(\Omega)} = \overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q}_{\mathrm{vox}}(\Omega)} = \overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q}_{-1}(\Omega)} \qquad .$$

Sei also $G \in \overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q}(\Omega)}$ und $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q}(\Omega)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{rot} E_n = G$. Mit Lemma 6.7 (ii) zerlegen wir unsere Folge

$$E_n = E_n^{\mathrm{rot}} + E_n^{\mathcal{H}} + \varepsilon^{-1}E_n^{\mathrm{div}} \in \overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)} \oplus_\varepsilon {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) \oplus_\varepsilon \varepsilon^{-1}\overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)}$$

und sehen

$$E_n - E_n^{\mathrm{rot}} - E_n^{\mathcal{H}} = \varepsilon^{-1}E_n^{\mathrm{div}} \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q(\Omega) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon}$$

sowie

$$\operatorname{rot}\varepsilon^{-1}E_n^{\mathrm{div}} = \operatorname{rot}E_n \xrightarrow{n\to\infty} G \qquad \text{in} \qquad \mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega) \qquad ,$$

d. h.

$$\overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q}(\Omega)} = \overline{\operatorname{rot}\Big(\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q(\Omega) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon}\Big)} \qquad .$$

Trivialerweise gilt $\varepsilon^{-1}E_n^{\mathrm{div}} \in \mathrm{L}^{2,q}_{-1}(\Omega)$ und somit die Zerlegung

$$\varepsilon^{-1}E_n^{\mathrm{div}} = E_n^1 + E_n^2 \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{-1}(\Omega) \oplus_{-1,\nu} {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{-1}(\Omega)^{\perp_{-1,\nu}} \qquad .$$

Wir erhalten

$$E_n^2 = \varepsilon^{-1}E_n^{\mathrm{div}} - E_n^1 \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q}_{-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{-1}(\Omega)^{\perp_{-1,\nu}} \tag{6.4}$$

und

$$\operatorname{rot}E_n^2 = \operatorname{rot}\varepsilon^{-1}E_n^{\mathrm{div}} = \operatorname{rot}E_n \xrightarrow{n\to\infty} G \qquad \text{in} \qquad \mathrm{L}^{2,q+1}(\Omega) \qquad . \tag{6.5}$$

Lemma 6.8 liefert uns

$$\|E_n^2 - E_m^2\|_{0,-1,\Omega} \le c\cdot\|\operatorname{rot}E_n^2 - \operatorname{rot}E_m^2\|_{0,0,\Omega} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad ,$$

folglich ist $(E_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathrm{L}^{2,q}_{-1}(\Omega)$–Cauchy–Folge mit Grenzwert $E \in \mathrm{L}^{2,q}_{-1}(\Omega)$. Wegen (6.4) und (6.5) bekommen wir außerdem

$$E \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q}_{-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{-1}(\Omega)^{\perp_{-1,\nu}} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot}E = G \qquad .$$

∎

Wir kommen zum Hauptergebnis dieses Abschnitts, einer leichten Verallgemeinerung des Satzes 2.19 :

Satz 6.10
Seien $\tau > 0$ und $d_{q,-1}$ stetige lineare Funktionale φ^ℓ_ε auf $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q}_{-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega)$ mit

$${}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{-1}(\Omega) \cap \bigcap_{\ell=1}^{d_{q,-1}} N(\varphi^\ell_\varepsilon) = \{0\}$$

sowie $(\tilde{\nu},\hat{\nu}) \in \mathrm{V}^{q-1,0}_0(\Omega) \times \mathrm{V}^{q+1,0}_0(\Omega)$ gegeben. Dann sind

$$\begin{array}{llcc} \mathcal{M}\mathrm{ax}_\varepsilon & : \ \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q}_{-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) & \longrightarrow & W^q(\Omega) \\ & \qquad E & \longmapsto & \big(\operatorname{div}\varepsilon E, \operatorname{rot}E, \varphi^1_\varepsilon(E),\dots,\varphi^{d_{q,-1}}_\varepsilon(E)\big) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{llcc} {}_\varepsilon\mathcal{M}\mathrm{ax} & : \ \varepsilon^{-1}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q}_{-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) & \longrightarrow & W^q(\Omega) \\ & \qquad E & \longmapsto & \big(\operatorname{div}E, \operatorname{rot}\varepsilon E, \varphi^1_{\varepsilon^{-1}}(\varepsilon E),\dots,\varphi^{d_{q,-1}}_{\varepsilon^{-1}}(\varepsilon E)\big) \end{array}$$

topologische Isomorphismen.
Hierbei sei $W^q(\Omega) := \big({}_0\mathrm{D}^{q-1}(\Omega) \cap {}_{\tilde{\nu}}\mathcal{H}^{q-1}(\Omega)^{\perp}\big) \times \big({}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}(\Omega) \cap {}_{\hat{\nu}}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^{\perp_{\hat{\nu}}}\big) \times \mathbb{C}^{d_{q,-1}}$.

Bemerkung 6.11
Man kann z. B. $\varphi_\varepsilon^\ell(E) := \langle \nu\rho^{-1}E, \rho^{-1}h_\ell\rangle_\Omega$ *mit* $\nu \in \mathrm{V}_0^{q,0}(\Omega)$ *wählen.*

Beweis:
Diskutieren wir $\mathcal{M}\mathrm{ax}_\varepsilon$: Wohldefiniertheit, Stetigkeit und Injektivität sind klar. Nach dem Satz von der beschränkten Inversen folgt die Behauptung, falls $\mathcal{M}\mathrm{ax}_\varepsilon$ surjektiv ist.
Seien dazu $(f, G, \gamma) \in W$. Nach Lemma 6.7 und Lemma 6.9 gelten

$$f \in {}_0\mathrm{D}^{q-1}(\Omega) \cap {}_{\hat\nu}\mathcal{H}^{q-1}(\Omega)^\perp = \overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^q(\Omega)} = \operatorname{div}\big(\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) \cap \varepsilon\, {}_0\mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega)\big)$$

und

$$G \in {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}(\Omega) \cap {}_{\hat\nu}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^{\perp_{\hat\nu}} = \overline{\operatorname{rot}\mathring{\mathbf{R}}^q(\Omega)} = \operatorname{rot}\big(\mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega)\big) \qquad ,$$

d. h. es existieren

$$E_r \in \mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) \cap \varepsilon\, {}_0\mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega) \qquad \text{und} \qquad E_d \in \mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega)$$

mit $\operatorname{div} E_r = f$ und $\operatorname{rot} E_d = G$. Also löst

$$\hat E := E_d + \varepsilon^{-1}E_r \in \mathring{\mathrm{R}}^q_{-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{-1}(\Omega)$$

das System

$$\operatorname{rot}\hat E = G \qquad , \qquad \operatorname{div}\varepsilon\hat E = f$$

und wir dürfen zu $\hat E$ noch beliebige Elemente aus ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{-1}(\Omega)$ addieren, ohne dies zu ändern. Wegen der Voraussetzungen ist

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{-1}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{d_{q,-1}} \\ & & E & \longmapsto & \big(\varphi_\varepsilon^1(E), \ldots, \varphi_\varepsilon^{d_{q,-1}}(E)\big) \end{array}$$

ein topologischer Isomorphismus. Daher liefert

$$E := \hat E + \varphi^{-1}\Big(\gamma - \big(\varphi_\varepsilon^1(\hat E), \ldots, \varphi_\varepsilon^{d_{q,-1}}(\hat E)\big)\Big)$$

die gesuchte Lösung zu $\mathcal{M}\mathrm{ax}_\varepsilon E = (f, G, \gamma)$.
Wegen ${}_\varepsilon\mathcal{M}\mathrm{ax} = \mathcal{M}\mathrm{ax}_{\varepsilon^{-1}}\,\varepsilon$ ist auch dieser Operator ein topologischer Isomorphismus. ∎

6.2 Statische Operatoren in Räumen mit großen Gewichten

Lemma 6.12
Es gilt

$$\mathcal{H}^q_{-\frac{N}{2}}(\Omega) = \mathcal{H}^q(\Omega) = \mathcal{H}^q_{<\frac{N}{2}-1}(\Omega)$$

und im Fall $q \notin \{1, N-1\}$ *sogar* $\mathcal{H}^q(\Omega) = \mathcal{H}^q_{<\frac{N}{2}}(\Omega)$.

Bemerkung 6.13
Insbesondere liegt $\mathcal{H}^q(\Omega)$ *im Dualraum* $\mathrm{L}^{2,q}_{-s}(\Omega)$ *von* $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)$, *falls* $s > 1 - N/2$. *Für* $q \notin \{1, N-1\}$ *gilt dies sogar für* $s > -N/2$.

Beweis:
Nach Satz 5.22 gilt für ein $E \in \mathcal{H}^q_{-\frac{N}{2}}(\Omega)$

$$E|_{A(r_0)} = \sum_{\substack{\sigma\in\mathbb{N}_0\,,\\ m=1,\ldots,\mu_\sigma^{q,0}}} {}^-e^{q,1}_{0,\sigma,m} \cdot {}^-D^{q,0}_{\sigma,m} + \hat e^{q,1} \cdot \begin{cases} {}^-R^{1,1}_{0,1} & \text{, falls } q = 1 \\ {}^-D^{N-1,1}_{0,1} & \text{, falls } q = N-1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad ,$$

d. h. mit Bemerkung 5.24 gilt $E \in \mathrm{L}^{2,q}_{<\frac{N}{2}-1}(\Omega)$ und für $q \notin \{1, N-1\}$ sogar $E \in \mathrm{L}^{2,q}_{<\frac{N}{2}}(\Omega)$. ∎

Lemma 6.14
Für $s > 1 - N/2$ gilt mit Abschlüssen in $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)$

$$\overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q-1}_{s-1}(\Omega)} \cup \overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}_{s}(\Omega)} \cup \overline{\operatorname{div}\mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)} \cup \overline{\operatorname{div}\mathbf{D}^{q+1}_{s}(\Omega)} \subset \mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp} \qquad .$$

Hier bezeichne nach wie vor $\perp$ das Senkrechtstehen in $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)$, also im Sinne der $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)$–$\mathrm{L}^{2,q}_{-s}(\Omega)$–Dualität.

Beweis:
Für z. B. $E \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q-1}_{s-1}(\Omega)$ und $H \in \mathcal{H}^q(\Omega)$ gilt mit Lemma 6.12 und Lemma 4.23

$$\langle \operatorname{rot} E, H\rangle_{\Omega} = -\langle E, \operatorname{div} H\rangle_{\Omega} = 0 \qquad ,$$

d. h. $\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q-1}_{s-1}(\Omega) \subset \mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp}$, also $\overline{\operatorname{rot}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q-1}_{s-1}(\Omega)} \subset \mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp}$, denn $\mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)$. Die anderen Inklusionen folgen analog. ■

Wir erinnern an Definition 5.23 und Bemerkung 5.14 und führen eine neue Notation ein:

Definition 6.15
Zu $s \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\mathcal{D}^q_s := {}^{-}\mathcal{D}^{q,0}_{\leq s-\frac{N}{2}} = {}^{-}\mathcal{R}^{q,0}_{\leq s-\frac{N}{2}} =: \mathcal{R}^q_s$$

und die Ausnahmeformen

$$A^q_s := \begin{cases} {}^{-}R^{1,1}_{0,1} & \text{, falls } q = 1 \text{ und } s \geq N/2 - 1 \\ {}^{-}D^{N-1,1}_{0,1} & \text{, falls } q = N-1 \text{ und } s \geq N/2 - 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

sowie deren Erzeugnis $\mathcal{A}^q_s := \operatorname{Lin} A^q_s$.

Bemerkung 6.16
Der Index s in $\mathcal{D}^q_s$ charakterisiert nun nicht mehr einen Homogenitätsgrad, sondern eine Integrierbarkeitsbedingung. Es gelten dabei

$$\mathcal{D}^q_s \cap \mathrm{L}^{2,q}_s\big(A(1)\big) = \{0\} \qquad \textit{und} \qquad \mathcal{D}^q_s \subset \mathrm{L}^{2,q}_{<\frac{N}{2}}\big(A(1)\big)$$

sowie $\mathcal{D}^q_s = \{0\}$ für $s < N/2$. Da $\mathcal{D}^q_s \subset \mathrm{C}^{\infty,q}\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big)$, folgt desweiteren für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{D}^q_s \subset \mathrm{H}^{k,q}_{<\frac{N}{2}}\big(A(1)\big) \qquad .$$

Für die Ausnahmeform $\mathcal{A}^q_s \subset \mathrm{C}^{\infty,q}\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big)$ gelten $\mathcal{A}^q_s = \{0\}$ für $s < N/2 - 1$ sowie

$$\mathcal{A}^q_s \cap \mathrm{L}^{2,q}_s\big(A(1)\big) = \{0\} \qquad \textit{und} \qquad \mathcal{A}^q_s \subset \mathrm{H}^{k,q}_{<\frac{N}{2}-1}\big(A(1)\big) \qquad \textit{für alle} \qquad k \in \mathbb{N}_0 \qquad .$$

Die abzählbare Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^q &:= \big\{ {}^{\pm}D^{q,k}_{\sigma,m}, {}^{\pm}R^{q,k+1}_{\sigma,m} : k, \sigma \in \mathbb{N}_0 \ \wedge\ m = 1, \dots \big\} \\ &= \big\{ {}^{\pm}D^{q,k+1}_{\sigma,m}, {}^{\pm}R^{q,k}_{\sigma,m} : k, \sigma \in \mathbb{N}_0 \ \wedge\ m = 1, \dots \big\} \subset \mathrm{C}^{\infty,q}\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big) \end{aligned}$$

ist in, sagen wir, $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big)$ linear unabhängig. Ebenso ist die abzählbare Menge

$$\eta\mathcal{T}^q := \big\{ \eta \cdot {}^{\pm}D^{q,k}_{\sigma,m}, \eta \cdot {}^{\pm}R^{q,k+1}_{\sigma,m} : k, \sigma \in \mathbb{N}_0 \ \wedge\ m = 1, \dots \big\} \subset \mathrm{C}^{\infty,q}(\mathbb{R}^N)$$

in, sagen wir, $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}\big(\overline{\Omega}\big)$ linear unabhängig. Wir führen in $\operatorname{Lin}\eta\mathcal{T}^q$ ein Skalarprodukt derart ein, daß $\eta\mathcal{T}^q$ eine Orthonormalbasis dieses Vektorraumes wird. Wir wollen im folgenden für Teilmengen $\tilde{\mathcal{T}}^q$ von $\mathcal{T}^q$ Räume der Form

$$U^q_t(\Omega) := V^q_t(\Omega) + \operatorname{Lin}\eta\tilde{\mathcal{T}}^q \tag{6.6}$$

betrachten, wobei z. B. $V^q_t(\Omega) = \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_t(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_t(\Omega) \subset \mathrm{L}^{2,q}_t(\Omega)$ sein könnte, und diese mit einer Hilbert–Raum–Struktur versehen. Der Akzent liegt hierbei auf der Integrierbarkeit der Formen aus $V^q_t(\Omega)$. Man vergleiche hier mit den Arbeiten von Weck und Witsch, $\big[$[50], p. 1631$\big]$ und $\big[$[53], p. 1511$\big]$, Peter, $\big[$[25], S. 51$\big]$, oder Bauer, $\big[$[5], S. 39$\big]$. Dazu definieren wir in $U^q_t(\Omega)$ ein inneres Produkt derart, daß

- in $V_t^q(\Omega)$ das natürliche Skalarprodukt beibehalten werde,
- in $\operatorname{Lin}\eta\tilde{\mathfrak{T}}_t^q$ mit $\tilde{\mathfrak{T}}_t^q := \big\{E \in \tilde{\mathfrak{T}}^q : E \notin \mathrm{L}_t^{2,q}\big(A(1)\big)\big\}$ das $\operatorname{Lin}\eta\mathfrak{T}^q$–Skalarprodukt definiert sei und
- $V_t^q(\Omega)$ auf $\operatorname{Lin}\eta\tilde{\mathfrak{T}}_t^q$ senkrecht stehe.

Dann haben wir (Orthogonalität bzgl. dieses neuen Skalarproduktes!)

$$U_t^q(\Omega) = V_t^q(\Omega) + \operatorname{Lin}\eta\tilde{\mathfrak{T}}^q = V_t^q(\Omega) \dot{+} \operatorname{Lin}\eta\tilde{\mathfrak{T}}_t^q = V_t^q(\Omega) \oplus \operatorname{Lin}\eta\tilde{\mathfrak{T}}_t^q \qquad .$$

Bemerkung 6.17

- $U_t^q(\Omega)$ *ist genau dann ein Hilbert–Raum, wenn* $\tilde{\mathfrak{T}}_t^q$ *endlich ist.*
- $U_t^q(\Omega)$ *ist im folgenden Sinn unabhängig von der Ausschneidefunktion* η *: Ist* ξ *eine weitere Ausschneidefunktion mit gleichen Eigenschaften (wie* η*), so gilt mengentheoretisch (mit verschiedenen Skalarprodukten!)*
$$V_t^q(\Omega) \oplus \operatorname{Lin}\eta\tilde{\mathfrak{T}}_t^q = V_t^q(\Omega) \oplus \operatorname{Lin}\xi\tilde{\mathfrak{T}}_t^q \qquad ,$$
und die eine Menge ist genau dann ein Hilbert–Raum, wenn die andere einer ist. In diesem Fall ist die Identität ein topologischer Isomorphismus zwischen ihnen, dessen Norm von η *und* ξ *abhängt.*
Beachte: $E + \eta T = E + (\eta - \xi)T + \xi T$ *und* $\operatorname{supp}(\eta - \xi) \Subset \Omega$ *.*
- *Die Mengen* $\eta\mathcal{D}_s^q$ *oder* $\eta\mathcal{D}_s^q \oplus \eta\mathcal{A}_s^q$ *sind z. B. solche* $\operatorname{Lin}\eta\tilde{\mathfrak{T}}_s^q$ *.*

Nun können wir beginnen, die „gewichtete" statische Lösungstheorie aufzubauen.

Lemma 6.18
Seien $\rho \geq r_0$ *und* $E \in \mathrm{L}_{-\frac{N}{2}}^{2,q}(\Omega)$ *eine Lösung zu* $\Delta E = 0$ *in* $A(\rho)$ *. Dann gibt es eindeutige Konstanten* $\beta_{k,\sigma,m} \in \mathbb{C}$ *mit*

$$E|_{A(\rho)} = \sum_{k,\sigma,m} \beta_{k,\sigma,m} \cdot Q_{\sigma,m}^{q,k} \qquad .$$

Dabei gelten für $s > -N/2$

$$\begin{array}{llcll} \textbf{(i)} & \operatorname{rot} E \in \mathrm{L}_{s+1}^{2,q+1}\big(A(\rho)\big) & \Rightarrow & \beta_{\ell,\sigma,m} = 0 & \textit{für } \ell = 2,4 \textit{ und } \sigma \leq 2 + s - N/2 \qquad , \\ \textbf{(ii)} & \operatorname{div} E \in \mathrm{L}_{s+1}^{2,q-1}\big(A(\rho)\big) & \Rightarrow & \beta_{\ell,\sigma,m} = 0 & \textit{für } \ell = 1,4 \textit{ und } \sigma \leq 2 + s - N/2 \qquad . \end{array}$$

Im Fall $q = N - 1$ *muß in* **(i)** *die Bedingung* $\ell = 2,4$ *und entsprechend im Fall* $q = 1$ *in* **(ii)** *die Bedingung* $\ell = 1,4$ *durch* $\ell = 4$ *ersetzt werden.*
Insgesamt folgt

$$E \in \mathrm{L}_s^{2,q}(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}_s^q \oplus \eta\mathcal{A}_s^q = \mathrm{L}_s^{2,q}(\Omega) \oplus \eta\mathcal{R}_s^q \oplus \eta\mathcal{A}_s^q \qquad ,$$

falls $(\operatorname{div} E, \operatorname{rot} E) \in \mathrm{L}_{s+1}^{2,q-1}\big(A(\rho)\big) \times \mathrm{L}_{s+1}^{2,q+1}\big(A(\rho)\big)$ *mit einem* $s > -N/2$ *.*

Beweis:
Das Lemma ist nur für $s \geq N/2 - 1$ interessant. Da E in $A(\rho)$ eine Potentialform ist, liefert Satz 2.8

$$E|_{A(\rho)} = \sum_{k,\sigma,m} \beta_{k,\sigma,m} \cdot Q_{\sigma,m}^{q,k} \qquad .$$

Mit Lemma 2.5 erhalten wir, von den Ausnahmen $Q_{1,1}^{1,1}$ bzw. $Q_{1,1}^{N-1,2}$ im Fall $q = 1$ bzw. $q = N - 1$ abgesehen,

- $$\operatorname{rot} E|_{A(\rho)} = \sum_{\sigma,m} \tilde{\beta}_{2,\sigma,m} \cdot Q_{\sigma+1,m}^{q+1,3} + \sum_{\sigma,m} \tilde{\beta}_{4,\sigma,m} \cdot Q_{\sigma+1,m}^{q+1,1} \quad \text{mit} \quad \beta_{k,\sigma,m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\beta}_{k,\sigma,m} = 0 \qquad ,$$
- $$\operatorname{div} E|_{A(\rho)} = \sum_{\sigma,m} \hat{\beta}_{1,\sigma,m} \cdot Q_{\sigma+1,m}^{q-1,3} + \sum_{\sigma,m} \hat{\beta}_{4,\sigma,m} \cdot Q_{\sigma+1,m}^{q-1,2} \quad \text{mit} \quad \beta_{k,\sigma,m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\beta}_{k,\sigma,m} = 0 \qquad .$$

Desweiteren sehen wir mit Bemerkung 2.7, daß durch die zusätzliche Voraussetzung

$$\operatorname{rot} E \in \mathrm{L}_{s+1}^{2,q+1}\big(A(\rho)\big) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{div} E \in \mathrm{L}_{s+1}^{2,q-1}\big(A(\rho)\big) \tag{6.7}$$

alle Koeffizienten $\beta_{k,\sigma,m}$ mit $\sigma \leq 2+s-N/2$ und $k=2,4$ bzw. $k=1,4$ verschwinden müssen, außer $\beta_{1,1,1}$ bzw. $\beta_{2,1,1}$ im Fall $q=1$ bzw. $q=N-1$. Sind beide Bedingungen in (6.7) erfüllt, erhalten wir daher

$$\begin{aligned} E|_{A(\rho)} &= \sum_{\sigma,m} \beta_{3,\sigma,m} \cdot Q^{q,3}_{\sigma,m} + \sum_{\substack{k=1,2,4\,,\\ \sigma>2+s-N/2\,,\\ m=1,\dots}} \beta_{k,\sigma,m} \cdot Q^{q,k}_{\sigma,m} + \begin{cases} \beta_{1,1,1} \cdot Q^{1,1}_{1,1} & \text{, falls } q=1 \\ \beta_{2,1,1} \cdot Q^{N-1,2}_{1,1} & \text{, falls } q=N-1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \\ &= \sum_{\substack{\sigma\leq 2+s-N/2\,,\\ m=1,\dots}} \beta_{3,\sigma,m} \cdot Q^{q,3}_{\sigma,m} + \underbrace{\sum_{\substack{k=1,2,3,4\,,\\ \sigma>2+s-N/2\,,\\ m=1,\dots}} \beta_{k,\sigma,m} \cdot Q^{q,k}_{\sigma,m}}_{\in \mathrm{L}^{2,q}_s\left(A(\rho)\right)} + \begin{cases} \beta_{1,1,1} \cdot Q^{1,1}_{1,1} & \text{, falls } q=1 \\ \beta_{2,1,1} \cdot Q^{N-1,2}_{1,1} & \text{, falls } q=N-1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \quad . \end{aligned}$$

Folglich gilt in $A(\rho)$

$$\hat{E} := E - \sum_{\substack{\sigma\leq 2+s-N/2\,,\\ m=1,\dots}} \beta_{3,\sigma,m} \cdot \eta Q^{q,3}_{\sigma,m} - \begin{cases} \beta_{1,1,1} \cdot \eta Q^{1,1}_{1,1} & \text{, falls } q=1 \\ \beta_{2,1,1} \cdot \eta Q^{N-1,2}_{1,1} & \text{, falls } q=N-1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \in \mathrm{L}^{2,q}_s\big(A(\rho)\big) \qquad ,$$

also $\hat{E} \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)$. Schließlich erhalten wir mit Bemerkung 5.14 sowie den Definitionen 5.23 und 6.15

$$E \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q_s \oplus \eta\mathcal{A}^q_s \qquad .$$

■

Wir erinnern an $\mathbb{I}$ aus (2.27) und kommen im Fall homogener Medien zu einem ersten gewichteten statischen Resultat:

Lemma 6.19
Sei $1-N/2 < s \notin \mathbb{I}$. *Dann ist*

$$\begin{array}{rclcl} \mathrm{DIV} & : & \Big(\big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}\Big) \cap {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \longrightarrow & {}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp \\ & & H & \longmapsto & \operatorname{div} H \end{array}$$

ein stetiger und surjektiver Fredholm–Operator mit Kern

$$N(\mathrm{DIV}) = \mathcal{H}^{q+1}(\Omega) \qquad .$$

Beweis:
div und rot bilden Turmformen aus $\eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}$ auf Formen mit kompakten Trägern ab. Daher und mit Lemma 6.14 sowie Bemerkung 6.16 ist DIV wohldefiniert, linear und stetig, denn $\eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}$ ist endlichdimensional. Lemma 6.12 liefert

$$N(\mathrm{DIV}) \subset \mathcal{H}^{q+1}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega) = \mathcal{H}^{q+1}(\Omega) \qquad .$$

Andererseits folgt aus $H \in \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)$ mit Lemma 6.18

$$H \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{s-1}(\Omega) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1} \qquad \text{und somit} \qquad H \in \big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1} \qquad .$$

Folglich ist $H \in N(\mathrm{DIV})$, d. h. $N(\mathrm{DIV}) = \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)$.
Damit müssen wir nur noch die Surjektivität zeigen. Sei dazu $F \in {}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp$ und $\hat{F}$ seine Nullfortsetzung nach $\mathbb{R}^N$. Mit Hilfe des Lemmas 2.12 zerlegen wir

$$\hat{F} =: F_{\mathrm{D}} + F_{\mathrm{R}} + F_{\mathcal{S}} \in {}_0\mathrm{D}^q_s \dotplus {}_0\mathrm{R}^q_s \dotplus \mathcal{S}^q_s \tag{6.8}$$

und definieren (Erinnerung: $C = C_{\Delta,\eta}$)

$$f := F_{\mathrm{D}} - \sum_{\substack{\sigma<s-1-\frac{N}{2}\,,\\ m=1,\dots,\mu^{q+1}_\sigma}} \big\langle F_{\mathrm{D}}, {}^+D^{q,1}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \cdot C\, {}^-D^{q,1}_{\sigma,m} \qquad . \tag{6.9}$$

Dies ist wohldefiniert, denn nach Bemerkung 5.24 gilt

$$^{+}D^{q,1}_{\sigma,m} \in \mathrm{L}^{2,q}_{-s} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma < s - 1 - N/2 \qquad .$$

Im Fall $s < 1 + N/2$ sind die Summen leer und im Fall $s < N/2$ gilt sogar $f = F_{\mathrm{D}}$. Wir wollen nun Satz 2.14 anwenden und zeigen dazu

$$f \in W(\mathfrak{div}) \qquad .$$

Mit Bemerkung 5.17 erhalten wir

$$C\,^{-}D^{q,1}_{\sigma,m} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\big(\eta^{-}D^{q,1}_{\sigma,m}\big) + \operatorname{rot}\underbrace{\operatorname{div}\big(\eta^{-}D^{q,1}_{\sigma,m}\big)}_{=0} \in {}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{vox}} \qquad ,$$

also $f \in {}_0\mathrm{D}^q_s$. Weiterhin folgt mit Lemma 5.19 für alle $\gamma < s - 1 - N/2$ und $n = 1, \dots, \mu^{q+1}_\sigma$ (Hier benötigen wir noch keine speziellen Eigenschaften von $\hat{\eta}$ gemäß (1.34)! Man vergleiche mit Lemma 2.9.)

$$\big\langle f, {}^{+}D^{q,1}_{\gamma,n}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} = 0 \qquad .$$

Folglich erhalten wir mit Bemerkung 5.14 für $1 \le q \le N-1$

$$f \in {}_0\mathrm{D}^q_s \cap \big({}^{+}\mathcal{D}^{q,1}_{<s-1-\frac{N}{2}}\big)^{\perp} = {}_0\mathrm{D}^q_s \cap \big(\mathcal{P}^{q,2}_{<s-\frac{N}{2}}\big)^{\perp} = W(\mathfrak{div}) \qquad .$$

Damit dies auch im Fall $q = 0$ richtig bleibt, muß f nach Satz 2.14 zusätzlich noch auf $\mathbf{1} \cong {}^{+}D^{0,0}_{0,1}$ senkrecht stehen, falls $s > N/2$. Um das zu erreichen, müssen wir in diesem Ausnahmefall f in (6.9) durch

$$\tilde{f} := f - \big\langle F_{\mathrm{D}}, {}^{+}D^{0,0}_{0,1}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \cdot C\,^{-}D^{0,2}_{0,1}$$

ersetzen. Dann gilt $f \in W(\mathfrak{div})$ für alle q und Satz 2.14 liefert ein

$$h \in \mathrm{D}^{q+1}_{s-1} \cap {}_0\mathrm{R}^{q+1}_{s-1} = \mathrm{H}^{1,q+1}_{s-1} \qquad \text{mit} \qquad \operatorname{div} h = f \qquad .$$

Der Ansatz

$$H := \eta \cdot h + \Phi \tag{6.10}$$

übersetzt das System

$$\operatorname{div} H = F \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot} H = 0$$

mit den Voraussetzungen und Lemma 6.14 in das System

- $\operatorname{rot}\Phi = -\operatorname{rot}(\eta h) \in {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+2}_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+2}(\Omega)^{\perp}$,
- $\operatorname{div}\Phi = F - \operatorname{div}(\eta h) \in {}_0\mathrm{D}^q_s \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp} \subset {}_0\mathrm{D}^q_{>1-\frac{N}{2}}(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp}$.

In Ω gilt $\hat{F} = F$ und somit für $1 \le q \le N-1$

$$\begin{aligned} F - \operatorname{div}(\eta h) &= F - \underbrace{\operatorname{div} h}_{=f} + \operatorname{div}\big((1-\eta)h\big) \\ &= F - F_{\mathrm{D}} + \operatorname{div}\big((1-\eta)h\big) + \sum_{\substack{\sigma < s-1-\frac{N}{2},\\ m=1,\dots,\mu^{q+1}_\sigma}} \big\langle F_{\mathrm{D}}, {}^{+}D^{q,1}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N} \cdot C\,^{-}D^{q,1}_{\sigma,m} \qquad , \end{aligned}$$

also

$$\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{vox}}(\Omega) \ni F - \operatorname{div}(\eta h) - F + F_{\mathrm{D}} = F - \operatorname{div}(\eta h) - F_{\mathrm{R}} - F_{\mathrm{S}} \qquad .$$

Dies bleibt auch im Ausnahmefall $q = 0$ und $s > N/2$ richtig. Aufgrund des beschränkten Trägers von F_{S} folgt nun

$$F - \operatorname{div}(\eta h) - F_{\mathrm{R}} \in \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{vox}}(\Omega) \qquad .$$

Desweiteren liefert (6.8) und die Divergenzfreiheit von F

$$F_{\mathrm{R}} \in {}_0\mathrm{R}^q_s \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div} F_{\mathrm{R}} = 0 \qquad \text{in } \Omega \setminus \operatorname{supp} F_{\mathrm{S}} \qquad .$$

Wie im Beweis des Lemmas 6.12 oder mit Lemma 6.18 und Bemerkung 6.16 erhalten wir

$$F_{\mathrm{R}} \in \mathrm{L}^{2,q}_{<\frac{N}{2}-1}(\Omega) \qquad .$$

Schließlich ist

$$\big(F - \operatorname{div}(\eta h), -\operatorname{rot}(\eta h)\big) \in \big({}_0\mathrm{D}^q_{<\frac{N}{2}-1}(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp\big) \times \big({}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+2}_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+2}(\Omega)^\perp\big)$$

und Satz 2.19 liefert ein $\Phi \in \mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{-1}(\Omega)$ mit

$$\operatorname{rot}\Phi = -\operatorname{rot}(\eta h) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div}\Phi = F - \operatorname{div}(\eta h) \qquad .$$

Außerdem gilt in $A(\hat r)$ mit $\hat r \geq r_2$ und $\operatorname{supp} F_{\mathrm{S}} \subset U(0,\hat r)$

$$\operatorname{rot}\Phi = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div}\Phi = F - F_{\mathrm{D}} = F_{\mathrm{R}} + F_{\mathrm{S}} = F_{\mathrm{R}} \qquad \text{, d. h.} \qquad \operatorname{rot}\operatorname{div}\Phi = 0 \qquad .$$

Dies liefert

$$\Delta\Phi|_{A(\hat r)} = 0 \qquad , \qquad (\operatorname{div}\Phi, \operatorname{rot}\Phi) \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+2}_{\mathrm{vox}}(\Omega)$$

und Lemma 6.18 zeigt

$$\Phi \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{s-1}(\Omega) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1} \qquad \text{, also} \qquad \Phi \in \big(\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1} \qquad .$$

Damit hat der Ansatz (6.10) zum Ziel geführt und

$$H = \eta h + \Phi \in \big(\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}$$

ist die gesuchte Lösung. ■

Lemma 6.20
Sei $1 - N/2 < s \notin \mathbb{I}$. Dann ist

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ROT} : & \Big(\big(\mathring{\mathrm{R}}^q_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{D}^q_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^q_{s-1}\Big) \cap {}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \longrightarrow & {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^\perp \\ & E & \longmapsto & \operatorname{rot} E \end{array}$$

ein stetiger und surjektiver Fredholm–Operator mit Kern

$$N(\mathrm{ROT}) = \mathcal{H}^q(\Omega) \qquad .$$

Beweis:
Der Beweis erfolgt analog zum vorhergehenden, nur etwas einfacher, weil die Nullfortsetzung von

$$G \in {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^\perp$$

schon in ${}_0\mathrm{R}^{q+1}_s$ liegt, so daß wir keine Helmholtz–Zerlegung nach Lemma 2.12 benötigen. Die Rollen der Turmformen ${}^\pm D^{q,1}_{\sigma,m}$ werden hier von ${}^\pm R^{q+1,1}_{\sigma,m}$ übernommen und im zu $q = 0$ und $s > N/2$ entsprechenden Ausnahmefall $q = N-1$ und $s > N/2$ müssen wir nach Satz 2.13 auch die Orthogonalität zu $*\,\mathbf{1} \cong {}^+R^{N,0}_{0,1}$ mit Hilfe der Form ${}^-R^{N,2}_{0,1}$ gewährleisten. ■

Nun möchten wir die Transformationen ε und μ in die Lösungstheorie einbauen. Dazu benötigen wir einige technische Vorbereitungen. Zunächst können wir Lemma 6.18 verallgemeinern:

Lemma 6.21
Sei $\rho \geq r_0$. Gilt für ein $E \in \mathrm{L}^{2,q}_{-\frac{N}{2}}(\Omega)$ mit einem $-N/2 < s \notin \mathbb{I}$

$$\operatorname{rot} E \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{s+1}\big(A(\rho)\big) \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{div} E \in \mathrm{L}^{2,q-1}_{s+1}\big(A(\rho)\big) \qquad ,$$

so folgt $E \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q_s \oplus \eta\mathcal{A}^q_s = \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{R}^q_s \oplus \eta\mathcal{A}^q_s$.

Beweis:
Sei $\varphi := \boldsymbol{\eta}\big(r/(2\rho)\big)$. Dann gilt $\varphi E \in \mathring{\mathrm{R}}^q_{-\frac{N}{2}}\big(A(r_0)\big) \cap \mathrm{D}^q_{-\frac{N}{2}}\big(A(r_0)\big)$ und desweiteren

$$\big(\operatorname{div}(\varphi E), \operatorname{rot}(\varphi E)\big) \in \Big({}_0\mathrm{D}^{q-1}_{s+1}\big(A(r_0)\big) \cap \mathcal{H}^{q-1}\big(A(r_0)\big)^\perp\Big) \times \Big({}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s+1}\big(A(r_0)\big) \cap \mathcal{H}^{q+1}\big(A(r_0)\big)^\perp\Big)$$

sowie $1-N/2 < s+1 \notin \mathbb{I}$, da $s \notin \mathbb{I}$. Außerdem besitzt $A(r_0)$ die SME. Eine Kombination von Lemma 6.19 und Lemma 6.20 liefert ein

$$e \in \Big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_s\big(A(r_0)\big) \cap \mathrm{D}^q_s\big(A(r_0)\big)\Big) \oplus \eta\mathcal{D}^q_s \oplus \eta\mathcal{A}^q_s \qquad \text{mit} \qquad \operatorname{rot} e = \operatorname{rot}(\varphi E) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div} e = \operatorname{div}(\varphi E) \qquad .$$

Demnach ist $e - \varphi E$ eine Dirichlet–Form und mit Lemma 6.12 gilt $e - \varphi E \in \mathcal{H}^q_{-\frac{N}{2}}\big(A(r_0)\big) = \mathcal{H}^q\big(A(r_0)\big)$. Setzen wir nun e und φE durch Null nach ganz Ω fort, liefert dies $e \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q_s \oplus \eta\mathcal{A}^q_s$ und mit Lemma 6.18

$$e - \varphi E \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q_s \oplus \eta\mathcal{A}^q_s \qquad \text{, d. h.} \qquad E = (1-\varphi)E + \varphi E - e + e \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q_s \oplus \eta\mathcal{A}^q_s \qquad .$$

■

Damit sind wir in der Lage, Transformationen ins Lemma 6.12 einzubauen.

Lemma 6.22
Sei $\tau > 0$. Dann gilt

$${}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{-\frac{N}{2}}(\Omega) = {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) = {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{<\frac{N}{2}-1}(\Omega)$$

und im Fall $q \notin \{1, N-1\}$ sogar ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) = {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{<\frac{N}{2}}(\Omega)$.

Bemerkung 6.23
Insbesondere liegt ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)$ im Dualraum $\mathrm{L}^{2,q}_{-s}(\Omega)$ von $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)$, falls $s > 1 - N/2$. Für $q \notin \{1, N-1\}$ gilt dies sogar für $s > -N/2$.

Beweis:
Ein $E \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{-\frac{N}{2}}(\Omega)$ liegt nach Korollar 3.8 (ii) in $\mathrm{H}^{1,q}_{-\frac{N}{2}}\big(A(r_0)\big)$ und in $A(r_0)$ sind

$$\operatorname{rot} E = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div} E = -\operatorname{div} \hat{\varepsilon} E \in \mathrm{L}^{2,q-1}_{-\frac{N}{2}+1+\tau}\big(A(r_0)\big) \qquad .$$

Wir können o. B. d. A. $\tau - N/2 \notin \mathbb{I}$ annehmen – andernfalls verkleinern wir τ ein wenig – und erhalten mit Lemma 6.21

$$E \in \mathrm{L}^{2,q}_{\tau-\frac{N}{2}}(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q_{\tau-\frac{N}{2}} \oplus \eta\mathcal{A}^q_{\tau-\frac{N}{2}} \qquad .$$

Nach Bemerkung 6.16 ist $\eta\mathcal{D}^q_{\tau-\frac{N}{2}} \oplus \eta\mathcal{A}^q_{\tau-\frac{N}{2}} \subset \mathrm{L}^{2,q}_{<s_q}(\Omega)$ mit $s_q := N/2 - \delta_{q,1} - \delta_{q,N-1}$.
Im Fall $\tau - N/2 \geq s_q$ folgt $E \in \mathrm{L}^{2,q}_{<s_q}(\Omega)$, ergo $E \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{<s_q}(\Omega)$, und der Beweis ist zu Ende.
Im Fall $\tau - N/2 < s_q$ folgt $E \in \mathrm{L}^{2,q}_{\tau-\frac{N}{2}}(\Omega)$, also $E \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{\tau-\frac{N}{2}}(\Omega)$. Wieder können wir o. B. d. A. $2\tau - N/2 \notin \mathbb{I}$ annehmen und erhalten mit obigen Argumenten

$$E \in \mathrm{L}^{2,q}_{2\tau-\frac{N}{2}}(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q_{2\tau-\frac{N}{2}} \oplus \eta\mathcal{A}^q_{2\tau-\frac{N}{2}} \qquad .$$

Nach endlich vielen Wiederholungen erhalten wir $E \in \mathrm{L}^{2,q}_{<s_q}(\Omega)$ und somit $E \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{<s_q}(\Omega)$. ■

Mit den Lemmata 2.16, 6.5 und 6.22 bekommen wir das

Korollar 6.24
Sei $\tau > 0$. Dann gilt für $-N/2 \leq t < N/2 - 1$

$$\dim {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_t(\Omega) = \dim \mathcal{H}^q(\Omega) = d_q \qquad .$$

Im Fall $q \notin \{1, N-1\}$ gilt dies sogar für $-N/2 \leq t < N/2$.

Mit Lemma 6.22 erhalten wir das Analogon zu Lemma 6.14:

Lemma 6.25
Sei $\tau > 0$. Dann gelten für $s > 1 - N/2$ mit Abschlüssen in $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)$

$$\overline{\operatorname{rot} \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q-1}_{s-1}(\Omega)} \cup \overline{\operatorname{rot} \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}_{s}(\Omega)} \subset {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} \qquad \textit{und} \qquad \overline{\operatorname{div} \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)} \cup \overline{\operatorname{div} \mathbf{D}^{q+1}_{s}(\Omega)} \subset {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp} \qquad .$$

Nun können wir die Transformationen in die bisherige Lösungstheorie der Lemmata 6.19 und 6.20 einbauen.

Lemma 6.26
Seien $1 - N/2 < s \notin \mathbb{I}$ *und* $\tau > \max\{0, s - N/2\}$ *sowie* $\tau \geq -s$. *Dann ist*

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{DIV}_\mu & : & \Big(\big(\mu^{-1} \mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \big) \oplus \eta \mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta \mathcal{A}^{q+1}_{s-1} \Big) \cap \mu^{-1} {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \longrightarrow & {}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp \\ & & H & \longmapsto & \operatorname{div} H \end{array}$$

ein stetiger und surjektiver Fredholm–Operator mit Kern

$$N(\mathrm{DIV}_\mu) = \mu^{-1} {}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega) \qquad .$$

Beweis:
Der Beweis folgt den wesentlichen Zügen des Beweises zu Lemma 6.19 .
Wegen $\operatorname{supp} \eta \subset A(r_1)$ liegt ein $\eta H \in \eta \mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta \mathcal{A}^{q+1}_{s-1}$ insbesondere in $\mathring{\mathrm{H}}^{1,q+1}_{<\frac{N}{2}-1}\big(A(r_0)\big)$. Die Voraussetzungen an τ liefern

$$\operatorname{rot}(\mu\eta H) = \underbrace{\operatorname{rot}(\eta H)}_{\in \mathrm{L}^{2,q+2}_{\mathrm{vox}}(\Omega)} + \operatorname{rot}(\hat{\mu}\eta H) \in \mathrm{L}^{2,q+2}_{<\frac{N}{2}+\tau}(\Omega) \subset \mathrm{L}^{2,q+2}_s(\Omega) \tag{6.11}$$

und somit ist DIV_μ wohldefiniert, linear und stetig. Mit Lemma 6.22 folgt $\mu N(\mathrm{DIV}_\mu) \subset {}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega)$. Nach Korollar 3.8 (ii) gelten für $H \in \mu^{-1} {}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega) \subset \mathrm{H}^{1,q+1}_{<\frac{N}{2}-1}\big(A(r_1)\big)$

$$\operatorname{div} H = 0 \qquad , \qquad \operatorname{rot} H = -\operatorname{rot}(\hat{\mu} H) \in \mathrm{L}^{2,q+2}_{<\frac{N}{2}+\tau}\big(A(r_2)\big) \subset \mathrm{L}^{2,q+2}_s\big(A(r_2)\big) \qquad ,$$

so daß Lemma 6.21 und die Bedingungen an τ

$$\mu^{-1} {}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega) \subset \big(\mu^{-1} \mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \big) \oplus \eta \mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta \mathcal{A}^{q+1}_{s-1}$$

liefern. Es folgt also $\mu^{-1} {}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega) \subset N(\mathrm{DIV}_\mu)$, also

$$N(\mathrm{DIV}_\mu) = \mu^{-1} {}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega) \qquad .$$

Damit fehlt nur noch der Nachweis der Surjektivität von DIV_μ . Sei $F \in {}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp$. Wir folgen wörtlich den Schritten im Beweis zu Lemma 6.19 bis zum Ansatz (6.10). Das System

$$\operatorname{div} H = F \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot} \mu H = 0$$

übersetzt sich nun mit Lemma 6.25 in

- $$\operatorname{rot} \mu\Phi = -\operatorname{rot}(\mu\eta h) = -\hat{\eta}'(r) r^{-1} R h - \operatorname{rot}(\hat{\mu}\eta h) \in {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+2}_{s+\tau}(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+2}(\Omega)^\perp \qquad , \tag{6.12}$$
- $$\operatorname{div} \Phi = F - \operatorname{div}(\eta h) \in {}_0\mathrm{D}^q_s \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp \subset {}_0\mathrm{D}^q_{>1-\frac{N}{2}}(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp \qquad . \tag{6.13}$$

Wie im Beweis zu Lemma 6.19 erhalten wir $F - \operatorname{div}(\eta h) \in \mathrm{L}^{2,q}_{<\frac{N}{2}-1}(\Omega)$ und somit wegen $\tau \geq -s$

$$\big(F - \operatorname{div}(\eta h), -\operatorname{rot}(\mu\eta h) \big) \in \big({}_0\mathrm{D}^q(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp \big) \times \big({}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+2}(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+2}(\Omega)^\perp \big) \qquad . \tag{6.14}$$

Die verallgemeinerte klassische Theorie aus Satz 6.10 sichert die Existenz einer Lösung

$$\Phi \in \mu^{-1} \mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{-1}(\Omega)$$

des Systems (6.12), (6.13).
Da $\eta h \in \mathrm{H}^{1,q+1}_{s-1}$ mit den Voraussetzungen $\eta h \in \mu^{-1} \mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)$ nach sich zieht, wäre der Beweis damit beendet, wenn wir noch zeigten, daß sich Φ dem Definitionsbereich von DIV_μ entsprechend zerlegen ließe. Mit $\operatorname{div} \Phi \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)$ liefern dies aber Lemma 6.21 und die Voraussetzungen an τ , falls wir z. B.

$$\operatorname{rot} \Phi \in \mathrm{L}^{2,q+2}_s\big(A(r_0)\big) \tag{6.15}$$

zeigen können.
Die Regularitätstheorie aus Korollar 3.8 (ii) liefert $\Phi \in \mathrm{H}^{1,q+1}_{-1}\big(A(r_0)\big)$, also $\operatorname{rot} \Phi \in \mathrm{L}^{2,q+2}\big(A(r_0)\big)$. Daher ist (6.15) nur für $s > 0$ zu zeigen. Wegen

$$\operatorname{rot} \Phi = -\operatorname{rot}(\hat{\mu}\Phi) - \operatorname{rot}(\mu\eta h) \in \mathrm{L}^{2,q+2}_{\min\{\tau, s+\tau\}}\big(A(r_0)\big) = \mathrm{L}^{2,q+2}_\tau\big(A(r_0)\big) \tag{6.16}$$

ist nur noch der Fall $0 < \tau < s$ zu untersuchen und in diesem liefert Lemma 6.21 (Wir nehmen o. B. d. A. $\tau \notin \mathbb{I}$ an!)

$$\Phi \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{\tau-1}(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^{q+1}_{\tau-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{\tau-1} \qquad .$$

Für $s > N/2$ und $N/2 \leq \tau < s$ bekommen wir $\Phi \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{<\frac{N}{2}-1}(\Omega)$ und mit (6.16) $\operatorname{rot}\Phi \in \mathrm{L}^{2,q+2}_{\frac{N}{2}}\big(A(r_0)\big)$, also $\Phi \in \mathrm{H}^{1,q+1}_{<\frac{N}{2}-1}\big(A(r_0)\big)$. Da $\tau > s - N/2$, liefert (6.16) $\operatorname{rot}\Phi \in \mathrm{L}^{2,q+2}_{s}\big(A(r_0)\big)$.

Im letzten Fall $\tau < \min\{s, N/2\}$ gilt $\eta\mathcal{D}^{q+1}_{\tau-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{\tau-1} = \{0\}$ und damit $\Phi \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{\tau-1}(\Omega)$. Wieder erhalten wir $\Phi \in \mathrm{H}^{1,q+1}_{\tau-1}\big(A(r_0)\big)$ und mit (6.16) $\operatorname{rot}\Phi \in \mathrm{L}^{2,q+2}_{\min\{2\tau,s+\tau\}}\big(A(r_0)\big)$. Nach endlich vielen Wiederholungen dieses Arguments gilt entweder $\ell\tau \geq s$ oder $\ell\tau \geq N/2$. Mit obigen Argumenten folgt schließlich $\operatorname{rot}\Phi \in \mathrm{L}^{2,q+2}_{s}\big(A(r_0)\big)$. ■

Korollar 6.27
Seien $1 - N/2 < s \notin \mathbb{I}$ und $\tau > \max\{0, s - N/2\}$ sowie $\tau \geq -s$. Dann gilt

$$\mu^{-1}D(\mathrm{DIV}_{\mu^{-1}}) = \Big(\big(\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mu^{-1}\mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}\Big) \cap {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) =: D({}_\mu\,\mathrm{DIV})$$

und

$$\begin{array}{rccccc} {}_\mu\,\mathrm{DIV} & : & D({}_\mu\,\mathrm{DIV}) & \longrightarrow & {}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp \\ & & H & \longmapsto & \operatorname{div}\mu H \end{array}$$

ist ein stetiger und surjektiver Fredholm–Operator mit Kern

$$N({}_\mu\,\mathrm{DIV}) = {}_\mu\mathcal{H}^{q+1}(\Omega) \qquad .$$

Beweis:
Die Behauptung folgt aus dem vorherigen Lemma, falls wir

$$\mu^{-1}D(\mathrm{DIV}_{\mu^{-1}}) = \Big(\big(\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mu^{-1}\mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}\Big) \cap {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

zeigen können. Mit den Voraussetzungen an τ ist das aber klar, denn

$$\mu^{-1}\big(\eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}\big) \subset \big(\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mu^{-1}\mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1} \qquad .$$

■

Entsprechend erhalten wir

Lemma 6.28
Seien $1 - N/2 < s \notin \mathbb{I}$ und $\tau > \max\{0, s - N/2\}$ sowie $\tau \geq -s$. Dann ist

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{ROT}_\varepsilon & : & \Big(\big(\mathring{\mathrm{R}}^q_{s-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{D}^q_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^q_{s-1}\Big) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \longrightarrow & {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^\perp \\ & & E & \longmapsto & \operatorname{rot} E \end{array}$$

ein stetiger und surjektiver Fredholm–Operator mit Kern

$$N(\mathrm{ROT}_\varepsilon) = {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) \qquad .$$

Beweis:
Analog zu den Beweisen der Lemmata 6.20 und 6.26. ■

Korollar 6.29
Seien $1 - N/2 < s \notin \mathbb{I}$ und $\tau > \max\{0, s - N/2\}$ sowie $\tau \geq -s$. Dann gilt

$$\varepsilon^{-1}D(\mathrm{ROT}_{\varepsilon^{-1}}) = \Big(\big(\varepsilon^{-1}\mathring{\mathrm{R}}^q_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{D}^q_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^q_{s-1}\Big) \cap {}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) =: D({}_\varepsilon\,\mathrm{ROT})$$

und

$$\begin{array}{rccccc} {}_\varepsilon\,\mathrm{ROT} & : & D({}_\varepsilon\,\mathrm{ROT}) & \longrightarrow & {}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^\perp \\ & & E & \longmapsto & \operatorname{rot}\varepsilon E \end{array}$$

ist ein stetiger und surjektiver Fredholm–Operator mit Kern

$$N({}_\varepsilon\,\mathrm{ROT}) = \varepsilon^{-1}{}_{\varepsilon^{-1}}\mathcal{H}^q(\Omega) \qquad .$$

Beweis:
Wie Korollar 6.27. ■

Bemerkung 6.30
Es seien die Voraussetzungen des Lemmas 6.26 erfüllt und zusätzlich $\tilde{\varepsilon}$ und $\tilde{\mu}$ zwei τ–konstante Transformationen. Dann läßt sich der Wertebereich von DIV_μ *bzw.* ROT_ε *auch durch*

$$
{}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap {}_{\tilde{\varepsilon}}\mathcal{H}^q(\Omega)^\perp \qquad \textit{bzw.} \qquad {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_s(\Omega) \cap {}_{\tilde{\mu}}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^{\perp_{\tilde{\mu}}}
$$

charakterisieren.

Beweis:
Die Wohldefiniertheit ist mit Lemma 6.25 klar. Im Beweis der Surjektivität von z. B. DIV_μ im Lemma 6.26 träte mit diesem Wertebereich nur an einer einzigen Stelle ein kleiner Unterschied auf. Hier würde (6.14) durch

$$
\big(F - \mathrm{div}(\eta h), -\mathrm{rot}(\mu\eta h)\big) \in \big({}_0\mathrm{D}^q(\Omega) \cap {}_{\tilde{\varepsilon}}\mathcal{H}^q(\Omega)^\perp\big) \times \big({}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+2}(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+2}(\Omega)^\perp\big)
$$

ersetzt werden. Nach Lemma 6.7 ist dies aber dieselbe Menge wie die in (6.14), nämlich unabhängig von $\tilde{\varepsilon}$

$$
\overline{\mathrm{div}\,\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)} \times \overline{\mathrm{rot}\,\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}(\Omega)} \qquad .
$$

Analog folgt die Aussage über ROT_ε . ■

Unser nächstes Ziel ist nun, die Wertebereiche der Operatoren aus den Lemmata 6.26 und 6.28 und den zugehörigen Korollaren verschieden zu charakterisieren und auf diverse Arten Injektivität zu erzwingen. Dazu wollen wir zunächst an die speziellen Formen aus Lemma 2.20

$$
\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega) = \big\{\overset{\circ}{b}{}^q_1, \ldots, \overset{\circ}{b}{}^q_{d_q}\big\} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{B}^q(\Omega) = \{b^q_1, \ldots, b^q_{d_q}\}
$$

erinnern und einige weitere Eigenschaften dieser beweisen.

Lemma 6.31
Es gelten

$$
{}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} = \{0\} \qquad \textit{und für } q \neq 1 \qquad {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) \cap \mathrm{B}^q(\Omega)^\perp = \{0\} \qquad .
$$

Die Orthogonalprojektionen der Formen aus $\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)$ *auf* ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)$ *in* ${}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega)$ *entlang* $\overline{\mathrm{rot}\,\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)}$ *bzgl. des* $\langle\varepsilon\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\Omega$*–Skalarproduktes bilden eine Basis der Dirichlet–Formen* ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)$ *.*
Ebenso bilden für $q \neq 1$ *die Orthogonalprojektionen der Formen aus* $\varepsilon^{-1}\,\mathrm{B}^q(\Omega)$ *auf* ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)$ *in* $\varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q(\Omega)$ *entlang* $\varepsilon^{-1}\overline{\mathrm{div}\,\mathbf{D}^{q+1}(\Omega)}$ *bzgl. des* $\langle\varepsilon\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\Omega$*–Skalarproduktes eine Basis der Dirichlet–Formen* ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)$ *.*
Die Abschlüsse werden stets in $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)$ *genommen.*

Beweis:
Wir zerlegen die Formen $\overset{\circ}{b}{}^q_\ell \in {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{\mathrm{vox}}(\Omega) \subset {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q(\Omega)$ gemäß Lemma 6.7 in

$$
\overset{\circ}{b}{}^q_\ell = \Phi_\ell + h_\ell \in \overline{\mathrm{rot}\,\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q-1}(\Omega)} \oplus_\varepsilon {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) \qquad , \qquad \ell = 1, \ldots, d_q \qquad .
$$

Dann ist $\{h_\ell : \ell = 1, \ldots, d_q\}$ eine Basis von ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)$, denn die Menge $\{h_\ell\}$ ist nach Lemma 2.20 linear unabhängig. Für ein $E \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon}$ folgt mit Lemma 6.25

$$
0 = \langle\varepsilon E, \overset{\circ}{b}{}^q_\ell\rangle_\Omega = \underbrace{\langle\varepsilon E, \Phi_\ell\rangle_\Omega}_{=0} + \langle\varepsilon E, h_\ell\rangle_\Omega \qquad ,
$$

also folgt $E = 0$. Analog zeigen wir die zweite Behauptung. ■

Lemma 6.32
Sei $s \in \mathbb{R}$. *Dann gelten mit Abschlüssen in* $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)$

$$\overline{\operatorname{div} \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)} \cup \overline{\operatorname{div} \mathbf{D}^{q+1}_s(\Omega)} \subset \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^\perp \qquad \textit{und für } q \neq 1 \qquad \overline{\operatorname{rot} \mathring{\mathrm{R}}^{q-1}_{s-1}(\Omega)} \cup \overline{\operatorname{rot} \mathring{\mathbf{R}}^{q-1}_s(\Omega)} \subset \mathrm{B}^q(\Omega)^\perp$$

sowie mit Abschlüssen in $\mathrm{L}^{2,q}(\Omega)$

$$\overline{\operatorname{div} \mathbf{D}^{q+1}(\Omega)} = {}_0\mathrm{D}^q(\Omega) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)^\perp = {}_0\mathrm{D}^q(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^\perp$$

und für $q \neq 1$

$$\overline{\operatorname{rot} \mathring{\mathbf{R}}^{q-1}(\Omega)} = {}_0\mathring{\mathrm{R}}^q(\Omega) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} = {}_0\mathring{\mathrm{R}}^q(\Omega) \cap \mathrm{B}^q(\Omega)^\perp \qquad .$$

Beweis:
Die ersten beiden Behauptungen sind trivial.
Lemma 6.7 liefert

$${}_0\mathrm{D}^q(\Omega) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)^\perp = \overline{\operatorname{div} \mathbf{D}^{q+1}(\Omega)} \subset {}_0\mathrm{D}^q(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^\perp \qquad ,$$

so daß nur noch die andere Inklusion zu zeigen ist. Zerlegen wir dazu ein $F \in {}_0\mathrm{D}^q(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^\perp$ nach Lemma 6.7 in

$$F = f + E \in \overline{\operatorname{div} \mathbf{D}^{q+1}(\Omega)} \oplus \mathcal{H}^q(\Omega) \qquad ,$$

so folgt $E = F - f \in \mathcal{H}^q(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^\perp = \{0\}$ nach Lemma 2.20 (i) und damit $F = f$.
Analog erhalten wir die vierte Behauptung. ■

Die Wertebereiche von DIV_μ und ROT_ε lassen sich auch mit Hilfe der Formen $\mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)$ und $\mathrm{B}^q(\Omega)$ charakterisieren. Dies liefert das

Korollar 6.33
Es seien die Voraussetzungen des Lemmas 6.26 erfüllt. Dann gelten

$${}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp = {}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)^\perp = {}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^\perp$$

und im Fall $q \neq 1$

$${}_0\mathring{\mathrm{R}}^q_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp = {}_0\mathring{\mathrm{R}}^q_s(\Omega) \cap {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} = {}_0\mathring{\mathrm{R}}^q_s(\Omega) \cap \mathrm{B}^q(\Omega)^\perp \qquad .$$

Beweis:
Die jeweils ersten Gleichheiten haben wir schon in Bemerkung 6.30 gezeigt. Zum Beweis der jeweils zweiten Gleichheiten können wir mit Lemma 6.32 die gleichen Argumente wie im Beweis zu Bemerkung 6.30 benutzen. Damit sind die obigen Mengen jeweils verschiedenen Charakterisierungen der Wertebereiche der Operatoren DIV_μ und ROT_ε. ■

6.3 Verallgemeinerte Elektro–Magneto–Statik

Satz 6.34
Seien $s \in (1-N/2,\infty)\setminus\mathbb{I}$, $\tau > \max\{0, s-N/2\}$, $\tau \geq -s$ *und desweiteren*

$$D(\mathcal{M}\mathrm{ax}^q_\varepsilon) := \big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{s-1}(\Omega)\cap\varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big)\oplus\eta\mathcal{D}^q_{s-1}\oplus\eta\mathcal{A}^q_{s-1}$$

sowie

$$D({}_\varepsilon\mathcal{M}\mathrm{ax}^q) := \big(\varepsilon^{-1}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{s-1}(\Omega)\cap\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big)\oplus\eta\mathcal{R}^q_{s-1}\oplus\eta\mathcal{A}^q_{s-1} = \varepsilon^{-1}D(\mathcal{M}\mathrm{ax}^q_{\varepsilon^{-1}}) \qquad .$$

Weiterhin seien d_q *stetige lineare Funktionale* φ^ℓ_ε *auf* $D(\mathcal{M}\mathrm{ax}^q_\varepsilon)$ *mit* ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)\cap\bigcap_{\ell=1}^{d_q}N(\varphi^\ell_\varepsilon)=\{0\}$ *gegeben.*

Dann sind

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{M}\mathrm{ax}^q_\varepsilon & : & D(\mathcal{M}\mathrm{ax}^q_\varepsilon) & \longrightarrow & W^q_s(\Omega) \\ & & E & \longmapsto & \big(\operatorname{div}\varepsilon E, \operatorname{rot} E, \varphi^1_\varepsilon(E),\dots,\varphi^{d_q}_\varepsilon(E)\big) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcccc} {}_\varepsilon\mathcal{M}\mathrm{ax}^q & : & D({}_\varepsilon\mathcal{M}\mathrm{ax}^q) & \longrightarrow & W^q_s(\Omega) \\ & & E & \longmapsto & \big(\operatorname{div} E, \operatorname{rot}\varepsilon E, \varphi^1_{\varepsilon^{-1}}(\varepsilon E),\dots,\varphi^{d_q}_{\varepsilon^{-1}}(\varepsilon E)\big) \end{array}$$

topologische Isomorphismen.
Hierbei sei

$$W^q_s(\Omega) := \big({}_0\mathrm{D}^{q-1}_s(\Omega)\cap\mathcal{H}^{q-1}(\Omega)^\perp\big)\times\big({}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_s(\Omega)\cap\mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^\perp\big)\times\mathbb{C}^{d_q} \qquad .$$

Bemerkung 6.35

(i) *Seien* $\nu\in\mathrm{V}^{q,0}_0(\Omega)$ *und* λ *eine* τ*–konstante Transformation auf* q*–Formen sowie* $\big\{{}_\theta h_\ell\big\}_{\ell=1}^{d_q}$ *zu* $\theta\in\{\varepsilon,\lambda\}$ *Basen von* ${}_\theta\mathcal{H}^q(\Omega)$ *. Dann sind für* $s > 2-N/2$ *z. B.*

$$\varphi^\ell_\varepsilon(E) := \langle\nu E, {}_\varepsilon h_\ell\rangle_\Omega \qquad , \qquad \varphi^\ell_\varepsilon(E) := \langle\varepsilon E, {}_\lambda h_\ell\rangle_\Omega \qquad \textit{oder} \qquad \varphi^\ell_\varepsilon(E) := \langle\lambda E, {}_\lambda h_\ell\rangle_\Omega$$

eine geeignete Wahl für φ^ℓ_ε *.*

(ii) *Desweiteren sind z. B.*

$$\varphi^\ell_\varepsilon(E) := \langle\varepsilon E, \overset{\circ}{b}{}^q_\ell\rangle_\Omega \qquad \textit{oder für } q\neq 1 \qquad \varphi^\ell_\varepsilon(E) := \langle E, b^q_\ell\rangle_\Omega$$

eine geeignete Wahl für φ^ℓ_ε *.*

(iii) *Mit Korollar 6.33 können wir die Wertebereiche der beiden obigen Operatoren verschieden darstellen.*

Beweis:
Mit Korollar 6.27 und Lemma 6.28 sehen wir, daß $\mathcal{M}\mathrm{ax}^q_\varepsilon$ stetig und wegen der Voraussetzungen injektiv ist. Nach dem Satz von der beschränkten Inversen ist $\mathcal{M}\mathrm{ax}^q_\varepsilon$ dann ein topologischer Isomorphismus, wenn wir seine Surjektivität nachweisen können. Seien dazu Daten

$$(f,G,\gamma)\in W^q_s(\Omega)$$

gegeben. Eine Kombination von Korollar 6.27 und Lemma 6.28 liefert ein $\hat{E}\in D(\mathcal{M}\mathrm{ax}^q_\varepsilon)$ mit $\operatorname{rot}\hat{E}=G$ und $\operatorname{div}\varepsilon\hat{E}=f$ und zu diesem $\hat{E}$ können wir noch beliebige Dirichlet–Formen aus ${}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega)$ addieren, ohne daran etwas zu ändern. Wegen der Voraussetzungen ist

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{d_q} \\ & & E & \longmapsto & \big(\varphi^1_\varepsilon(E),\dots,\varphi^{d_q}_\varepsilon(E)\big) \end{array}$$

ein topologischer Isomorphismus. Daher definiert

$$E := \hat{E} + \varphi^{-1}\Big(\gamma - \big(\varphi^1_\varepsilon(\hat{E}),\dots,\varphi^{d_q}_\varepsilon(\hat{E})\big)\Big)$$

die gesuchte Lösung zu $\mathcal{M}\mathrm{ax}^q_\varepsilon E = (f,G,\gamma)$.
Mit den Voraussetzungen an τ gilt ${}_\varepsilon\mathcal{M}\mathrm{ax}^q = \mathcal{M}\mathrm{ax}^q_{\varepsilon^{-1}}\varepsilon$. Daher ist auch dieser Operator ein topologischer Isomorphismus.

Für $s > 2 - N/2$ gilt $D(\mathcal{M}\mathrm{ax}^q_\varepsilon) \subset \mathrm{L}^{2,q}_{>1-\frac{N}{2}}(\Omega)$. Daher sind mit Lemma 6.22 und Bemerkung 6.23 die Skalarprodukte in Bemerkung 6.35 (i) wohldefiniert und eine geeignete Wahl. Die Kompaktheit der Träger der Formen $\mathring{b}^q_\ell$ und b^q_ℓ und Lemma 6.31 liefern dies auch für die Skalarprodukte in (ii). ■

Eigentlich sind wir an einer statischen Lösungstheorie für den Operator M interessiert. Desweiteren wollen wir den zugehörigen Lösungsoperator iterieren. Dabei werden wir die Turmformen des fünften Kapitels benötigen, von denen in der bisherigen Lösungstheorie nur die Erdgeschosse aufgetaucht sind. Deswegen werden die „iterierten Lösungen" mit wachsenden Türmen beliebig schlecht integrierbar. Da wir aber stets Dirichlet–Formen heraustesten müssen, macht es keinen Sinn, die Lösungstheorie weiter mit Orthogonalitätsforderungen bzgl. der Dirichlet–Formen zu formulieren. Wir sind also gezwungen, die Formen in $\mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)$ bzw. $\mathrm{B}^q(\Omega)$ zu nutzen, da diese kompakte Träger besitzen. Dadurch müssen wir allerdings auf die Behandlung des Falles $q = 0$ verzichten.
Von nun an wollen wir den globalen Voraussetzungen noch eine weitere hinzufügen und den Rang der Formen auf

$$q \neq 0$$

beschränken. Weiterhin führen wir die Bezeichnungen

$$\mathcal{F}^q_\varepsilon(\Omega) := \varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{G}^{q+1}_\mu(\Omega) := \mu^{-1}{}_0\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^{\perp_\mu} \tag{6.17}$$

und im Spezialfall der Identität

$$\mathcal{F}^q(\Omega) := \mathcal{F}^q_{\mathrm{Id}}(\Omega) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{G}^{q+1}(\Omega) := \mathcal{G}^{q+1}_{\mathrm{Id}}(\Omega)$$

sowie einen weiteren Wertebereich

$$\mathcal{W}^q_s(\Omega) := \big(\mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega) \cap \mathcal{F}^{q-1}(\Omega)\big) \times \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{G}^{q+1}(\Omega)\big) \times \mathbb{C}^{d_q}$$

ein. Damit können wir aus dem vorherigen Satz und der zugehörigen Bemerkung durch Spezialisierung unmittelbar folgern:

Satz 6.36
Seien $q \neq 0$, $s \in (1 - N/2, \infty) \setminus \mathbb{I}$ und $\tau > \max\{0, s - N/2\}$ sowie $\tau \geq -s$. Dann sind

$$\begin{array}{rcccc} \mathfrak{Max}_\varepsilon & : & D(\mathcal{M}\mathrm{ax}^q_\varepsilon) & \longrightarrow & \mathcal{W}^q_s(\Omega) \\ & & E & \longmapsto & \big(\operatorname{div}\varepsilon E, \operatorname{rot} E, \langle \varepsilon E, \mathring{b}^q_1\rangle_\Omega, \ldots, \langle \varepsilon E, \mathring{b}^q_{d_q}\rangle_\Omega\big) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcccc} {}_\mu\mathfrak{Max} & : & D({}_\mu\mathcal{M}\mathrm{ax}^{q+1}) & \longrightarrow & \mathcal{W}^{q+1}_s(\Omega) \\ & & H & \longmapsto & \big(\operatorname{div} H, \operatorname{rot}\mu H, \langle \mu H, b^{q+1}_1\rangle_\Omega, \ldots, \langle \mu H, b^{q+1}_{d_{q+1}}\rangle_\Omega\big) \end{array}$$

topologische Isomorphismen.

Kommen wir nun zum statischen Lösungsbegriff in der

Definition 6.37
Sei $q \neq 0$. Wir sagen, (E, H) löst das Problem

$$\mathrm{Max}(\Lambda, 0, f, F, G, g, \zeta, \xi)$$

zu Daten

$$(f, F, G, g) \in \mathrm{L}^{2,q-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \qquad \textit{und} \qquad (\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^{d_q} \times \mathbb{C}^{d_{q+1}} \qquad ,$$

falls

$$(E, H) \in \big(\mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{R}}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)\big) \times \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega) \cap \mu^{-1}\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\big)$$

und

- $\operatorname{rot} E = G \quad , \quad \operatorname{div}\varepsilon E = f \quad , \quad \langle \varepsilon E, \mathring{b}^q_\ell\rangle_\Omega = \zeta_\ell \quad , \quad \ell = 1, \ldots, d_q \quad ,$
- $\operatorname{div} H = F \quad , \quad \operatorname{rot}\mu H = g \quad , \quad \langle \mu H, b^{q+1}_\ell\rangle_\Omega = \xi_\ell \quad , \quad \ell = 1, \ldots, d_{q+1}$

gelten.

Satz 6.36 liefert sofort den

Satz 6.38
Seien $q \neq 0$ *und* $\tau \geq N/2 - 1$. *Dann existiert zu allen*

$$(f, G, \zeta) \in \big(\mathrm{L}^{2,q-1}_{>1-\frac{N}{2}}(\Omega) \cap \mathcal{F}^{q-1}(\Omega)\big) \times \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_{>1-\frac{N}{2}}(\Omega) \cap \mathcal{G}^{q+1}(\Omega)\big) \times \mathbb{C}^{d_q}$$

und allen

$$(F, g, \xi) \in \big(\mathrm{L}^{2,q}_{>1-\frac{N}{2}}(\Omega) \cap \mathcal{F}^{q}(\Omega)\big) \times \big(\mathrm{L}^{2,q+2}_{>1-\frac{N}{2}}(\Omega) \cap \mathcal{G}^{q+2}(\Omega)\big) \times \mathbb{C}^{d_{q+1}}$$

genau eine Lösung

$$(E, H) \in \big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^{q}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega)\big) \times \big(\mu^{-1}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega)\big)$$

des Problems $\mathrm{Max}(\Lambda, 0, f, F, G, g, \zeta, \xi)$ *und diese hängt stetig von den Daten ab.*

6.4 Iteration eines statischen Lösungsoperators

Wir wollen nun in diesem vorletzten Abschnitt dieses Kapitels eine weitere Generalvoraussetzung einführen und den Rang der Formen noch weiter auf

$$1 \leq q \leq N - 2$$

beschränken. Aus Satz 6.36 erhalten wir durch weitere Spezialisierung unmittelbar den

Satz 6.39
Seien $s \in (1 - N/2, \infty) \setminus \mathbb{I}$ *und* $\tau > \max\{0, s - N/2\}$ *sowie* $\tau \geq -s$. *Dann sind*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{ROT}_\varepsilon : & \Big(\big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q}_{s-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^{q}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{D}^{q}_{s-1}\Big) \cap \mathcal{F}^{q}_{\varepsilon}(\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{L}^{2,q+1}_{s}(\Omega) \cap \mathcal{G}^{q+1}(\Omega) \\ & E & \longmapsto & \operatorname{rot} E \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{DIV}_\mu : & \Big(\big(\mu^{-1}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1}\Big) \cap \mathcal{G}^{q+1}_{\mu}(\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{L}^{2,q}_{s}(\Omega) \cap \mathcal{F}^{q}(\Omega) \\ & H & \longmapsto & \operatorname{div} H \end{array}$$

topologische Isomorphismen.

Bemerkung 6.40
Man beachte, daß hier die Ausnahmeform $\eta\mathcal{A}^{1}_{s-1}$ *bzw.* $\eta\mathcal{A}^{N-1}_{s-1}$ *nicht mehr auftritt. Der Grund dafür ist die Zugehörigkeit von* $D(\mathcal{ROT}_\varepsilon)$ *zu* $\mathcal{F}^{q}_{\varepsilon}(\Omega)$ *bzw. diejenige von* $D(\mathcal{DIV}_\mu)$ *zu* $\mathcal{G}^{q+1}_{\mu}(\Omega)$. *Wegen der Beschränkung* $1 \leq q \leq N - 2$ *müssen wir dies für* $\mathcal{ROT}_\varepsilon$ *im Fall* $q = 1$ *und für* $\mathcal{DIV}_\mu$ *im Fall* $q = N - 2$ *zeigen. Den Beweis hierzu liefern wir in einem allgemeineren Zusammenhang in den Lemmata 6.53, 6.55 und den Bemerkungen 6.54, 6.56 nach.*

Aus diesen beiden Operatoren setzt sich ein statischer Maxwell–Lösungsoperator $\mathcal{L}_0$ mit

$$\mathcal{L}_0(F, G) := \big(\mathcal{ROT}_\varepsilon^{-1} G, \mathcal{DIV}_\mu^{-1} F\big) \tag{6.18}$$

für $(F, G) \in \big(\mathrm{L}^{2,q}_{s}(\Omega) \cap \mathcal{F}^{q}(\Omega)\big) \times \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_{s}(\Omega) \cap \mathcal{G}^{q+1}(\Omega)\big)$ zusammen, der unseren Zwecken genügen wird. Nach dem Vorbild der Arbeiten von Weck und Witsch, [50] und [53], wollen wir

$$\mathcal{L} := \Lambda\mathcal{L}_0 \tag{6.19}$$

mehrfach anwenden, um die Niederfrequenzasymptotik des zeitharmonischen Lösungsoperators $\mathcal{L}_\omega$ des Problems

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E, H) = (F, G) \qquad , \qquad \omega \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0\} \qquad ,$$

zu bestimmen, denn die Form dieser Differentialgleichung schlägt zur Approximation eine Neumannsche Reihe des zugehörigen statischen Lösungsoperators $\mathcal{L}$ vor.
Die Inversen

$$\mathcal{L}_{\mathrm{div}} := \mathcal{L}_{\mathrm{div},\mu} := \mu\mathcal{DIV}_\mu^{-1} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{rot}} := \mathcal{L}_{\mathrm{rot},\varepsilon} := \varepsilon\mathcal{ROT}_\varepsilon^{-1} \tag{6.20}$$

haben schon wechselseitig verwandte Definitions– und Wertebereiche

$$\mathrm{L}^{2,q}_{t}(\Omega) \cap \mathcal{F}^{q}(\Omega) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{L}^{2,q+1}_{t}(\Omega) \cap \mathcal{G}^{q+1}(\Omega) \qquad ,$$

so daß wir hoffen, $\mathcal{L}_{\mathrm{rot}}\mathcal{L}_{\mathrm{div}}$ und $\mathcal{L}_{\mathrm{div}}\mathcal{L}_{\mathrm{rot}}$ bilden zu können. Allerdings ist es dazu nötig, $\mathcal{L}_{\mathrm{div}}$ und $\mathcal{L}_{\mathrm{rot}}$ so zu verallgemeinern, daß sie auch auf Turmformen angewandt werden können.
Hierzu führen wir die folgende Schreibweise ein:

- $\hat{\mathfrak{I}} := \big\{(k,\sigma,m,\theta) : (k,\sigma) \in \mathbb{N}_0^2 \wedge m \in \{1,\dots,\mu_\sigma^{q,k}\} \wedge \theta \in \{+,-\}\big\}$ (6.21)
- $\hat{\mathfrak{J}} := \big\{(\ell,\gamma,n,\vartheta) : (\ell,\gamma) \in \mathbb{N}_0^2 \wedge n \in \{1,\dots,\mu_\gamma^{q,\ell+1}\} \wedge \vartheta \in \{+,-\}\big\}$ (6.22)

Zu $I = (k,\sigma,m,\theta) \in \hat{\mathfrak{I}}$ sei $D_I^q := {}^\theta D_{\sigma,m}^{q,k}$ und entsprechend $R_J^{q+1} := {}^\vartheta R_{\gamma,n}^{q+1,\ell}$, falls $J = (\ell,\gamma,n,\vartheta) \in \hat{\mathfrak{J}}$.
Für endliche Teilmengen $\mathfrak{I}$ bzw. $\mathfrak{J}$ der Indexmenge $\hat{\mathfrak{I}}$ bzw. $\hat{\mathfrak{J}}$ sei

$$\eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}) := \mathrm{Lin}\{\eta D_I^q : I \in \mathfrak{I}\} \qquad \text{bzw.} \qquad \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}) := \mathrm{Lin}\{\eta R_J^{q+1} : J \in \mathfrak{J}\} \qquad .$$

Desweiteren wollen wir für $s \in \mathbb{R}$ und $K, L \in \mathbb{N}_0$ spezielle Indexmengen

$$\mathfrak{I}_s^k := \big\{(k,\sigma,m,-) \in \hat{\mathfrak{I}} : \eta^- D_{\sigma,m}^{q,k} \notin \mathrm{L}_s^{2,q}(\Omega)\big\} \qquad , \qquad \mathfrak{I}_s^{\leq K} := \bigcup_{k=0}^{K} \mathfrak{I}_s^k$$

bzw.

$$\mathfrak{J}_s^\ell := \big\{(\ell,\gamma,n,-) \in \hat{\mathfrak{J}} : \eta^- R_{\gamma,n}^{q+1,\ell} \notin \mathrm{L}_s^{2,q+1}(\Omega)\big\} \qquad , \qquad \mathfrak{J}_s^{\leq L} := \bigcup_{\ell=0}^{L} \mathfrak{J}_s^\ell$$

definieren. Mit Bemerkung 5.24 lassen sich diese Indexmengen näher durch

- $\mathfrak{I}_s^{\leq K} = \big\{(k,\sigma,m,-) \in \hat{\mathfrak{I}} : k \leq K \wedge \sigma \leq s + k - N/2\big\}$, (6.23)
- $\mathfrak{J}_s^{\leq L} = \big\{(\ell,\gamma,n,-) \in \hat{\mathfrak{J}} : \ell \leq L \wedge \gamma \leq s + \ell - N/2\big\}$ (6.24)

angeben. Erinnern wir an Definition 5.23 und Bemerkung 5.24, erhalten wir

$$\eta\mathcal{D}^q\big(\mathfrak{I}_s^{\leq K}\big) = \eta^-\mathcal{D}_{s-\frac{N}{2}}^{q,\leq K} \qquad \text{bzw.} \qquad \eta\mathcal{R}^{q+1}\big(\mathfrak{J}_s^{\leq L}\big) = \eta^-\mathcal{R}_{s-\frac{N}{2}}^{q+1,\leq L} \qquad . \tag{6.25}$$

Mit dem Verweis auf Definition 6.15 und Bemerkung 6.16 stellen wir außerdem

$$\eta\mathcal{D}^q\big(\mathfrak{I}_s^0\big) = \eta\mathcal{D}_s^q \qquad \text{bzw.} \qquad \eta\mathcal{R}^{q+1}\big(\mathfrak{J}_s^0\big) = \eta\mathcal{R}_s^{q+1} \tag{6.26}$$

fest. Für $I := (k,\sigma,m,\theta) \in \hat{\mathfrak{I}}$ bzw. $J := (\ell,\gamma,n,\vartheta) \in \hat{\mathfrak{J}}$ sei

$$I_+ := (k+1,\sigma,m,\theta) \in \hat{\mathfrak{J}} \qquad \text{bzw.} \qquad J_+ := (\ell+1,\gamma,n,\vartheta) \in \hat{\mathfrak{I}}$$

und weiterhin für Teilmengen $\mathfrak{I}$ bzw. $\mathfrak{J}$ von $\hat{\mathfrak{I}}$ bzw. $\hat{\mathfrak{J}}$

$$\mathfrak{I}_+ := \{I_+ : I \in \mathfrak{I}\} \subset \hat{\mathfrak{J}} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{J}_+ := \{J_+ : J \in \mathfrak{J}\} \subset \hat{\mathfrak{I}} \qquad .$$

Außerdem wollen wir den „Homogenitätsgrad” eines Index $I := (k,\sigma,m,\theta) \in \hat{\mathfrak{I}} \cup \hat{\mathfrak{J}}$ durch

$$\mathrm{h}_I := {}^\theta\mathrm{h}_\sigma^k \qquad \text{und durch} \qquad \mathrm{h}_{\mathfrak{I}} := \max_{I \in \mathfrak{I}} \mathrm{h}_I \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{h}_\emptyset := -\infty$$

den „maximalen Homogenitätsgrad” einer Indexmenge $\mathfrak{I} \subset \hat{\mathfrak{I}} \cup \hat{\mathfrak{J}}$ festlegen. Mit diesen Schreibweisen können wir nun Satz 6.39 verallgemeinern.

Lemma 6.41
Seien $s \in (1-N/2,\infty) \setminus \mathbb{I}$ und $\emptyset \neq \mathcal{I}$ eine endliche Teilmenge von $\hat{\mathcal{I}}$ mit maximalem Homogenitätsgrad $\mathrm{h}_{\mathcal{I}}$, so daß

$$\eta\mathcal{D}^q(\mathcal{I}) \cap \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) = \{0\} \qquad .$$

Weiterhin sei $\tau > \max\{0, s-N/2, s+N/2+\mathrm{h}_{\mathcal{I}}\}$ und $\tau \geq -s$.
Dann gibt es zu jeder Form $F \in \big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathcal{I})\big) \cap \mathcal{F}^q(\Omega)$ der Gestalt

$$F = F_s + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_I \qquad \textit{mit} \qquad F_s \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \qquad \textit{und} \qquad \mathtt{f}_I \in \mathbb{C}$$

genau ein

$$H \in \Big(\big(\mu^{-1}\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{I}_+)\Big) \cap \mathcal{G}^{q+1}_\mu(\Omega)$$

mit

$$\operatorname{div} H = F \qquad .$$

Für $t < \min\{N/2, -1-N/2-\mathrm{h}_{\mathcal{I}}\}$ und $t \leq s-1$ liegt dieses H in $\mathrm{L}^{2,q+1}_t(\Omega)$ und hat die Form

$$H = H_{s-1} + \sum_{J\in\mathcal{J}^0_{s-1}} \mathtt{g}_J \cdot \eta R^{q+1}_J + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R^{q+1}_{I_+}$$

mit $H_{s-1} \in \mu^{-1}\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)$ und $\mathtt{g}_J \in \mathbb{C}$. Desweiteren bildet der hierdurch definierte Lösungsoperator $\big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathcal{I})\big) \cap \mathcal{F}^q(\Omega)$ stetig nach $\mathrm{L}^{2,q+1}_t(\Omega)$ ab.

Bemerkung 6.42
Mit den obigen Bezeichnungen und wegen der Voraussetzungen an die Abklingrate τ erhalten wir

$$\hat{H} := \mu H \in \Big(\big(\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mu\mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{I}_+)\Big) \cap \mathcal{G}^{q+1}(\Omega)$$

mit $\operatorname{div}\mu^{-1}\hat{H} = F$. Dieses $\hat{H}$ hat die Gestalt

$$\hat{H} = \hat{H}_{s-1} + \sum_{J\in\mathcal{J}^0_{s-1}} \mathtt{g}_J \cdot \eta R^{q+1}_J + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R^{q+1}_{I_+}$$

mit $\hat{H}_{s-1} = \mu H_{s-1} + \sum_{J\in\mathcal{J}^0_{s-1}} \mathtt{g}_J \cdot \hat{\mu}\,\eta R^{q+1}_J + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \hat{\mu}\,\eta R^{q+1}_{I_+} \in \mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mu\mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)$.

Beweis:
Sei $F = F_s + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_I \in \big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathcal{I})\big) \cap \mathcal{F}^q(\Omega) = \big(\mathrm{D}^q_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathcal{I})\big) \cap \mathcal{F}^q(\Omega)$. Wegen der Grundvoraussetzung (ii) auf Seite 83 stehen Formen, die einem Faktor η enthalten, immer auf $\mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)$ bzw. $\mathrm{B}^{q+1}(\Omega)$ senkrecht. Insbesondere folgt $\eta D^q_I, F_s \in \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^\perp$. Mit dem Ansatz

$$H := h + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R^{q+1}_{I_+} \qquad ,$$

der wegen der Eigenschaft (5.20), d. h. $\operatorname{div} R^{q+1}_{I_+} = D^q_I$, der Turmformen geeignet erscheint, übersetzt sich das System $H \in \mathcal{G}^{q+1}_\mu(\Omega)$ und $\operatorname{div} H = F$ in das folgende:

- $\operatorname{div} h = F - \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \operatorname{div}(\eta R^{q+1}_{I_+}) = F_s - \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot C_{\operatorname{div},\eta} R^{q+1}_{I_+} =: f \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \cap \mathcal{F}^q(\Omega)$
- $\operatorname{rot}\mu h = -\sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \operatorname{rot}(\mu\,\eta R^{q+1}_{I_+}) =: g \in \mathcal{G}^{q+2}(\Omega)$
- $\mu h \in \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^\perp$

Die letzte Bedingung folgt aus $\mu\,\eta R^{q+1}_{I_+} \in \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^\perp$. Bemerkung 5.24 liefert für alle $I \in \mathcal{I}$

$$\operatorname{rot}(\mu\,\eta R^{q+1}_{I_+}) = C_{\operatorname{rot},\eta} R^{q+1}_{I_+} + \operatorname{rot}(\hat{\mu}\,\eta R^{q+1}_{I_+}) \in \mathrm{L}^{2,q+2}_{<-\frac{N}{2}-\mathrm{h}_I+\tau}(\Omega) \subset \mathrm{L}^{2,q+2}_s(\Omega) \qquad ,$$

da $\tau > s + N/2 + \mathrm{h}_{\mathfrak{J}} \geq s + N/2 + \mathrm{h}_I$. Wir erhalten folglich $g \in \mathrm{L}^{2,q+2}_s(\Omega) \cap \mathcal{G}^{q+2}(\Omega)$. Nach Satz 6.36 wird das obige System von

$$h := {}_\mu\mathfrak{Max}^{-1}(f, g, 0) \in \big(\mu^{-1}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1}$$

gelöst. Damit ist die Lösung $\big($Man beachte $\eta\mathcal{R}^{q+1}_{s-1} = \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{I}^0_{s-1})\,!\big)$

$$H = h + \sum_{I \in \mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R^{q+1}_{I_+} \in \Big(\big(\mu^{-1}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{I}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{A}^{q+1}_{s-1} \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{I}_+)\Big) \cap \mathcal{G}^{q+1}_\mu(\Omega)$$

gefunden und diese ist aufgrund ihrer speziellen Gestalt eindeutig. Da $H \in \mathcal{G}^{q+1}_\mu(\Omega)$, zeigen wieder Lemma 6.53 und Bemerkung 6.54, daß die Ausnahmeform ηA^{N-1}_{s-1} im Fall $q = N-2$ nicht auftritt. ■

Ganz entsprechend erhält man das

Lemma 6.43
Seien $s \in (1 - N/2, \infty) \setminus \mathbb{I}$ und $\emptyset \neq \mathfrak{J}$ eine endliche Teilmenge von $\hat{\mathfrak{J}}$ mit maximalem Homogenitätsgrad $\mathrm{h}_{\mathfrak{J}}$, so daß

$$\eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}) \cap \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) = \{0\} \qquad .$$

Weiterhin sei $\tau > \max\{0, s - N/2, s + N/2 + \mathrm{h}_{\mathfrak{J}}\}$ und $\tau \geq -s$.
Dann gibt es zu jeder Form $G \in \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J})\big) \cap \mathcal{G}^{q+1}(\Omega)$ der Gestalt

$$G = G_s + \sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta R^{q+1}_J \qquad \textit{mit} \qquad G_s \in \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \qquad \textit{und} \qquad \mathtt{g}_J \in \mathbb{C}$$

genau ein

$$E \in \Big(\big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{s-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{J}_+)\Big) \cap \mathcal{F}^q_\varepsilon(\Omega)$$

mit

$$\operatorname{rot} E = G \qquad .$$

Für $t < \min\{N/2, -1 - N/2 - \mathrm{h}_{\mathfrak{J}}\}$ und $t \leq s-1$ liegt dieses E in $\mathrm{L}^{2,q}_t(\Omega)$ und hat die Form

$$E = E_{s-1} + \sum_{I \in \mathfrak{I}^0_{s-1}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_I + \sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta D^q_{J_+}$$

mit $E_{s-1} \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{s-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)$ und $\mathtt{f}_I \in \mathbb{C}$. Desweiteren bildet der hierdurch definierte Lösungsoperator $\big(\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J})\big) \cap \mathcal{G}^{q+1}(\Omega)$ stetig nach $\mathrm{L}^{2,q}_t(\Omega)$ ab.

Bemerkung 6.44
Mit den obigen Bezeichnungen und den Voraussetzungen an τ erhalten wir

$$\hat{E} := \varepsilon E \in \Big(\big(\varepsilon\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{J}_+)\Big) \cap \mathcal{F}^q(\Omega)$$

mit $\operatorname{rot}\varepsilon^{-1}\hat{E} = G$. Dieses $\hat{E}$ hat die Gestalt

$$\hat{E} = \hat{E}_{s-1} + \sum_{I \in \mathfrak{I}^0_{s-1}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_I + \sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta D^q_{J_+}$$

mit $\hat{E}_{s-1} = \varepsilon E_{s-1} + \sum_{I \in \mathfrak{I}^0_{s-1}} \mathtt{f}_I \cdot \hat{\varepsilon}\,\eta D^q_I + \sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \hat{\varepsilon}\,\eta D^q_{J_+} \in \varepsilon\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\,.$

Wir definieren für endliche Teilmengen $\mathfrak{I}$ bzw. $\mathfrak{J}$ von $\hat{\mathfrak{I}}$ bzw. $\hat{\mathfrak{J}}$

$$\mathbf{F}^q_s(\mathfrak{I}) := \big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I})\big) \cap \mathcal{F}^q(\Omega) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{G}^{q+1}_s(\mathfrak{J}) := \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J})\big) \cap \mathcal{G}^{q+1}(\Omega) \quad . \tag{6.27}$$

Die vorherigen beiden Lemmata und Bemerkungen liefern eine Lösungstheorie für ein verallgemeinertes statisches Maxwell–Problem.

Definition 6.45
Seien $s \in (1-N/2,\infty) \setminus \mathbb{I}$ und $\emptyset \neq \mathfrak{I}$ eine endliche Teilmenge von $\hat{\mathfrak{I}}$ sowie $\emptyset \neq \mathfrak{J}$ eine endliche Teilmenge von $\hat{\mathfrak{J}}$, so daß
$$\eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}) \cap \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) = \{0\} \qquad \textit{und} \qquad \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}) \cap \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) = \{0\} \qquad .$$
Desweiteren sei $\tau > \max\{0, s-N/2, s+N/2+\mathrm{h}_{\mathfrak{I}}, s+N/2+\mathrm{h}_{\mathfrak{J}}\}$ und $\tau \geq -s$.
Wir sagen, daß (E,H) das „verallgemeinerte statische Maxwell–Problem" zu Daten
$$(F,G) \in \mathbf{F}^q_s(\mathfrak{I}) \times \mathbf{G}^{q+1}_s(\mathfrak{J})$$
löst, wenn

$$\textbf{(i)} \qquad E \in \Big(\big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{s-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{J}_+) \Big) \cap \mathcal{F}^q_\varepsilon(\Omega) \qquad ,$$
$$H \in \Big(\big(\mu^{-1}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{I}_+) \Big) \cap \mathcal{G}^{q+1}_\mu(\Omega) \qquad ,$$
$$\textbf{(ii)} \qquad \operatorname{rot} E = G \qquad , \qquad \operatorname{div} H = F$$

gelten.

Satz 6.46
Das verallgemeinerte statische Maxwell–Problem ist stets eindeutig lösbar. Die hierdurch definierten Abbildungen $(F,G) \longrightarrow (E,H)$ und $(F,G) \longrightarrow \Lambda(E,H) = (\varepsilon E, \mu H)$ liefern zwei stetige lineare Operatoren
$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{L}_0 & : & \mathbf{F}^q_s(\mathfrak{I}) \times \mathbf{G}^{q+1}_s(\mathfrak{J}) & \longrightarrow & \varepsilon^{-1}\mathbf{F}^q_{s-1}(\mathfrak{I}^0_{s-1} \cup \mathfrak{J}_+) \times \mu^{-1}\mathbf{G}^{q+1}_{s-1}(\mathfrak{J}^0_{s-1} \cup \mathfrak{I}_+) \\ & & (F,G) & \longmapsto & (E,H) \end{array}$$
und
$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{L} := \Lambda\mathcal{L}_0 & : & \mathbf{F}^q_s(\mathfrak{I}) \times \mathbf{G}^{q+1}_s(\mathfrak{J}) & \longrightarrow & \mathbf{F}^q_{s-1}(\mathfrak{I}^0_{s-1} \cup \mathfrak{J}_+) \times \mathbf{G}^{q+1}_{s-1}(\mathfrak{J}^0_{s-1} \cup \mathfrak{I}_+) \\ & & (F,G) & \longmapsto & \Lambda(E,H) \end{array} \qquad .$$

Bemerkung 6.47
Die „Turmanteile" der verallgemeinerten statischen Maxwell–Operatoren kann man genauer beschreiben. Für
$$F = F_s + \sum_{I \in \mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_I \qquad \textit{und} \qquad G = G_s + \sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta R^{q+1}_J$$
hat z. B. die Lösung $(E,H) = \mathcal{L}(F,G)$ die Form
$$E = E_{s-1} + \hat{E} + \sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta D^q_{J_+} \qquad \textit{und} \qquad H = H_{s-1} + \hat{H} + \sum_{I \in \mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R^{q+1}_{I_+}$$
mit $(E_{s-1}, H_{s-1}) \in \mathrm{L}^{2,q}_{s-1}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{s-1}(\Omega)$ und $(\hat{E},\hat{H}) \in \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}^0_{s-1}) \times \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}^0_{s-1})$.

In der in Satz 6.46 vorliegenden Form kann $\mathcal{L}$ nun iteriert werden. Wegen der „Nebendiagonalform" des statischen Maxwell–Operators ist es notwendig, das Ergebnis für gerade und ungerade Potenzen von $\mathcal{L}$ zu unterscheiden. Dazu müssen wir eine weitere Schreibweise einführen:
Für $j \in \mathbb{N}_0$ und $I := (k,\sigma,m,\theta) \in \hat{\mathfrak{I}}$ bzw. $J := (\ell,\gamma,n,\vartheta) \in \hat{\mathfrak{J}}$ sei
$$I_j := (k+j,\sigma,m,\theta) \qquad \text{bzw.} \qquad J_j := (\ell+j,\gamma,n,\vartheta)$$
und weiterhin für Teilmengen $\mathfrak{I}$ bzw. $\mathfrak{J}$ von $\hat{\mathfrak{I}}$ bzw. $\hat{\mathfrak{J}}$
$$\mathfrak{I}_j := \{I_j : I \in \mathfrak{I}\} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{J}_j := \{J_j : J \in \mathfrak{J}\} \qquad .$$
Für gerade j gelten dann $I_j \in \hat{\mathfrak{I}}$ bzw. $J_j \in \hat{\mathfrak{J}}$ und $\mathfrak{I}_j \subset \hat{\mathfrak{I}}$ bzw. $\mathfrak{J}_j \subset \hat{\mathfrak{J}}$, hingegen $I_j \in \hat{\mathfrak{J}}$ bzw. $J_j \in \hat{\mathfrak{I}}$ und $\mathfrak{I}_j \subset \hat{\mathfrak{J}}$ bzw. $\mathfrak{J}_j \subset \hat{\mathfrak{I}}$ für ungerade j.

Satz 6.48
Seien $j \in \mathbb{N}$, $s \in (j - N/2, \infty) \setminus \mathbb{I}$ *und* $\mathfrak{I} \times \mathfrak{J}$ *eine endliche Teilmenge von* $\hat{\mathfrak{I}} \times \hat{\mathfrak{J}}$ *, so daß*

$$\eta \mathcal{D}^q(\mathfrak{I}) \cap \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) = \{0\} \qquad \textit{und} \qquad \eta \mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}) \cap \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) = \{0\} \qquad .$$

Desweiteren sei

$$\tau > \max\{0, s - N/2\} \qquad \textit{und} \qquad \tau \geq j - 1 - s$$

sowie $\tau > s + N/2 + \mathrm{h}_{\mathfrak{I}}$ *, falls* $\mathfrak{I} \neq \emptyset$ *, und* $\tau > s + N/2 + \mathrm{h}_{\mathfrak{J}}$ *, falls* $\mathfrak{J} \neq \emptyset$ *.*
Dann ist

$$\mathcal{L}^j : \mathbf{F}^q_s(\mathfrak{I}) \times \mathbf{G}^{q+1}_s(\mathfrak{J}) \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{F}^q_{s-j}(\mathfrak{I}^{\leq j-1}_{s-j} \cup \mathfrak{I}_j) \times \mathbf{G}^{q+1}_{s-j}(\mathfrak{J}^{\leq j-1}_{s-j} \cup \mathfrak{J}_j) & \textit{, falls } j \textit{ gerade} \\ \mathbf{F}^q_{s-j}(\mathfrak{I}^{\leq j-1}_{s-j} \cup \mathfrak{J}_j) \times \mathbf{G}^{q+1}_{s-j}(\mathfrak{J}^{\leq j-1}_{s-j} \cup \mathfrak{I}_j) & \textit{, falls } j \textit{ ungerade} \end{cases}$$

wohldefiniert und ein stetiger linearer Operator, dessen Wertebereich in $\mathrm{L}^{2,q}_t(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_t(\Omega)$ *mit*

$$t \leq s - j \qquad \textit{und} \qquad t < N/2 - j + 1 \qquad \textit{sowie} \qquad t < -j - N/2 - \max\{\mathrm{h}_{\mathfrak{I}}, \mathrm{h}_{\mathfrak{J}}\} \qquad \textit{, falls } \mathfrak{I} \cup \mathfrak{J} \neq \emptyset \textit{,}$$

liegt.

Bemerkung 6.49
Auch bei höheren Potenzen $\mathcal{L}^j$ *von* $\mathcal{L}$ *ist nach Bemerkung 6.47 klar, wie die Turmformenkomponenten auf Turmformenkomponenten abgebildet werden. Weiterhin zeigt diese Bemerkung, daß die neu hinzukommenden Turmformen aus* $\eta \mathcal{D}^q(\mathfrak{I}^{\leq j-1}_{s-j})$ *und* $\eta \mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}^{\leq j-1}_{s-j})$ *der folgenden Rekursion genügen:*
(F, G) *besitze die Gestalt aus Bemerkung 6.47. Hat* $(E, H) := \mathcal{L}^j(F, G)$ *die Gestalt*

$$(E, H) = (E_{s-j}, H_{s-j}) + \Big(\sum_{I \in \mathfrak{I}^{\leq j-1}_{s-j}} e_I \cdot \eta D^q_I, \sum_{J \in \mathfrak{J}^{\leq j-1}_{s-j}} h_J \cdot \eta R^{q+1}_J \Big)$$
$$+ \begin{cases} \Big(\sum_{I \in \mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_{I_j}, \sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta R^{q+1}_{J_j} \Big) & \textit{, falls } j \textit{ gerade} \\ \Big(\sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta D^q_{J_j}, \sum_{I \in \mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R^{q+1}_{I_j} \Big) & \textit{, falls } j \textit{ ungerade} \end{cases}$$

mit $(E_{s-j}, H_{s-j}) \in \mathrm{L}^{2,q}_{s-j}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{s-j}(\Omega)$ *, so besitzt* $(\tilde{E}, \tilde{H}) := \mathcal{L}(E, H) = \mathcal{L}^{j+1}(F, G)$ *die Form*

$$(\tilde{E}, \tilde{H}) = (\tilde{E}_{s-j-1}, \tilde{H}_{s-j-1}) + \Big(\sum_{I \in \mathfrak{I}^{\leq j}_{s-j-1}} \tilde{e}_I \cdot \eta D^q_I, \sum_{J \in \mathfrak{J}^{\leq j}_{s-j-1}} \tilde{h}_J \cdot \eta R^{q+1}_J \Big)$$
$$+ \begin{cases} \Big(\sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta D^q_{J_{j+1}}, \sum_{I \in \mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R^{q+1}_{I_{j+1}} \Big) & \textit{, falls } j \textit{ gerade} \\ \Big(\sum_{I \in \mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_{I_{j+1}}, \sum_{J \in \mathfrak{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta R^{q+1}_{J_{j+1}} \Big) & \textit{, falls } j \textit{ ungerade} \end{cases}$$

mit $(\tilde{E}_{s-j-1}, \tilde{H}_{s-j-1}) \in \mathrm{L}^{2,q}_{s-j-1}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{s-j-1}(\Omega)$ *. Hierbei gelten für* $I \in \mathfrak{I}^{\leq j-1}_{s-j}$ *und* $J \in \mathfrak{J}^{\leq j-1}_{s-j}$

$$e_I = \tilde{h}_{I_+} \qquad \textit{und} \qquad h_J = \tilde{e}_{J_+} \qquad .$$

Wir wollen einen Spezialfall des letzten Satzes, $\mathfrak{I} = \mathfrak{J} = \emptyset$, noch extra notieren:

Korollar 6.50
Seien $j \in \mathbb{N}$, $s \in (j - N/2, \infty) \setminus \mathbb{I}$, $t \leq s - j$, $t < N/2 - j + 1$ *und* $\tau > \max\{0, s - N/2\}$ *sowie* $\tau \geq j - 1 - s$ *.*
Dann ist

$$\mathcal{L}^j : \mathbf{F}^q_s(\emptyset) \times \mathbf{G}^{q+1}_s(\emptyset) \longrightarrow \mathbf{F}^q_{s-j}(\mathfrak{I}^{\leq j-1}_{s-j}) \times \mathbf{G}^{q+1}_{s-j}(\mathfrak{J}^{\leq j-1}_{s-j})$$

ein stetiger linearer Operator, dessen Wertebereich in $\mathrm{L}^{2,q}_t(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_t(\Omega)$ *liegt.*

6.5 Statische Operatoren zweiter Ordnung

In diesem letzten Abschnitt wollen wir wieder alle $q \in \{0, \dots, N-1\}$ zulassen und N dürfte in den ersten beiden Lemmata auch gerade sein.
Es bleibt noch zu zeigen, daß in den Ausnahmefällen des Satzes 6.39 sowie der Lemmata 6.41 und 6.43 die Ausnahmeform ηA^1_{s-1} bzw. ηA^{N-1}_{s-1} nicht auftritt. Zu diesem Zweck definieren wir (vgl. mit Definition 6.15 und Bemerkung 6.16)

- $$\tilde{\mathcal{D}}^q_s := {}^-\mathcal{D}^{q,\leq 1}_{s-\frac{N}{2}} \dotplus \begin{cases} {}^-\mathcal{D}^{0,2}_{0,1} & \text{, falls } q = 0 \wedge s \geq N/2 - 2 \\ {}^-\mathcal{R}^{1,1}_{0,1} & \text{, falls } q = 1 \wedge s \geq N/2 - 1 \\ \{0\} & \text{, sonst} \end{cases} \quad ,$$
- $$\tilde{\mathcal{R}}^{q+1}_s := {}^-\mathcal{R}^{q+1,\leq 1}_{s-\frac{N}{2}} \dotplus \begin{cases} {}^-\mathcal{R}^{N,2}_{0,1} & \text{, falls } q = N-1 \wedge s \geq N/2 - 2 \\ {}^-\mathcal{D}^{N-1,1}_{0,1} & \text{, falls } q = N-2 \wedge s \geq N/2 - 1 \\ \{0\} & \text{, sonst} \end{cases}$$

und beweisen

Lemma 6.51
Seien $s \in [1, \infty) \setminus \mathbb{I}$ und $\tau > \max\{0, s - N/2\}$. Dann ist

$$\begin{array}{cccccc} \Delta_{\text{div}} & : & \left(\mathrm{X}^q_{s-2}(\Omega) \oplus \eta\tilde{\mathcal{D}}^q_{s-2}\right) \cap {}_0\mathrm{D}^q_{\text{loc}}(\Omega) & \longrightarrow & {}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp \\ & & E & \longmapsto & \operatorname{div} \mu^{-1} \operatorname{rot} E \end{array}$$

ein stetiger und surjektiver Fredholm–Operator mit Kern $N(\Delta_{\text{div}}) = \mathcal{H}^q(\Omega)$.
Hierbei sei $\mathrm{X}^q_s(\Omega) := \left\{E \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_s(\Omega) \cap \mathrm{D}^q_s(\Omega) : \mu^{-1} \operatorname{rot} E \in \mathrm{D}^{q+1}_{s+1}(\Omega)\right\}$.

Beweis:
Der Beweis erfolgt analog zu den Beweisen der Lemmata 6.19 und 6.20 bzw. 6.26 und 6.28, daher werden wir viele Argumente abkürzen.
Ein $E \in \tilde{\mathcal{D}}^q_{s-2}$ erfüllt

$$\operatorname{div} E = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} E = 0 \qquad .$$

Zusammen mit den Voraussetzungen an τ liefert dies die Wohldefiniertheit von Δ_{div} . Natürlich ist Δ_{div} linear und stetig. Mit Lemma 6.18 ist $\mathcal{H}^q(\Omega) \subset N(\Delta_{\text{div}})$ und für ein $E \in N(\Delta_{\text{div}}) \subset \mathrm{X}^q_{-1}(\Omega)$ haben wir andererseits mit Lemma 4.23

$$0 = \langle \operatorname{div} \underbrace{\mu^{-1} \operatorname{rot} E}_{\in \mathrm{D}^{q+1}(\Omega)}, E \rangle_\Omega = -\langle \mu^{-1} \operatorname{rot} E, \operatorname{rot} E \rangle_\Omega \qquad ,$$

d. h. $E \in \mathcal{H}^q_{-1}(\Omega) = \mathcal{H}^q(\Omega)$, also $\mathcal{H}^q(\Omega) = N(\Delta_{\text{div}})$. Bleibt noch die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu

$$F \in {}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp$$

und $\hat{F}$ seine Nullfortsetzung nach $\mathbb{R}^N$. Mit Hilfe des Korollars 2.9 gilt

$$f := \hat{F} - \sum_{\substack{\ell = 1, \dots, 4\,, \\ \sigma < s - \frac{N}{2}\,, \\ m = 1, \dots}} \alpha_\sigma^{-1} \left\langle \hat{F}, P^{q,\ell}_{\sigma,m} \right\rangle_{\mathbb{R}^N} \cdot C Q^{q,\ell}_{\sigma,m} \in W(\blacktriangle)$$

und Satz 2.10 liefert ein $e \in \mathrm{H}^{2,q}_{s-2}$ mit $\Delta e = f$. Der Ansatz

$$E := \eta \cdot e + \varphi$$

führt uns mit Lemma 6.14 zu dem System

- $$\operatorname{div} \varphi = -\operatorname{div} \eta e \in {}_0\mathrm{D}^{q-1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q-1}(\Omega)^\perp \qquad , \tag{6.28}$$
- $$\operatorname{div} \mu^{-1} \operatorname{rot} \varphi = F - \operatorname{div} \mu^{-1} \operatorname{rot} \eta e \in {}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^\perp \qquad . \tag{6.29}$$

Da wir $s \geq 1$ vorausgesetzt haben, können wir uns der klassischen Theorie bedienen. Satz 2.21 $\big($mit $H := E$, $G := 0$, $f := F - \operatorname{div} \mu^{-1} \operatorname{rot} \eta e$, $\gamma := 0$, $\nu := \varepsilon$ und den Ersetzungen $q \rightsquigarrow q+1$, $\varepsilon \rightsquigarrow \mu^{-1}\big)$ liefert nämlich ein

$$H \in \mu \mathrm{D}^{q+1}(\Omega) \cap {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}(\Omega) \cap {}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^{\perp_{\mu^{-1}}} \overset{\text{Lemma 6.32}}{\subset} {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^\perp$$

mit $\operatorname{div}\mu^{-1}H = F - \operatorname{div}\mu^{-1}\operatorname{rot}\eta e$. Mit Satz 2.19 finden wir zu diesem H ein

$$\varphi \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^q_{-1}(\Omega) \qquad \text{mit} \qquad \operatorname{div}\varphi = -\operatorname{div}\eta e \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot}\varphi = H \qquad .$$

Somit ist $\varphi \in \mathrm{X}^q_{-1}(\Omega)$ eine Lösung des Systems (6.28), (6.29) und damit eine Lösung E des Systems

$$\operatorname{div} E = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div}\mu^{-1}\operatorname{rot} E = F$$

gefunden. Es fehlt noch der Nachweis ihrer speziellen Gestalt, d. h. $E \in D(\Delta_{\operatorname{div}})$.
Da $\eta e \in \mathrm{X}^q_{s-2}(\Omega)$ trivialerweise gilt, bleibt nur noch φ zur Diskussion. Zunächst haben wir mit Korollar 3.8 z. B. $\varphi \in \mathrm{H}^{2,q}_{-1}\big(A(r_0)\big)$ und daher gilt in $A(r_0)$ mit $\mu^{-1} = \operatorname{Id} + \hat{\hat{\mu}}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mu^{-1}\operatorname{rot}\varphi + \operatorname{rot}\operatorname{div}\varphi &= F - \operatorname{div}\mu^{-1}\operatorname{rot}\eta e - \operatorname{rot}\operatorname{div}\eta e = F - \Delta\eta e - \operatorname{div}\hat{\hat{\mu}}\operatorname{rot}\eta e\\
&= F - \Delta\big((\eta-1)e\big) - \underbrace{\Delta e}_{=f} - \operatorname{div}\hat{\hat{\mu}}\operatorname{rot}\eta e\\
&= \Delta\big((1-\eta)e\big) - \operatorname{div}\hat{\hat{\mu}}\operatorname{rot}\eta e + \sum_{\substack{\ell=1,\dots,4\,,\\ \sigma<s-\frac{N}{2}\,,\\ m=1,\dots}} \alpha_\sigma^{-1}\big\langle \hat{F}, P^{q,\ell}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N}\cdot CQ^{q,\ell}_{\sigma,m} \qquad ,
\end{aligned}$$

folglich

$$\Delta\varphi = \Delta\big((1-\eta)e\big) - \operatorname{div}\hat{\hat{\mu}}\operatorname{rot}(\eta e + \varphi) + \sum_{\substack{\ell=1,\dots,4\,,\\ \sigma<s-\frac{N}{2}\,,\\ m=1,\dots}} \alpha_\sigma^{-1}\big\langle \hat{F}, P^{q,\ell}_{\sigma,m}\big\rangle_{\mathbb{R}^N}\cdot CQ^{q,\ell}_{\sigma,m} \qquad .$$

Im Falle kompakter Störungen $\hat{\mu}$ und $\hat{\hat{\mu}}$ besitzt $\Delta\varphi$ also einen kompakten Träger und es gilt $\operatorname{div}\varphi \in \mathrm{L}^{2,q-1}_{s-1}(\Omega)$.
Mit Lemma 6.18 und Bemerkung 5.14 erhalten wir daher

$$\varphi \in \mathrm{L}^{2,q}_{s-2}(\Omega) \oplus {}_\eta\tilde{\mathfrak{D}}^q_{s-2} \qquad \text{und damit auch} \qquad \varphi \in \mathrm{X}^q_{s-2}(\Omega) \oplus {}_\eta\tilde{\mathfrak{D}}^q_{s-2} \qquad .$$

Man beachte, daß hier die Integrierbarkeitsbedingung an $\operatorname{rot}\varphi$ fehlt. In diesem Fall wäre der Beweis beendet.
Falls $\hat{\mu}$ und $\hat{\hat{\mu}}$ keine kompakten Träger besitzen, können wir zunächst ein Analogon zu Lemma 6.21 beweisen, daß nämlich aus

$$E \in \mathrm{L}^{2,q}_{-\frac{N}{2}}(\Omega) \qquad , \qquad \operatorname{div} E \in \mathrm{L}^{2,q-1}_{s-1}\big(A(\rho)\big) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot} E \in \mathrm{L}^{2,q}_{s}\big(A(\rho)\big)$$

schon $\varphi \in \mathrm{L}^{2,q}_{s-2}(\Omega) \oplus {}_\eta\tilde{\mathfrak{D}}^q_{s-2}$ folgt. Um dies zu zeigen, benötigen wir dieses Lemma nur im Fall $\mu = \operatorname{Id}$.
Mit dieser Kenntnis liefern uns

$$E \in \mathrm{X}^q_{-1}(\Omega) \cap \mathrm{H}^{2,q}_{-1}\big(A(r_0)\big)$$

und das System

$$\operatorname{div} E = 0 \qquad , \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot} E = F - \operatorname{div}\hat{\hat{\mu}}\operatorname{rot} E \in \mathrm{L}^{2,q}_{\min\{s,1+\tau\}}\big(A(r_0)\big)$$

mit dergleichen „Hochhangel"–Technik wie im Beweis von Lemma 6.26 in endlich vielen „τ–Schritten" schließlich

$$E \in \mathrm{X}^q_{s-2}(\Omega) \oplus {}_\eta\tilde{\mathfrak{D}}^q_{s-2} \qquad .$$

Damit ist der Beweis beendet. ■

Analog zum vorherigen Lemma erhalten wir

Lemma 6.52
Seien $s \in [1,\infty) \setminus \mathbb{I}$ und $\tau > \max\{0, s - N/2\}$. Dann ist

$$\begin{array}{rcccc}
\Delta_{\operatorname{rot}} & : & \big(\mathrm{Y}^{q+1}_{s-2}(\Omega) \oplus \eta\tilde{\mathcal{R}}^{q+1}_{s-2}\big) \cap {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{\operatorname{loc}}(\Omega) & \longrightarrow & {}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{s}(\Omega) \cap \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)^\perp\\
 & & H & \longmapsto & \operatorname{rot}\varepsilon^{-1}\operatorname{div} H
\end{array}$$

ein stetiger und surjektiver Fredholm–Operator mit Kern $N(\Delta_{\operatorname{rot}}) = \mathcal{H}^{q+1}(\Omega)$.
Hierbei sei $\mathrm{Y}^{q+1}_s(\Omega) := \big\{H \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_s(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_s(\Omega) : \varepsilon^{-1}\operatorname{div} H \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q}_{s+1}(\Omega)\big\}$.

Unser ursprüngliches Anliegen in diesem Abschnitt war, die Ausnahmeform ηA^1_{s-1} bzw. ηA^{N-1}_{s-1} im Satz 6.39 und in den Lemmata 6.41, 6.43 auszuschließen. Dies liefern die folgenden abschließenden Lemmata und Bemerkungen:

Lemma 6.53
Seien $1 \leq q \leq N-2$, $s \in [1,\infty) \setminus \mathbb{I}$ und $\mathfrak{I}$ eine endliche Teilmenge von $\hat{\mathfrak{I}}$ mit maximalem Homogenitätsgrad $\mathrm{h}_{\mathfrak{I}}$, so daß

$$\eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}) \cap \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) = \{0\} \qquad .$$

Weiterhin sei $\tau > \max\{0, s-N/2\}$ und $\tau \geq -s$ sowie $\tau > s + N/2 + \mathrm{h}_{\mathfrak{I}}$, falls $\mathfrak{I} \neq \emptyset$.
Dann gibt es zu jeder Form $F \in \big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I})\big) \cap \mathcal{F}^q(\Omega)$ der Gestalt

$$F = F_s + \sum_{I\in\mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_I \qquad \textit{mit} \qquad F_s \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \qquad \textit{und} \qquad \mathtt{f}_I \in \mathbb{C}$$

ein

$$E \in \mathrm{X}^q_{s-2}(\Omega) \oplus \eta\tilde{\mathcal{D}}^q_{s-2} \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}_2)$$

mit

$$\operatorname{div}\mu^{-1}\operatorname{rot} E = F \qquad .$$

Dieses E hat die Form

$$E = E_{s-2} + \hat{E} + \sum_{I\in\mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_{I_2} \qquad , \qquad E_{s-2} \in \mathrm{X}^q_{s-2}(\Omega) \qquad , \qquad \hat{E} \in \eta\tilde{\mathcal{D}}^q_{s-2} \qquad .$$

Beweis:
Wir folgen der Grundidee des Beweises zu Lemma 6.41. Zur Lösung des Problems

$$\operatorname{div}\mu^{-1}\operatorname{rot} E = F = F_s + \sum_{I\in\mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_I \tag{6.30}$$

machen wir nun aber einen Ansatz zweiter Ordnung

$$E := e + \sum_{I\in\mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_{I_2} \qquad .$$

Wegen $\operatorname{div}\operatorname{rot} D^q_{I_2} = D^q_I$ übersetzt sich dieser Ansatz mit $\mu^{-1} = \mathrm{Id} + \hat{\mu}$ in

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mu^{-1}\operatorname{rot} e &= F - \sum_{I\in\mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \operatorname{div}\mu^{-1}\operatorname{rot}(\eta D^q_{I_2}) \\ &= F_s - \sum_{I\in\mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot C_{\operatorname{div}\operatorname{rot},\eta} D^q_{I_2} - \sum_{I\in\mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \operatorname{div}\hat{\mu}\operatorname{rot}(\eta D^q_{I_2}) =: f \in \mathcal{F}^q(\Omega) \qquad .\end{aligned} \tag{6.31}$$

Die Kompaktheit des Trägers des Kommutators $C_{\operatorname{div}\operatorname{rot},\eta}$ und die Voraussetzungen an τ sowie Korollar 6.33 liefern

$$f \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \cap \mathcal{F}^q(\Omega) = {}_0\mathrm{D}^q_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^q(\Omega)^{\perp} = W(\Delta_{\operatorname{div}}) \qquad .$$

Mit Lemma 6.51 erhalten wir eine Lösung $e \in \big(\mathrm{X}^q_{s-2}(\Omega) \oplus \eta\tilde{\mathcal{D}}^q_{s-2}\big) \cap {}_0\mathrm{D}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ zu (6.31) und somit ist eine Lösung E der gewünschten Gestalt zu (6.30) gefunden. ■

Bemerkung 6.54
Nun können wir das Auftreten der Ausnahmekomponenten ηA^{N-1}_{s-1} im Fall $q = N-2$ in Satz 6.39 und Lemma 6.41 ausschließen. Da diese lediglich für $s \geq N/2$ auftauchen kann, zeigt nämlich das obige Lemma für solche s $\big($sogar für $1 \leq q \leq N-2$ und $s \in [1,\infty) \setminus \mathbb{I}\big)$, daß $H := \mu^{-1}\operatorname{rot} E$ die eindeutige Lösung des Problems

$$H \in \Big(\big(\mu^{-1}\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{I}_+)\Big) \cap \mathcal{G}^{q+1}_{\mu}(\Omega) \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{div} H = F$$

ist.

Beweis:
Lemma 6.53 liefert für $1 \leq q \leq N-2$ (also insbesondere für $q = N-2$), $s \geq N/2$ und zu $F = F_s + \sum_{I\in\mathfrak{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_I$ ein

$$E \in \big(\mathrm{X}^q_{s-2}(\Omega) \oplus \eta\tilde{\mathcal{D}}^q_{s-2} \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}_2)\big) \qquad \text{mit} \qquad \operatorname{div}\mu^{-1}\operatorname{rot} E = F$$

und der F entsprechenden Gestalt. Mit (6.25) gilt $\eta\mathcal{D}^q\big(\mathcal{I}^{\leq 1}_{s-2}\big) = \eta^-\mathcal{D}^{q,\leq 1}_{s-2-\frac{N}{2}}$ und wegen der Beziehung

$$\eta D^q_{J_+} \in \mathrm{L}^{2,q}_{t-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \eta R^{q+1}_J \in \mathrm{L}^{2,q+1}_t$$

folgt $(\mathcal{J}^\ell_t)_+ = \mathcal{I}^{\ell+1}_{t-1}$ und damit (für $\ell = 0$) $\mathcal{I}^{\leq 1}_{s-2} = \mathcal{I}^0_{s-2} \,\dot\cup\, \mathcal{I}^1_{s-2} = \mathcal{I}^0_{s-2} \,\dot\cup\, (\mathcal{J}^0_{s-1})_+$. Somit besitzt E mit Konstanten $\mathtt{e}^0_I, \mathtt{e}^1_J, \mathtt{e} \in \mathbb{C}$ und $E_{s-2} \in \mathrm{X}^q_{s-2}(\Omega)$ die Gestalt

$$E = E_{s-2} + \sum_{I\in\mathcal{I}^0_{s-2}} \mathtt{e}^0_I \cdot \eta D^q_I + \sum_{J\in\mathcal{J}^0_{s-1}} \mathtt{e}^1_J \cdot \eta D^q_{J_+} + \underbrace{\mathtt{e}\cdot\eta^- R^{1,1}_{0,1}}_{\text{nur für } q=1\,\wedge\, s\geq N/2+1} + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta D^q_{I_2} \qquad .$$

Da D^q_I für $I \in \mathcal{I}^0_{s-2}$ und ${}^-R^{1,1}_{0,1}$ rotationsfrei sind und desweiteren $\operatorname{rot} D^q_{J_+} = R^{q+1}_J$ sowie $\operatorname{rot} D^q_{I_2} = R^{q+1}_{I_1} = R^{q+1}_{I_+}$ für $J \in \mathcal{J}^0_{s-1}$ und $I \in \mathcal{I}$ gelten, erhalten wir mit einem $H_{s-1} \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mu\mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)$

$$\operatorname{rot} E = H_{s-1} + \sum_{J\in\mathcal{J}^0_{s-1}} \mathtt{e}^1_J \cdot \eta R^{q+1}_J + \sum_{I\in\mathcal{I}} \mathtt{f}_I \cdot \eta R^{q+1}_{I_+} \in \mathcal{G}^{q+1}(\Omega) \qquad .$$

Mit $H := \mu^{-1}\operatorname{rot} E$ gilt $\operatorname{div} H = F$ und die Voraussetzungen an τ liefern schließlich

$$H \in \Big(\big(\mu^{-1}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{I}_+)\Big) \cap \mathcal{G}^{q+1}_\mu(\Omega) \qquad .$$

H enthält also insbesondere im Fall $q = N-2$ keine Ausnahmekomponente ηA^{N-1}_{s-1} . ■

Ganz entsprechend erhalten wir noch

Lemma 6.55
Seien $1 \leq q \leq N-2$, $s \in [1,\infty) \setminus \mathbb{I}$ und $\mathcal{J}$ eine endliche Teilmenge von $\hat{\mathcal{J}}$ mit maximalem Homogenitätsgrad $\mathrm{h}_{\mathcal{J}}$, so daß

$$\eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J}) \cap \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) = \{0\} \qquad .$$

Weiterhin sei $\tau > \max\{0, s-N/2\}$ und $\tau \geq -s$ sowie $\tau > s + N/2 + \mathrm{h}_{\mathcal{J}}$, falls $\mathcal{J} \neq \emptyset$.
Dann gibt es zu jeder Form $G \in \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J})\big) \cap \mathcal{G}^{q+1}(\Omega)$ der Gestalt

$$G = G_s + \sum_{J\in\mathcal{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta R^{q+1}_J \qquad \textit{mit} \qquad G_s \in \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \qquad \textit{und} \qquad \mathtt{g}_J \in \mathbb{C}$$

ein

$$H \in \mathrm{Y}^{q+1}_{s-2}(\Omega) \oplus \eta\tilde{\mathcal{R}}^{q+1}_{s-2} \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J}_2)$$

mit

$$\operatorname{rot}\varepsilon^{-1}\operatorname{div} H = G \qquad .$$

Dieses H hat die Form

$$H = H_{s-2} + \hat{H} + \sum_{J\in\mathcal{J}} \mathtt{g}_J \cdot \eta R^{q+1}_{J_2} \qquad , \qquad H_{s-2} \in \mathrm{Y}^{q+1}_{s-2}(\Omega) \qquad , \qquad \hat{H} \in \eta\tilde{\mathcal{R}}^{q+1}_{s-2} \qquad .$$

Bemerkung 6.56
Der letzten Bemerkung entsprechend können wir das Auftreten der Ausnahmekomponenten ηA^1_{s-1} im Fall $q = 1$ in Satz 6.39 und Lemma 6.43 ausschließen. Da diese lediglich für $s \geq N/2$ auftauchen kann, zeigt nämlich das vorherige Lemma für solche s $\big($sogar für $1 \leq q \leq N-2$ und $s \in [1,\infty) \setminus \mathbb{I}\big)$, daß $E := \varepsilon^{-1}\operatorname{div} H$ die eindeutige Lösung des Problems

$$E \in \Big(\big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{s-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathcal{I}^0_{s-1}) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathcal{J}_+)\Big) \cap \mathcal{F}^q_\varepsilon(\Omega) \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{rot} E = G$$

ist.

7 Niederfrequenzasymptotik

Nun sind wir im Hauptkapitel dieser Arbeit angekommen. Wir beginnen mit Folgerungen aus der Darstellungsformel im Ganzraumfall und können zunächst Null als Häufungspunkt von $\mathbb{P}$ ausschließen. Desweiteren können wir sofort zeigen, daß für gewisse (F, G) die Lösung $\mathcal{L}_\omega(F, G)$ von $\mathrm{Max}(\Lambda, \omega, F, G)$ für $\omega \to 0$ gegen die eindeutige Lösung $\mathcal{L}_0(F, G)$ von

$$\mathrm{Max}(\Lambda, 0, F, G) := \mathrm{Max}(\Lambda, 0, 0, F, G, 0, 0, 0)$$

konvergiert. Wir sind aber zunächst nicht in der Lage, irgendwelche Aussagen über die Konvergenzordnung zu machen. Ähnliche Ergebnisse erzielt Picard in [32] im Fall der klassischen Maxwell–Gleichung und unter stärkeren Voraussetzungen an die Daten.

Um die Konvergenzordnung angeben zu können, diskutieren wir dann die Approximation der Lösung für kleine Frequenzen durch eine „verallgemeinerte Neumannsche Reihe”. Hier werden degenerierte „Korrekturoperatoren” auftreten, die nur aus Lösungen spezieller statischer Probleme bestehen. Wir führen den Ideen von Weck und Witsch in [50] bzw. [53] folgend den „Raum der regulären Konvergenz” ein, auf dem der Lösungsoperator durch die Neumannsche Reihe ohne Korrekturoperatoren bis zu einer bestimmten Ordnung approximiert wird. Diesen Raum werden wir dann durch Orthogonalitätsrelationen charakterisieren können und zeigen, daß er endliche Kodimension besitzt und ein abgeschlossener Unterraum des Datenraumes ist. Die Projektoren auf diesen Raum werden dann die endlich vielen Korrekturoperatoren erzeugen, mit denen dann die verallgemeinerte Neumannsche Reihe definiert werden kann, welche unsere Lösung bis zu einer vorgegebenen Ordnung approximiert.

Diese Konvergenz zeigen wir zuerst in lokalen Normen und unter der stärkeren Voraussetzung, daß die Transformationen ε und μ kompakte Störungen der Identität sind. Mit der Ganzraumasymptotik aus dem fünften Kapitel sind wir dann in der Lage, zu gewichteten Normen überzugehen. Wir könnten dann sogar zeigen, daß alle auftretenden Operatoren auch mit $\hat{\varepsilon}$ und $\hat{\mu}$, die keine kompakte Träger besitzen aber hinreichend schnell fallen, definiert werden können. Die Lösungsoperatoren mit den kompakten Störungen approximieren dann die allgemeineren Lösungsoperatoren in der Operatornorm. Dies liefert dann mit einem allgemeinen Prinzip im Fall der Helmholtz–Gleichung bzw. der linearen Elastizität in [50] bzw. [53] die Asymptotik auch in dem Fall der nichtkompakten Störungen. Bei der Maxwell–Gleichung ist dieser Schluß leider nicht mehr ohne weiteres durchführbar und die Frage nach der Asymptotik bleibt im Fall nichtkompakter Störungen des Mediums ungeklärt, gleichwohl wir eine positive Antwort erwarten.

Wir benutzen weiterhin die Generalvoraussetzungen **(i)**–**(iv)** aus dem vorherigen Kapitel. „N ungerade” setzen wir nun stets voraus, weil sonst unsere asymptotischen Entwicklungen durch das Auftreten logarithmischer Terme zu kompliziert würden.

Außerdem wollen wir nun den Rang der Formen generell auf

(v) $$1 \le q \le N - 2$$

beschränken. Da das (zeitharmonische) Maxwell–Problem für $q \in \{0, N-1\}$ äquivalent zu skalaren Helmholtz–Problemen ist, verzichten wir auf diese Fälle, zumal sie häufig die Behandlung von Sonderfällen erzwingen würden. Durch die Benutzung der Formen $\mathrm{B}^{q+1}(\Omega)$ schließt sich der Fall $q = 0$ sowieso aus.

Desweiteren werden wir die Voraussetzung **(iv)** zu der folgenden verschärfen:

(iv′) $\operatorname{supp}\hat{\varepsilon} \cup \operatorname{supp}\hat{\mu} \Subset \overline{\Omega}$. Wir können und werden dann r_0 immer so groß wählen, daß

$$\operatorname{supp}\hat{\varepsilon} \cup \operatorname{supp}\hat{\mu} \subset U(0, r_0)$$

gilt. Insbesondere gilt dann auf $\operatorname{supp}\eta$ immer $\varepsilon = \mathrm{Id}$ und $\mu = \mathrm{Id}$.

Viele Resultate gelten aber auch unter der schwächeren Voraussetzung **(iv)**. Wir werden dies bei den entsprechenden Ergebnissen anmerken. Wie im letzten Kapitel genügt dann jeweils die Differenzierbarkeit der Inhomogenitäten $\hat{\varepsilon}$ und $\hat{\mu}$ in $A(r_0)$. Insbesondere könnten wir bei Voraussetzung **(iv′)** gänzlich auf Differenzierbarkeitseigenschaften von $\hat{\varepsilon}$ und $\hat{\mu}$ verzichten.

Wir führen hier schon ein $\mathbf{J} \in \mathbb{N}_0$ ein, welches die maximale Ordnung für asymptotische Entwicklungen angibt. In Abhängigkeit von diesem $\mathbf{J}$ und N muß dann $\hat{j}$ in (1.34) genügend groß gewählt werden. Es genügt (und dies wollen wir stets ohne weiteren Kommentar voraussetzen) z. B.

(vi) $$\hat{j} \ge 4(\mathbf{J} + 1) + N \quad .$$

7.1 Folgerungen aus der Darstellungsformel und einfache Niederfrequenzasymptotik

Wir definieren für $r \in \mathbb{R}_+$ die Menge

$$\mathbb{C}_{+,r} := \big\{\omega \in \mathbb{C}_+ : |\omega| \le r\big\} \quad .$$

Mit einer Abschneidetechnik liefert Satz 5.4 zunächst das

Lemma 7.1
Seien $\tilde{\omega} > 0$, $s \in (1/2, N/2)$ und $t := s - (N+1)/2$. Dann existieren Konstanten $c, \rho > 0$, so daß für alle $\omega \in \mathbb{C}_{+,\tilde{\omega}} \setminus \{0\}$, alle

$$(F,G) \in \Big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \cap \mathbf{D}^q_s\big(A(r_0)\big)\Big) \times \Big(\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \cap \mathbf{R}^{q+1}_s\big(A(r_0)\big)\Big)$$

und alle Lösungen (E,H) zu $\mathrm{Max}(\Lambda,\omega,F,G)$ die Abschätzung

$$\big\|(E,H)\big\|_{\mathbf{R}^q_t(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)} \leq c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E,H)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,\rho)} + |\omega|^{-1} \cdot \big\|(\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G)\big\|_{0,s,A(r_0)}\Big)$$

gilt.

Bemerkung 7.2
Das obige Lemma bleibt auch richtig, wenn wir die Grundvoraussetzung **(iv′)** *wieder zu* **(iv)** *mit $\tau > (N+1)/2$ abschwächen. Es genügt sogar, daß die Ableitungen von $\hat{\varepsilon}$ und $\hat{\mu}$ nur mit der Rate τ statt $\tau + 1$ abklingen. Desweiteren gilt dies Lemma für alle $q \in \{0, \dots, N\}$.*

Beweis:
In Anlehnung an die Bemerkung beweisen wir das Lemma in diesem allgemeineren Fall.
Seien (E,H) eine Lösung von $\mathrm{Max}(\Lambda,\omega,F,G)$ und $(\tilde{E},\tilde{H})$ die Nullfortsetzung von $\eta(E,H)$ nach $\mathbb{R}^N$. Diese erfüllt dann auch die Strahlungsbedingung, liegt entsprechend in $\mathbf{R}^q_{<-\frac{1}{2}} \times \mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}}$, sogar in $\mathbf{H}^{1,q}_{<-\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}^{1,q+1}_{<-\frac{1}{2}}$, und löst

$$(M + \mathrm{i}\,\omega)(\tilde{E},\tilde{H}) = \eta(F,G) + C_{M,\eta}(E,H) - \mathrm{i}\,\omega\hat{\Lambda}(\tilde{E},\tilde{H}) =: (\tilde{F},\tilde{G}) \in \mathbf{D}^q_s \times \mathbf{R}^{q+1}_s \qquad ,$$

denn $\tau > (N+1)/2 > s + 1/2$ und $(F,G) \in \mathbf{D}^q_s\big(A(r_0)\big) \times \mathbf{R}^{q+1}_s\big(A(r_0)\big)$. Damit gilt $(\tilde{E},\tilde{H}) = L_\omega(\tilde{F},\tilde{G})$ (L_ω ist der Lösungsoperator des zeitharmonischen homogenen Ganzraumproblems aus Kapitel fünf.) und Satz 5.4 liefert eine von ω, $(\tilde{F},\tilde{G})$ oder $(\tilde{E},\tilde{H})$ unabhängige Konstante $c > 0$, so daß die Abschätzung

$$\big\|(\tilde{E},\tilde{H})\big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} \leq c \cdot \Big(\big\|(\tilde{F},\tilde{G})\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + |\omega|^{-1} \cdot \big\|(\operatorname{div}\tilde{F}, \operatorname{rot}\tilde{G})\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N}\Big) \tag{7.1}$$

erfüllt ist. Desweiteren liefern die Differentialgleichungen in $A(r_0)$

$$\mathrm{i}\,\omega \operatorname{div} \varepsilon E = \operatorname{div} F \qquad , \qquad \mathrm{i}\,\omega \operatorname{rot} \mu H = \operatorname{rot} G \tag{7.2}$$

und in $\mathbb{R}^N$

$$\mathrm{i}\,\omega \operatorname{div} \tilde{E} = \operatorname{div} \tilde{F} \qquad , \qquad \mathrm{i}\,\omega \operatorname{rot} \tilde{H} = \operatorname{rot} \tilde{G} \qquad . \tag{7.3}$$

Kombinieren wir dies mit (7.1), erhalten wir

$$\big\|(E,H)\big\|_{0,t,\Omega} \leq c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E,H)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,r_2)} + \big\|(E,H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega} + \big\|(\operatorname{div}\tilde{E}, \operatorname{rot}\tilde{H})\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N}\Big) \qquad .$$

Den vierten Summanden der rechten Seite schätzen wir weiter ab

$$\begin{aligned}
&\big\|(\operatorname{div}\tilde{E}, \operatorname{rot}\tilde{H})\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} \\
&\leq c \cdot \Big(\big\|(E,H)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,r_2)} + \big\|(\operatorname{div} E, \operatorname{rot} H)\big\|_{0,s,\operatorname{supp}\eta}\Big) \\
&\leq c \cdot \Big(\big\|(E,H)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,r_2)} + \big\|(\operatorname{div}\hat{\varepsilon}E, \operatorname{rot}\hat{\mu}H)\big\|_{0,s,\operatorname{supp}\eta} + |\omega|^{-1} \cdot \big\|(\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G)\big\|_{0,s,A(r_0)}\Big) \\
&\leq c \cdot \Big(\big\|(E,H)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,r_2)} + \big|\!\big|\!\big|(E,H)\big|\!\big|\!\big|_{1,s-\tau,\operatorname{supp}\eta} + |\omega|^{-1} \cdot \big\|(\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G)\big\|_{0,s,A(r_0)}\Big) \qquad .
\end{aligned}$$

Wir setzen diese Abschätzung in die vorherige ein, benutzen Korollar 3.8, die Differentialgleichung und nochmals (7.2) und erhalten

$$\big\|(E,H)\big\|_{0,t,\Omega} \leq c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E,H)\big\|_{0,s-\tau,\Omega} + |\omega|^{-1} \cdot \big\|(\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G)\big\|_{0,s,A(r_0)}\Big) \qquad .$$

Wegen $\tau > (N+1)/2$, also $s - \tau < t$, liefert Lemma 4.8 ein $\rho > 0$ mit

$$\big\|(E,H)\big\|_{0,t,\Omega} \leq c \cdot \Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E,H)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,\rho)} + |\omega|^{-1} \cdot \big\|(\operatorname{div} F, \operatorname{rot} G)\big\|_{0,s,A(r_0)}\Big)$$

und die Differentialgleichung zeigt schließlich die Behauptung. ■

Wir wollen an dieser Stelle einen neuen „Datenraum”

$$\begin{aligned}\operatorname{Reg}_s^{q,0}(\Omega) &:= \big(\mathrm{L}_s^{2,q}(\Omega)\cap\mathcal{F}^q(\Omega)\big)\times\big(\mathrm{L}_s^{2,q+1}(\Omega)\cap\mathcal{G}^{q+1}(\Omega)\big)\\ &= \big({}_0\mathrm{D}_s^q(\Omega)\cap\mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^\perp\big)\times\big({}_0\mathring{\mathrm{R}}_s^{q+1}(\Omega)\cap\mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^\perp\big)\end{aligned} \tag{7.4}$$

einführen. Die Bezeichnung wird erst später in Definition 7.7 näher begründet.
Mit Hilfe des obigen Lemmas erhalten wir den

Satz 7.3
Null ist kein Häufungspunkt von $\mathbb{P}$. Insbesondere kann sich $\mathbb{P}$ dann in ganz $\mathbb{R}$ nicht häufen und es existiert ein $\tilde\omega>0$, so daß $\mathbb{P}\cap\mathbb{C}_{+,\tilde\omega}=\emptyset$. Somit ist $\mathcal{L}_\omega$ für alle $\omega\in\mathbb{C}_{+,\tilde\omega}\setminus\{0\}$ auf ganz $\mathrm{L}^{2,q}_{>\frac12}(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac12}(\Omega)$ wohldefiniert. Seien desweiteren $s\in(1/2,N/2)$ und $t:=s-(N+1)/2$. Dann gelten:

(i) *Es gibt Konstanten c und $0<\hat\omega\le\tilde\omega$, so daß für alle $\omega\in\mathbb{C}_{+,\hat\omega}\setminus\{0\}$ und alle*

$$(F,G)\in\mathbf{D}_s^q(\Omega)\times\mathring{\mathbf{R}}_s^{q+1}(\Omega)$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}\big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,t,\Omega}\le c\cdot\Big(&\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega}+|\omega|^{-1}\cdot\big\|(\operatorname{div}F,\operatorname{rot}G)\big\|_{0,s,\Omega}\\ &+|\omega|^{-1}\cdot\sum_{\ell=1}^{d_q}\big|\langle F,\mathring{b}_\ell^q\rangle_\Omega\big|+|\omega|^{-1}\cdot\sum_{\ell=1}^{d_{q+1}}\big|\langle G,b_\ell^{q+1}\rangle_\Omega\big|\Big)\end{aligned}$$

gilt. Insbesondere ist gleichmäßig bzgl. $\omega\in\mathbb{C}_{+,\hat\omega}\setminus\{0\}$ und $(F,G)\in\operatorname{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ die Abschätzung

$$\big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,t,\Omega}\le c\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega}$$

erfüllt, d. h. $\mathcal{L}_\omega$ ist bzgl. $\omega\in\mathbb{C}_{+,\hat\omega}\setminus\{0\}$ gleichgradig stetig. Die $\|\cdot\|_{0,t,\Omega}$–Norm auf den linken Seiten kann auch durch die natürliche Norm in

$$\big(\mathring{\mathbf{R}}_t^q(\Omega)\cap\varepsilon^{-1}\mathbf{D}_t^q(\Omega)\big)\times\big(\mu^{-1}\mathring{\mathbf{R}}_t^{q+1}(\Omega)\cap\mathbf{D}_t^{q+1}(\Omega)\big)$$

ersetzt werden.

(ii) *Gelten für eine Nullfolge $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}_{+,\hat\omega}\setminus\{0\}$ und eine Folge $\big((F_n,G_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbf{D}_s^q(\Omega)\times\mathring{\mathbf{R}}_s^{q+1}(\Omega)$ die Konvergenzen*

- $(F_n,G_n)\xrightarrow{n\to\infty}(F,G)$ *in* $\mathrm{L}_s^{2,q}(\Omega)\times\mathrm{L}_s^{2,q+1}(\Omega)$,
- $-\mathrm{i}\,\omega_n^{-1}(\operatorname{div}F_n,\operatorname{rot}G_n)\xrightarrow{n\to\infty}(f,g)$ *in* $\mathrm{L}_s^{2,q-1}(\Omega)\times\mathrm{L}_s^{2,q+2}(\Omega)$,
- $-\mathrm{i}\,\omega_n^{-1}\langle F_n,\mathring{b}_\ell^q\rangle_\Omega\xrightarrow{n\to\infty}\zeta_\ell$ *in* $\mathbb{C}$ *für* $\ell=1,\dots,d_q$,
- $-\mathrm{i}\,\omega_n^{-1}\langle G_n,b_\ell^{q+1}\rangle_\Omega\xrightarrow{n\to\infty}\xi_\ell$ *in* $\mathbb{C}$ *für* $\ell=1,\dots,d_{q+1}$,

so konvergiert

$$(E_n,H_n):=\mathcal{L}_{\omega_n}(F_n,G_n)\qquad\textit{in}\qquad\big(\mathring{\mathbf{R}}_{\tilde t}^q(\Omega)\cap\varepsilon^{-1}\mathbf{D}_{\tilde t}^q(\Omega)\big)\times\big(\mu^{-1}\mathring{\mathbf{R}}_{\tilde t}^{q+1}(\Omega)\cap\mathbf{D}_{\tilde t}^{q+1}(\Omega)\big)$$

für alle $\tilde t<t$ gegen

$$(E,H):=\big(\mathfrak{Max}_\varepsilon^{-1}(f,G,\zeta),{}_\mu\mathfrak{Max}^{-1}(F,g,\xi)\big)\qquad,$$

die eindeutige Lösung des statischen Problems $\operatorname{Max}(\Lambda,0,f,F,G,g,\zeta,\xi)$ aus Satz 6.36 bzw. 6.38. Insbesondere konvergiert für $\omega\in\mathbb{C}_{+,\hat\omega}\setminus\{0\}$ und $(F,G)\in\operatorname{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ die Lösung $\mathcal{L}_\omega(F,G)$ für $\omega\to0$ in $\mathring{\mathbf{R}}_{\tilde t}^q(\Omega)\times\mathbf{D}_{\tilde t}^{q+1}(\Omega)$ für alle $\tilde t<t$ gegen $\mathcal{L}_0(F,G)$ (siehe (6.18)), die eindeutige Lösung des statischen Problems $\operatorname{Max}(\Lambda,0,F,G)$.

Bemerkung 7.4

(i) *Dieser Satz gilt auch, wenn wir* **(iv′)** *durch* **(iv)** *mit* $\tau > (N+1)/2$ *ersetzen und die Ableitungen von* $\hat{\varepsilon}$ *und* $\hat{\mu}$ *nur mit der Rate* τ *abklingen.*
Desweiteren bleiben alle Aussagen für $q \neq 0$ *richtig.*

(ii) *Wir wollen im weiteren Verlauf der Arbeit dieses* $\hat{\omega}$ *aus dem obigen Satz fixieren und außerdem nur noch Frequenzen* ω *aus* $\mathbb{C}_{+,\hat{\omega}}$ *betrachten. Wegen* $\mathbb{P} \cap \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} = \emptyset$ *ist* $\mathcal{L}_\omega$ *dann auf ganz* $\mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}}(\Omega)$ *wohldefiniert.*

Beweis:
Wir wollen den Beweis Bemerkung 7.4 (i) entsprechend in diesem allgemeineren Fall durchführen.
Wäre 0 ein Häufungspunkt von $\mathbb{P}$ oder die Abschätzung in **(i)** falsch, so gäbe es eine Nullfolge $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ und eine Folge von Daten $\big((F_n, G_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \big(\mathbf{D}^q_s(\Omega) \times \mathring{\mathbf{R}}^{q+1}_s(\Omega)\big) \cap \mathcal{N}(\mathrm{Max}, \Lambda, \omega_n)^\perp$ mit $\big\|\mathcal{L}_{\omega_n}(F_n, G_n)\big\|_{0,t,\Omega} = 1$ und

- $\big\|(F_n, G_n)\big\|_{0,s,\Omega} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad ,$
- $|\omega_n|^{-1} \cdot \big\|(\operatorname{div} F_n, \operatorname{rot} G_n)\big\|_{0,s,\Omega} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad ,$
- $|\omega_n|^{-1} \cdot \big|\langle F_n, \mathring{b}^q_\ell\rangle_\Omega\big| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{für} \quad \ell = 1, \dots, d_q \quad ,$
- $|\omega_n|^{-1} \cdot \big|\langle G_n, b^{q+1}_\ell\rangle_\Omega\big| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{für} \quad \ell = 1, \dots, d_{q+1} \quad .$

Definieren wir $(E_n, H_n) := \mathcal{L}_{\omega_n}(F_n, G_n)$, so schließen wir aus der Differentialgleichung

$$(M + \mathrm{i}\,\omega_n\Lambda)(E_n, H_n) = (F_n, G_n)$$

zunächst $\mathrm{i}\,\omega_n(\operatorname{div} \varepsilon E_n, \operatorname{rot} \mu H_n) = (\operatorname{div} F_n, \operatorname{rot} G_n)$ und erhalten

$$\big\|M(E_n, H_n)\big\|_{0,t,\Omega} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{sowie} \qquad \big\|(\operatorname{div} \varepsilon E_n, \operatorname{rot} \mu H_n)\big\|_{0,s,\Omega} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad . \tag{7.5}$$

Damit ist (E_n, H_n) in

$$\big(\mathring{\mathbf{R}}^q_t(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_t(\Omega)\big) \times \big(\mu^{-1}\mathring{\mathbf{R}}^{q+1}_t(\Omega) \cap \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)\big)$$

beschränkt und die LMKE liefert eine Teilfolge, welche wir wieder mit $\big((E_n, H_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wollen, die für alle $\tilde{t} < t$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\tilde{t}}(\Omega)$ konvergiert. Wegen (7.5) konvergiert sie sogar in

$$\big(\mathring{\mathbf{R}}^q_{\tilde{t}}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_{\tilde{t}}(\Omega)\big) \times \big(\mu^{-1}\mathring{\mathbf{R}}^{q+1}_{\tilde{t}}(\Omega) \cap \mathbf{D}^{q+1}_{\tilde{t}}(\Omega)\big) \qquad ,$$

und zwar gegen ein

$$(E, H) \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{\tilde{t}}(\Omega) \times \mu^{-1}{}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}_{\tilde{t}}(\Omega) \qquad .$$

Da $t = s - (N+1)/2 \in (-N/2, -1/2)$, können wir o. B. d. A. $\tilde{t} \geq -N/2$ annehmen und Lemma 6.22 liefert

$$(E, H) \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) \times \mu^{-1}{}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega) \qquad .$$

Desweiteren sehen wir für $\ell = 1, \dots, d_q$

$$0 \xleftarrow{n\to\infty} |\omega_n|^{-1} \cdot \big|\langle F_n, \mathring{b}^q_\ell\rangle_\Omega\big| = |\omega_n|^{-1} \cdot \big|\underbrace{\langle \operatorname{div} H_n, \mathring{b}^q_\ell\rangle_\Omega}_{=0} + \mathrm{i}\,\omega_n\langle \varepsilon E_n, \mathring{b}^q_\ell\rangle_\Omega\big| = \big|\langle \varepsilon E_n, \mathring{b}^q_\ell\rangle_\Omega\big| \xrightarrow{n\to\infty} \big|\langle \varepsilon E, \mathring{b}^q_\ell\rangle_\Omega\big| \quad ,$$

d. h. $E \in \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon}$, und analog $H \in \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^{\perp_\mu}$. Mit Lemma 6.31 erhalten wir $(E, H) = (0, 0)$ und Lemma 7.1 liefert schließlich von n unabhängige Konstanten $c, \rho > 0$, so daß die Abschätzung

$$\begin{aligned} 1 &= \big\|(E_n, H_n)\big\|_{0,t,\Omega} \\ &\leq c \cdot \Big(\big\|(F_n, G_n)\big\|_{0,s,\Omega} + |\omega_n|^{-1} \cdot \big\|(\operatorname{div} F_n, \operatorname{rot} G_n)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|(E_n, H_n)\big\|_{0,0,\Omega\cap U(0,\rho)}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

gilt, ein Widerspruch.

zu (ii): Nach **(i)** ist (E_n, H_n) in $\big(\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_t(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}^q_t(\Omega)\big) \times \big(\mu^{-1}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{q+1}_t(\Omega) \cap \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)\big)$ beschränkt. Daher und wegen $t = s - (N+1)/2 \in (-N/2, -1/2)$ können wir mit der LMKE eine Teilfolge auswählen, die wir wieder mit $\big((E_n, H_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen, so daß

$$(E_n, H_n) \xrightarrow{n\to\infty}: (\tilde{E}, \tilde{H}) \qquad \text{in} \qquad \mathrm{L}^{2,q}_{\tilde{t}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\tilde{t}}(\Omega)$$

für alle $\tilde{t} \in (-N/2, t)$ gilt. Aus der Differentialgleichung

$$M(E_n, H_n) + \mathrm{i}\,\omega_n \Lambda(E_n, H_n) = (F_n, G_n)$$

und $\omega_n \to 0$ sowie den Voraussetzungen folgern wir

- $M(E_n, H_n) \xrightarrow{n\to\infty} (F, G) \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^{2,q}_t(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_t(\Omega) \quad ,$
- $(\operatorname{div} \varepsilon E_n, \operatorname{rot} \mu H_n) \xrightarrow{n\to\infty} (f, g) \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+2}_s(\Omega)$

und z. B. für $\ell = 1, \ldots, d_{q+1}$

$$\langle \mu H_n, b^{q+1}_\ell \rangle_\Omega = \frac{\mathrm{i}}{\omega_n} \underbrace{\langle \operatorname{rot} E_n, b^{q+1}_\ell \rangle_\Omega}_{=0} - \frac{\mathrm{i}}{\omega_n} \langle G_n, b^{q+1}_\ell \rangle_\Omega \xrightarrow{n\to\infty} \xi_\ell$$

sowie analog $\langle \varepsilon E_n, \overset{\circ}{b}{}^q_\ell \rangle_\Omega \xrightarrow{n\to\infty} \zeta_\ell$ für $\ell = 1, \ldots, d_q$. Damit ist $(\tilde{E}, \tilde{H})$ ein Element von

$$\big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{>-\frac{N}{2}}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{>-\frac{N}{2}}(\Omega)\big) \times \big(\mu^{-1}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega)\big)$$

und löst das System

- $\operatorname{rot} \tilde{E} = G \quad ,$
- $\operatorname{div} \varepsilon \tilde{E} = f \quad ,$
- $\langle \varepsilon \tilde{E}, \overset{\circ}{b}{}^q_\ell \rangle_\Omega = \zeta_\ell \quad , \quad \ell = 1, \ldots, d_q \quad ,$
- $\operatorname{div} \tilde{H} = F \quad ,$
- $\operatorname{rot} \mu \tilde{H} = g \quad ,$
- $\langle \mu \tilde{H}, b^{q+1}_k \rangle_\Omega = \xi_k \quad , \quad k = 1, \ldots, d_{q+1} \quad .$

Da $\tau \geq N/2 - 1$ und dieses System

$$\begin{aligned} &(f, F, G, g) \\ &\in \big(\mathrm{L}^{2,q-1}_s(\Omega) \cap \mathcal{F}^{q-1}(\Omega)\big) \times \big(\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \cap \mathcal{F}^q(\Omega)\big) \times \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \cap \mathcal{G}^{q+1}(\Omega)\big) \times \big(\mathrm{L}^{2,q+2}_s(\Omega) \cap \mathcal{G}^{q+2}(\Omega)\big) \end{aligned}$$

impliziert, ist $(\tilde{E}, \tilde{H})$ nach Satz 6.38 die eindeutige Lösung (E, H) des Problems

$$\operatorname{Max}(\Lambda, 0, f, F, G, g, \zeta, \xi) \qquad .$$

Da der Grenzwert $(\tilde{E}, \tilde{H}) = (E, H)$ eindeutig ist, muß schon die ganze Folge $\big((E_n, H_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{<t}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{<t}(\Omega)$ gegen diesen konvergieren. ■

Korollar 7.5
Seien die Voraussetzungen des Satzes 7.3 erfüllt und die Operatorenräume

$$B_{s,t} := B\big(\operatorname{Reg}^{q,0}_s(\Omega), \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_t(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)\big)$$

definiert. Dann sind $\|\mathcal{L}_\omega\|_{B_{s,t}}$ *gleichmäßig bzgl.* $\omega \in \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}}$ *(also auch für* $\omega = 0$*) beschränkt und die Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{L} \; : & \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} & \longrightarrow & B_{s,\tilde{t}} \\ & \omega & \longmapsto & \mathcal{L}_\omega \end{array}$$

ist für alle $\tilde{t} < t$ *gleichmäßig stetig.*

Bemerkung 7.6

(i) *Die Behauptungen des Korollars bleiben auch mit* $\tilde{B}_{s,t} := B\big(\operatorname{Reg}_s^{q,0}(\Omega), \mathrm{L}_t^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_t^{2,q+1}(\Omega)\big)$ *richtig, denn* $\|\mathcal{L}_\omega\|_{\tilde{B}_{s,\tilde{t}}} \leq \|\mathcal{L}_\omega\|_{B_{s,\tilde{t}}}$.

(ii) *Wie bei dem letzten Lemma und Satz, gelten die obigen Resultate auch, wenn wir nur* $q \neq 0$ *fordern und* **(iv′)** *durch* **(iv)** *mit* $\tau > (N+1)/2$ *ersetzen.* $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}$ *und deren Ableitungen müssen lediglich mit der Rate* τ *abklingen.*

Beweis:
Mit Satz 7.3 gilt $\mathbb{P} \cap \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} = \emptyset$, also sind $\mathcal{L}_\omega$ für $\omega \in \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$ auf $\mathrm{L}_s^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_s^{2,q+1}(\Omega)$ und damit auch $\mathbb{L}$ wohldefiniert. Desweiteren sind nach Satz 7.3 (i) und Satz 6.39 $\big($siehe (6.18)$\big)$ $\|\mathcal{L}_\omega\|_{B_{s,t}}$ gleichmäßig bzgl. $\omega \in \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}}$ beschränkt. Wir müssen somit nur noch die Stetigkeit von $\mathbb{L}$ nachweisen. Satz 4.34 liefert die Stetigkeit von $\mathbb{L}$ auf $\mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$, so daß nur noch die Stetigkeit im Nullpunkt zu zeigen ist.
Die gegenteilige Annahme (Man vergleiche mit dem Beweis zu Satz 4.34.) liefert ein $\delta > 0$, eine Nullfolge $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$ und eine Datenfolge $\big((F_n, G_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ mit $\big\|(F_n, G_n)\big\|_{0,s,\Omega} = 1$ sowie zugehörige Folgen von Lösungen

- $(e_n, h_n) := \mathcal{L}_{\omega_n}(F_n, G_n)$,
- $(\hat{e}_n, \hat{h}_n) := \mathcal{L}_0(F_n, G_n)$,

so daß für alle n

$$\big\|(e_n, h_n) - (\hat{e}_n, \hat{h}_n)\big\|_{\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}_{\tilde{t}}^q(\Omega) \times \mathbf{D}_{\tilde{t}}^{q+1}(\Omega)} \geq \delta \tag{7.6}$$

gilt. Dann sind (e_n, h_n) nach Satz 7.3 (i) und $(\hat{e}_n, \hat{h}_n)$ nach Satz 6.39 und damit auch

$$(E_n, H_n) := (e_n, h_n) - (\hat{e}_n, \hat{h}_n)$$

gleichmäßig bzgl. n in $\big(\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}_t^q(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathbf{D}_t^q(\Omega)\big) \times \big(\mu^{-1}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}_t^{q+1}(\Omega) \cap \mathbf{D}_t^{q+1}(\Omega)\big)$ beschränkt. Es gilt sogar

$$(e_n, h_n), (\hat{e}_n, \hat{h}_n), (E_n, H_n) \in \big(\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}_t^q(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathbf{D}_t^q(\Omega)\big) \times \big(\mu^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}_t^{q+1}(\Omega) \cap \mathbf{D}_t^{q+1}(\Omega)\big) \quad .$$

Die LMKE liefert eine in $\mathrm{L}_{<t}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_{<t}^{2,q+1}(\Omega)$ konvergente Teilfolge von $\big((E_n, H_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, welche wir wieder $\big((E_n, H_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ nennen. Für diese Teilfolge (sogar für die ursprüngliche Folge) gilt

$$M(E_n, H_n) = -\operatorname{i}\omega_n \Lambda(e_n, h_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0) \qquad \text{in} \qquad \mathrm{L}_t^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_t^{2,q+1}(\Omega)$$

und deshalb konvergiert diese Teilfolge sogar in $\big(\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}_{<t}^q(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}{}_0\mathbf{D}_{<t}^q(\Omega)\big) \times \big(\mu^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}_{<t}^{q+1}(\Omega) \cap \mathbf{D}_{<t}^{q+1}(\Omega)\big)$ gegen ein

$$(E, H) \in {}_\varepsilon\mathcal{H}_{\geq -\frac{N}{2}}^q(\Omega) \times \mu^{-1}{}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}_{\geq -\frac{N}{2}}^{q+1}(\Omega) \overset{\text{Lemma 6.22}}{=} {}_\varepsilon\mathcal{H}^q(\Omega) \times \mu^{-1}{}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}(\Omega) \quad .$$

Desweiteren haben wir per Definition $(\hat{e}_n, \hat{h}_n) \in \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} \times \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^{\perp_\mu}$ und wegen der Beziehung

$$\operatorname{i}\omega_n \Lambda(e_n, h_n) = (F_n, G_n) - M(e_n, h_n) \in \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^{\perp} \times \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^{\perp}$$

folgt die gleiche Orthogonalität auch für (e_n, h_n). Daher gilt $(E_n, H_n) \in \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} \times \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^{\perp_\mu}$ und dies vererbt sich zu

$$(E, H) \in \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} \times \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^{\perp_\mu} \quad .$$

Nach Lemma 6.31 muß (E, H) folglich verschwinden. Da $\tilde{t} < t$, steht dies aber im Widerspruch zu (7.6) und damit zur Annahme. ■

Nun können wir mit der eigentlichen Niederfrequenzasymptotik beginnen.

7.2 Der Raum der regulären Konvergenz und Projektoren auf diesen

Wir wollen nun rekursiv spezielle Datenräume definieren. Dazu benutzen wir die Definition von $\mathrm{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ in (7.4) als `Rekursionsanfang` und nennen diesen den „Raum der regulären Konvergenz 0–ter Stufe”. Mit Hilfe des Korollars 6.50 kommen wir zu folgendem `Rekursionsschritt`:

Definition 7.7
Seien $\mathbf{J} \in \mathbb{N}$ *und* $s \in (\mathbf{J} - N/2, \infty) \setminus \mathbb{I}$ *. Wir definieren für* $j = 1, \ldots, \mathbf{J}$ *den „Raum der regulären Konvergenz* j*–ter Stufe” durch die Rekursion*

$$\mathrm{Reg}_s^{q,j}(\Omega) := \big\{(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,j-1}(\Omega) : \mathcal{L}^j(F,G) \in \mathrm{Reg}_{s-j}^{q,0}(\Omega)\big\} \qquad .$$

Bemerkung 7.8

(i) *In obiger Definition könnten wir den Rekursionsschritt auch durch*

$$\mathrm{Reg}_s^{q,j}(\Omega) := \big\{(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,j-1}(\Omega) : \mathcal{L}^j(F,G) \in \mathrm{L}_{s-j}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_{s-j}^{2,q+1}(\Omega)\big\}$$

ersetzen.

(ii) *Der Raum der regulären Konvergenz* $\mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega)$ *ist dadurch charakterisiert, daß für* $(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega)$ *bei keiner Iterierten* $\mathcal{L}^j(F,G)$ *,* $j = 0, \ldots, \mathbf{J}$ *, Turmformen* $\eta^- D_{\sigma,m}^{q,k}$ *oder* $\eta^- R_{\gamma,n}^{q+1,\ell}$ *auftreten.*

(iii) *Nach Korollar 6.50 können wir für* $j = 0, \ldots, \mathbf{J}$ *die Räume der regulären Konvergenz* j*–ter Stufe auch dann einführen, wenn wir die Voraussetzung* **(iv′)** *zu* **(iv)** *mit*

$$\tau > \max\{0, s - N/2\} \qquad \textit{und} \qquad \tau \geq \mathbf{J} - s - 1$$

abschwächen.

Nun können wir zeigen, daß auf $\mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega)$ für $\mathcal{L}_\omega$ die „verallgemeinerte Resolventenformel”, wie sie für $(\mathcal{M}-\omega)^{-1}$ in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt, bis zur Ordnung $\mathbf{J}$ erfüllt ist. Damit können wir dann nachweisen, daß $\mathcal{L}_\omega$ durch die „übliche Neumannsche Reihe” bis zur Ordnung $\mathbf{J}$ approximiert wird.

Satz 7.9
Seien $\mathbf{J} \in \mathbb{N}_0$ *und* $s \in (\mathbf{J} + 1/2, \infty) \setminus \mathbb{I}$ *. Dann gelten für alle* $\omega \in \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$ *und alle* $(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega)$ *die Gleichungen*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\omega(F,G) &= \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1} (-\mathrm{i}\,\omega)^j \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^j(F,G) + (-\mathrm{i}\,\omega)^{\mathbf{J}} \mathcal{L}_\omega \mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \\ &= \sum_{j=0}^{\mathbf{J}} (-\mathrm{i}\,\omega)^j \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^j(F,G) + (-\mathrm{i}\,\omega)^{\mathbf{J}} (\mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}_0) \mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G)\end{aligned}$$

und für $s \in (\mathbf{J} + 1/2, \mathbf{J} + N/2) \setminus \mathbb{I}$ *sowie* $\tilde{t} < t := s - \mathbf{J} - (N+1)/2$ *gleichmäßig bzgl.* $(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega)$ *die Abschätzungen*

$$\textbf{(i)} \qquad \Big\| \mathcal{L}_\omega(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1} (-\mathrm{i}\,\omega)^j \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^j(F,G) \Big\|_{0,t,\Omega} = \mathcal{O}\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big) \cdot \big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad ,$$

$$\textbf{(ii)} \qquad \Big\| \mathcal{L}_\omega(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}} (-\mathrm{i}\,\omega)^j \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^j(F,G) \Big\|_{0,\tilde{t},\Omega} = o\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big) \cdot \big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad .$$

Bemerkung 7.10
Auch hier können wir die Voraussetzung **(iv′)** *zu* **(iv)** *mit*

$$\tau > \max\big\{(N+1)/2, s - N/2\big\}$$

abschwächen.

Beweis:
Für (F,G) mit

$$\mathcal{L}^j(F,G) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_{s-j}(\Omega) \subset \mathrm{L}^{2,q}_{>\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{>\frac{1}{2}}(\Omega) \qquad , \qquad j = 0,\ldots,\mathbf{J} \qquad ,$$

ist $\mathcal{L}_\omega \mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G)$ nach Satz 4.29 wohldefiniert. Damit ist auch

$$(E,H) := \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-1} (-\mathrm{i}\,\omega)^j \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^j(F,G) + (-\mathrm{i}\,\omega)^{\mathbf{J}} \mathcal{L}_\omega \mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \tag{7.7}$$

wohldefiniert und wegen $s > \mathbf{J}+1/2 > \mathbf{J}+1-N/2$ können wir nach Korollar 6.50 $\mathcal{L}$ sogar $(\mathbf{J}+1)$–mal iterieren und sehen

$$(E,H) = \sum_{j=0}^{\mathbf{J}} (-\mathrm{i}\,\omega)^j \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^j(F,G) + (-\mathrm{i}\,\omega)^{\mathbf{J}} (\mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}_0) \mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \qquad . \tag{7.8}$$

(E,H) ist ein Element von $\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_{<-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)$ und erfüllt die Strahlungsbedingung. Wir beachten $M\mathcal{L}_0 = \mathrm{Id}$ und $(M+\mathrm{i}\,\omega\Lambda)\mathcal{L}_\omega = \mathrm{Id}$, wenden $(M+\mathrm{i}\,\omega\Lambda)$ auf (7.7) an und erhalten $(M+\mathrm{i}\,\omega\Lambda)(E,H) = (F,G)$, also $(E,H) = \mathcal{L}_\omega(F,G)$.
Für $s \in (\mathbf{J}+1/2, \mathbf{J}+N/2) \setminus \mathbb{I}$ gilt $s - \mathbf{J} \in (1/2, N/2)$. Daher können wir Satz 7.3 (i) auf $\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_{s-\mathbf{J}}(\Omega)$ anwenden und erhalten für den Korrekturterm $\mathcal{L}_\omega \mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G)$ in (7.7) gleichmäßig bzgl. $\omega \in \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$ und $(F,G) \in \mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s(\Omega)$ die Abschätzung

$$\left\| \mathcal{L}_\omega \mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \right\|_{0,t,\Omega} \leq c \cdot \left\| \mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \right\|_{0,s-\mathbf{J},\Omega} \leq c \cdot \left\| (F,G) \right\|_{0,s,\Omega} \qquad ,$$

denn nach Korollar 6.50 ist $\mathcal{L}^{\mathbf{J}}$ stetig. Mit Korollar 7.5 können wir in (7.8) den entsprechenden Korrekturterm $(\mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}_0)\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G)$ wiederum gleichmäßig bzgl. $\omega \in \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$ und $(F,G) \in \mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s(\Omega)$ durch

$$\left\| (\mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}_0)\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \right\|_{0,\tilde{t},\Omega} \leq \| \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}_0 \|_{B_{s-\mathbf{J},\tilde{t}}} \cdot \left\| \mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \right\|_{0,s-\mathbf{J},\Omega} \leq c \cdot \underbrace{\| \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}_0 \|_{B_{s-\mathbf{J},\tilde{t}}}}_{\xrightarrow{\omega \to 0} 0} \cdot \left\| (F,G) \right\|_{0,s,\Omega}$$

abschätzen. (7.7) und (7.8) liefern dann die behaupteten Abschätzungen. ∎

Wir wollen nun $\mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s(\Omega)$ durch Orthogonalitätsbedingungen charakterisieren und sodann Projektoren auf diesen konstruieren. Diese ermöglichen uns dann den Zugang zur exakten Bestimmung der Niederfrequenzasymptotik auf $\mathrm{Reg}^{q,0}_s(\Omega)$.

Lemma 7.11
Für $\sigma \in \mathbb{N}_0$ und $(m,n) \in \{1,\ldots,\mu^q_\sigma\} \times \{1,\ldots,\mu^{q+1}_\sigma\}$ sind die „speziellen wachsenden Dirichlet–Formen"

- $E_{\sigma,m} := \left(\mathrm{Id} - \mathfrak{Max}_\varepsilon^{-1} \mathfrak{Max}_\varepsilon \right) \eta\, {}^+D^{q,0}_{\sigma,m} \qquad ,$
- $H_{\sigma,n} := \left(\mathrm{Id} - {}_\mu\mathfrak{Max}^{-1}\, {}_\mu\mathfrak{Max} \right) \eta\, {}^+R^{q+1,0}_{\sigma,n}$

wohldefiniert und diese sind die eindeutigen Lösungen der folgenden statischen Probleme:

- $E_{\sigma,m} \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{<-\frac{N}{2}-\sigma}(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon} \qquad , \qquad E_{\sigma,m} - {}^+D^{q,0}_{\sigma,m} \in \mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega)$
- $H_{\sigma,n} \in \left(\mu^{-1}\, {}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}_{<-\frac{N}{2}-\sigma}(\Omega) \right) \cap \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^{\perp_\mu} \qquad , \qquad H_{\sigma,n} - {}^+R^{q+1,0}_{\sigma,n} \in \mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega)$

Bemerkung 7.12

(i) *Wir benutzen hier einerseits $\mathfrak{Max}_\varepsilon$ bzw. ${}_\mu\mathfrak{Max}$ als formale Abbildung und andererseits $\mathfrak{Max}_\varepsilon^{-1}$ bzw. ${}_\mu\mathfrak{Max}^{-1}$ als die Inverse des Operators aus Satz 6.36.*

(ii) *Auch dieses Lemma bleibt richtig, wenn wir die Voraussetzung* **(iv′)** *durch* **(iv)** *mit*

$$\tau > \sigma \qquad \textit{und} \qquad \tau \geq N/2 - 1$$

ersetzen.

Beweis:
Wir führen den Beweis wieder im allgemeineren Fall der Voraussetzung **(iv)**.
Die Eindeutigkeit der statischen Probleme ist durch Lemma 6.22 und Lemma 6.31 gesichert. Wir müssen nur noch die Wohldefiniertheit der Formen $E_{\sigma,m}$ bzw. $H_{\sigma,n}$ zeigen, denn aus

$$\mathfrak{Max}_\varepsilon E_{\sigma,m} = (0,0,0) \qquad \text{bzw.} \qquad {}_\mu\mathfrak{Max}\, H_{\sigma,n} = (0,0,0)$$

folgt $E_{\sigma,m} \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{<-\frac{N}{2}-\sigma}(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon}$ bzw. $H_{\sigma,n} \in \big(\mu^{-1}{}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}_{<-\frac{N}{2}-\sigma}(\Omega)\big) \cap \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^{\perp_\mu}$ und damit die Existenz der statischen Probleme, weil der Definitionsbereich der Operatoren $\mathfrak{Max}_\varepsilon$ bzw. ${}_\mu\mathfrak{Max}$ in $\mathrm{L}^{2,q}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega)$ bzw. $\mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega)$ liegt.
Wegen Grundvoraussetzung **(ii)** $\big(\operatorname{supp}\eta \cap \operatorname{supp}\mathring{b}^q_\ell = \emptyset\big)$ folgt mit Bemerkung 5.24

$$\begin{aligned}\mathfrak{Max}_\varepsilon \eta^+ D^{q,0}_{\sigma,m} &= \big(\operatorname{div}(\varepsilon\eta^+ D^{q,0}_{\sigma,m}), \operatorname{rot}(\eta^+ D^{q,0}_{\sigma,m}), 0\big)\\ &= \big(C_{\operatorname{div},\eta}{}^+D^{q,0}_{\sigma,m} + \operatorname{div}(\hat{\varepsilon}\eta^+ D^{q,0}_{\sigma,m}), C_{\operatorname{rot},\eta}{}^+D^{q,0}_{\sigma,m}, 0\big)\\ &\in \big(\mathrm{L}^{2,q-1}_{<-\sigma-\frac{N}{2}+\tau+1}(\Omega) \cap \mathcal{F}^{q-1}(\Omega)\big) \times \big(\mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{vox}}(\Omega) \cap \mathcal{G}^{q+1}(\Omega)\big) \times \{0\} \qquad .\end{aligned}$$

Da $\tau > \sigma$, gilt $-\sigma - N/2 + \tau + 1 > 1 - N/2$ und damit

$$\mathfrak{Max}_\varepsilon \eta^+ D^{q,0}_{\sigma,m} \in \mathcal{W}^q_{>1-\frac{N}{2}}(\Omega) \qquad .$$

Mit $\tau \geq N/2-1$ (vgl. mit Satz 6.38) sind dann nach Satz 6.36 $\mathfrak{Max}_\varepsilon^{-1}\mathfrak{Max}_\varepsilon \eta^+ D^{q,0}_{\sigma,m}$ und somit $E_{\sigma,m}$ wohldefiniert.
An dieser Stelle wollen wir anmerken, daß für $\tau > s + \sigma + N/2 - 1$

$$\mathfrak{Max}_\varepsilon \eta^+ D^{q,0}_{\sigma,m} \in \mathcal{W}^q_s(\Omega) \tag{7.9}$$

gilt.
Ein analoges Argument liefert auch die Wohldefiniertheit der Formen $H_{\sigma,n}$. ■

Lemma 7.13
Seien $\mathbf{J}, \sigma \in \mathbb{N}_0$, $(m,n) \in \{1,\dots,\mu^q_\sigma\} \times \{1,\dots,\mu^{q+1}_\sigma\}$ *und* $s \in (\mathbf{J}+1-N/2, \infty) \setminus \mathbb{I}$ *sowie* $j \in \{0,\dots,\mathbf{J}\}$ *. Dann sind* $\mathbf{J}$ *Iterationen von* $\mathcal{L}$ *auf den Formen* $E_{\sigma,m}$ *und* $H_{\sigma,n}$ *wohldefiniert und es gelten für gerade* j

- $\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\sigma,m},0) - \eta({}^+D^{q,j}_{\sigma,m}, 0) \in \big(\mathrm{D}^q_{s-j-1}(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}^{\leq j}_{s-j-1})\big) \times \{0\}$,
- $\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\sigma,n}) - \eta(0, {}^+R^{q+1,j}_{\sigma,n}) \in \{0\} \times \big(\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-j-1}(\Omega) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}^{\leq j}_{s-j-1})\big)$

sowie für ungerade j

- $\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\sigma,m},0) - \eta(0, {}^+R^{q+1,j}_{\sigma,m}) \in \{0\} \times \big(\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-j-1}(\Omega) \oplus \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathfrak{J}^{\leq j}_{s-j-1})\big)$,
- $\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\sigma,n}) - \eta({}^+D^{q,j}_{\sigma,n}, 0) \in \big(\mathrm{D}^q_{s-j-1}(\Omega) \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathfrak{I}^{\leq j}_{s-j-1})\big) \times \{0\}$.

Desweiteren haben wir

$$\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\sigma,m},0), \mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\sigma,n}) \in \mathrm{L}^{2,q}_{<-\sigma-j-\frac{N}{2}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{<-\sigma-j-\frac{N}{2}}(\Omega)$$

und somit

$$\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\sigma,m},0), \mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\sigma,n}) \in \mathrm{L}^{2,q}_{-t}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{-t}(\Omega) \qquad \Leftrightarrow \qquad t > \sigma + j + N/2 \qquad .$$

Genauer: Es existieren eindeutige Konstanten $\xi^{j,\sigma,\cdot}_{\cdot}, \zeta^{j,\sigma,\cdot}_{\cdot} \in \mathbb{C}$ *und eindeutige Formen*

$$e^j_{\sigma,\cdot} \in \big(\varepsilon\mathring{\mathrm{R}}^q_{s-j-1}(\Omega)\big) \cap \mathrm{D}^q_{s-j-1}(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^\perp \quad \textit{bzw.} \quad h^j_{\sigma,\cdot} \in \big(\mu\mathrm{D}^{q+1}_{s-j-1}(\Omega)\big) \cap \mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-j-1}(\Omega) \cap \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^\perp \qquad ,$$

so daß für gerade j

- $$\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\sigma,m},0) = \eta({}^+D^{q,j}_{\sigma,m},0) + \sum_{I\in\mathcal{I}^{\leq j}_{s-j-1}} \xi^{j,\sigma,m}_I \cdot \eta(D^q_I,0) + (e^j_{\sigma,m},0) \quad ,$$
- $$\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\sigma,n}) = \eta(0,{}^+R^{q+1,j}_{\sigma,n}) + \sum_{J\in\mathcal{J}^{\leq j}_{s-j-1}} \zeta^{j,\sigma,n}_J \cdot \eta(0,R^{q+1}_J) + (0,h^j_{\sigma,n})$$

und für ungerade j

- $$\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\sigma,m},0) = \eta(0,{}^+R^{q+1,j}_{\sigma,m}) + \sum_{J\in\mathcal{J}^{\leq j}_{s-j-1}} \zeta^{j,\sigma,m}_J \cdot \eta(0,R^{q+1}_J) + (0,h^j_{\sigma,m}) \quad ,$$
- $$\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\sigma,n}) = \eta({}^+D^{q,j}_{\sigma,n},0) + \sum_{I\in\mathcal{I}^{\leq j}_{s-j-1}} \xi^{j,\sigma,n}_I \cdot \eta(D^q_I,0) + (e^j_{\sigma,n},0)$$

gelten.

Bemerkung 7.14

(i) *Dieses Lemma gilt ebenso, wenn wir die Voraussetzung* **(iv′)** *zu* **(iv)** *mit*

$$\tau > \sigma + s + N/2 - 1 \qquad \text{und} \qquad \tau \geq \mathbf{J} - s$$

lockern.

(ii) *Nach Bemerkung 5.17 gelten für ungerade $j \leq \mathbf{J}$ sogar*

- $$\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\sigma,m},0) - \eta(0,{}^+R^{q+1,j}_{\sigma,m}) \in \{0\} \times \mathbf{G}^{q+1}_{s-j-1}\big(\mathcal{J}^{\leq j}_{s-j-1}\big) \quad ,$$
- $$\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\sigma,n}) - \eta({}^+D^{q,j}_{\sigma,n},0) \in \mathbf{F}^q_{s-j-1}\big(\mathcal{I}^{\leq j}_{s-j-1}\big) \times \{0\} \quad ,$$

denn $\eta^+R^{q+1,j}_{\sigma,m}$ ist rotations– und $\eta^+D^{q,j}_{\sigma,n}$ divergenzfrei.

(iii) *Weiterhin genügen die Koeffizienten der Rekursion*

- $\zeta^{j+1,\sigma,\nu}_{I_+} = \xi^{j,\sigma,\nu}_I \quad , \quad I \in \mathcal{I}^{\leq j}_{s-j-1} \quad , \quad \nu = m,n \quad ,$
- $\xi^{j+1,\sigma,\nu}_{J_+} = \zeta^{j,\sigma,\nu}_J \quad , \quad J \in \mathcal{J}^{\leq j}_{s-j-1} \quad , \quad \nu = m,n$

und damit auch

- $\xi^{j+2,\sigma,\nu}_{I_2} = \xi^{j,\sigma,\nu}_I \quad , \quad I \in \mathcal{I}^{\leq j}_{s-j-1} \quad , \quad \nu = m,n \quad ,$
- $\zeta^{j+2,\sigma,\nu}_{J_2} = \zeta^{j,\sigma,\nu}_J \quad , \quad J \in \mathcal{J}^{\leq j}_{s-j-1} \quad , \quad \nu = m,n \quad .$

Beweis:
Wir beweisen die Behauptungen wieder im allgemeineren Fall der Grundvoraussetzung **(iv)**.
Wenn wir zeigen können, daß $\mathcal{L}$ auf $\Lambda(E_{\sigma,m},0)$ bzw. $\Lambda(0,H_{\sigma,n})$ anwendbar ist, folgen die Behauptungen bzgl. der Darstellungen mit Satz 6.48 sowie Bemerkung 6.49 und diejenigen bzgl. der Integrierbarkeit mit Bemerkung 5.24, da die Türme ${}^+D^{q,j}_{\sigma,\nu}$ und ${}^+R^{q+1,j}_{\sigma,\nu}$ die Integrierbarkeit bestimmen.
zu $E_{\sigma,m}$ **:** Nach Lemma 7.11 mit (7.9) und Satz 6.36 sowie (6.26) haben wir

$$E_{\sigma,m} \in \Big(\varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega) \oplus \eta^+\mathcal{D}^{q,0}_{\sigma,m} \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathcal{I}^0_{s-1}) \oplus \underbrace{\eta\mathcal{A}^q_{s-1}}_{\substack{\text{nur für}\\ s\geq N/2}}\Big) \cap \mathcal{F}^q_\varepsilon(\Omega) \quad .$$

Da $\tau > \sigma + s + N/2 - 1$, liefert Bemerkung 5.24

$$\varepsilon E_{\sigma,m} \in \Big(\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega) \oplus \eta^+\mathcal{D}^{q,0}_{\sigma,m} \oplus \eta\mathcal{D}^q(\mathcal{I}^0_{s-1}) \oplus \underbrace{\eta\mathcal{A}^q_{s-1}}_{\substack{\text{nur für}\\ s\geq N/2}}\Big) \cap \mathcal{F}^q(\Omega) \quad .$$

Träte die Ausnahmeform A^q_{s-1} hier nicht auf $\big($vgl. mit Satz 6.39, Lemma 6.41, Bemerkung 6.42, Lemma 6.43 und Bemerkung 6.44$\big)$, so würde

$$\Lambda(E_{\sigma,m},0) = (\varepsilon E_{\sigma,m},0) \in \mathbf{F}^q_{s-1}\Big(\big\{(0,\sigma,m,+)\big\} \cup \mathcal{I}^0_{s-1}\Big) \times \{0\}$$

gelten und $\mathcal{L}^j$ wäre nach Satz 6.48 auf $\Lambda(E_{\sigma,m},0)$ anwendbar.
Zeigen wir also noch, daß auch im Fall $s \geq N/2$ und $q = 1$ die Ausnahmeform nicht vorkommt. Dazu machen wir den Ansatz

$$U_{\sigma,m} := \eta^+ R^{2,1}_{\sigma,m} + u_{\sigma,m} \qquad ,$$

um eine Lösung des Problems

$$\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{div} U_{\sigma,m} = 0 \qquad , \qquad U_{\sigma,m} - {}^+R^{2,1}_{\sigma,m} \in \mathrm{L}^{2,2}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega)$$

zu finden. Dies führt zur Bestimmung einer Lösung des Problems

$$\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{div} u_{\sigma,m} = - \operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{div} \eta^+ R^{2,1}_{\sigma,m} \qquad , \qquad u_{\sigma,m} \in \mathrm{L}^{2,2}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega) \qquad . \tag{7.10}$$

Nun gilt aber mit Bemerkung 5.24 und der Voraussetzung $\tau > \sigma + s + N/2 - 1$

$$\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{div} \eta^+ R^{2,1}_{\sigma,m} = C_{\operatorname{rot}\operatorname{div},\eta}{}^+ R^{2,1}_{\sigma,m} + \operatorname{rot} \hat{\hat{\varepsilon}} \operatorname{div} \eta^+ R^{2,1}_{\sigma,m} \in \mathrm{L}^{2,2}_{<-\sigma-\frac{N}{2}+\tau+1}(\Omega) \subset \mathrm{L}^{2,2}_s(\Omega)$$

und somit

$$\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{div} \eta^+ R^{2,1}_{\sigma,m} \in {}_0\mathring{\mathrm{R}}^2_s(\Omega) \cap \mathcal{H}^2(\Omega)^\perp = W(\Delta_{\mathrm{rot}}) \qquad .$$

Lemma 6.52 liefert hierzu eine Form

$$u_{\sigma,m} \in \mathrm{Y}^2_{s-2}(\Omega) \oplus {}_\eta\tilde{\mathcal{R}}^2_{s-2}$$

mit (7.10). Dann ist (vgl. mit dem Beweis zur Bemerkung 6.54)

$$\tilde{E}_{\sigma,m} := \operatorname{div} U_{\sigma,m} \in \big(\mathrm{D}^1_{s-1}(\Omega) \oplus \eta^+ \mathcal{D}^{1,0}_{\sigma,m} \oplus \eta\mathcal{D}^1(\mathcal{I}^0_{\leq s-1})\big) \cap \mathcal{F}^1(\Omega)$$

und

$$\varepsilon^{-1}\tilde{E}_{\sigma,m} \in {}_\varepsilon\mathcal{H}^1_{<-\frac{N}{2}-\sigma}(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{B}}^1(\Omega)^{\perp_\varepsilon} \qquad , \qquad \varepsilon^{-1}\tilde{E}_{\sigma,m} - {}^+D^{1,0}_{\sigma,m} \in \mathrm{L}^{2,1}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega) \qquad ,$$

d. h. $\varepsilon^{-1}\tilde{E}_{\sigma,m} = E_{\sigma,m}$ nach Lemma 7.11. Damit besitzt $\varepsilon E_{\sigma,m}$ für alle q tatsächlich keine Ausnahmekomponente A^q_{s-1} .
Analog zeigen wir die Behauptungen über $H_{\sigma,n}$. ∎

Wir wollen an dieser Stelle unsere Schreibweise für Indexmengen erweitern und definieren für $k, \ell, K, L \in \mathbb{N}_0$

- $\mathcal{I}^k_\infty := \bigcup\limits_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{I}^k_s \qquad , \qquad \mathcal{I}^{\leq K}_\infty := \bigcup\limits_{k=0}^{K} \mathcal{I}^k_\infty \qquad ,$
- $\mathcal{J}^\ell_\infty := \bigcup\limits_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{J}^\ell_s \qquad , \qquad \mathcal{J}^{\leq L}_\infty := \bigcup\limits_{\ell=0}^{L} \mathcal{J}^\ell_\infty \qquad .$

Diese neuen Indexmengen sind einfach

$$\mathcal{I}^{\leq K}_\infty = \big\{(k,\gamma,\nu,-) \in \hat{\mathcal{I}} : k \leq K\big\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{J}^{\leq L}_\infty = \big\{(\ell,\gamma,\nu,-) \in \hat{\mathcal{J}} : \ell \leq L\big\} \qquad .$$

Korollar 7.15
Seien $\mathbf{J}, \sigma \in \mathbb{N}_0$ *und* $(m,n) \in \{1,\ldots,\mu^q_\sigma\} \times \{1,\ldots,\mu^{q+1}_\sigma\}$ *sowie* $j \in \{0,\ldots,\mathbf{J}\}$ *. Dann existieren eindeutige Konstanten* $\xi^{j,\sigma,\cdot}_\cdot, \zeta^{j,\sigma,\cdot}_\cdot \in \mathbb{C}$ *, so daß auf* $\operatorname{supp}\eta$ *für gerade* j

- $\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\sigma,m},0) = ({}^+D^{q,j}_{\sigma,m},0) + \sum\limits_{I\in\mathcal{I}^{\leq j}_\infty} \xi^{j,\sigma,m}_I \cdot (D^q_I,0) \qquad ,$
- $\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\sigma,n}) = (0,{}^+R^{q+1,j}_{\sigma,n}) + \sum\limits_{J\in\mathcal{J}^{\leq j}_\infty} \zeta^{j,\sigma,n}_J \cdot (0,R^{q+1}_J)$

und für ungerade j

- $\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\sigma,m},0) = (0, {}^+R^{q+1,j}_{\sigma,m}) + \sum_{J\in\mathfrak{J}^{\leq j}_{\infty}} \zeta^{j,\sigma,m}_J \cdot (0, R^{q+1}_J)$,
- $\mathcal{L}^j\Lambda(0,H_{\sigma,n}) = ({}^+D^{q,j}_{\sigma,n},0) + \sum_{I\in\mathfrak{I}^{\leq j}_{\infty}} \xi^{j,\sigma,n}_I \cdot (D^q_I,0)$

gelten. Diese Reihen haben dasselbe Konvergenzverhalten wie diejenigen aus Satz 2.8 bzw. Satz 5.22, d. h. sie konvergieren gleichmäßig auf $\operatorname{supp}\eta$ *mitsamt allen Ableitungen auch nach Multiplikation mit beliebigen r–Potenzen. Die Konstanten $\xi^{j,\sigma,\cdot}_{\cdot}$ und $\zeta^{j,\sigma,\cdot}_{\cdot}$ sind hierbei dieselben wie diejenigen in Lemma 7.13, wann immer sie gemeinsam auftreten.*

Beweis:
Wir zeigen die Darstellung für ein gerades j und $\mathcal{L}^j\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big|_{\operatorname{supp}\eta}$. Die anderen drei Formeln erhalten wir dann analog.
Zunächst einmal gilt für $(E,0) := \mathcal{L}^j\Lambda(E_{\sigma,m},0)$ in Ω

$$\operatorname{div} E = 0 \qquad \text{und} \qquad (M\Lambda^{-1})^{j+1}(E,0) = (0,0) \qquad ,$$

d. h. in $\operatorname{supp}\eta$

$$\operatorname{div} E = 0 \qquad \text{und} \qquad M^{j+1}(E,0) = (0,0) \qquad .$$

Für $\mathbf{J} + N/2 \leq s \notin \mathbb{I}$ gilt nach Lemma 7.13

$$\tilde{E} := E - {}^+D^{q,j}_{\sigma,m} - \sum_{I\in\mathfrak{I}^{\leq j}_{s-j-1}} \xi^{j,\sigma,m}_I \cdot D^q_I \in \mathrm{L}^{2,q}_{s-j-1}(\operatorname{supp}\eta) \subset \mathrm{L}^{2,q}_{\frac{N}{2}-1}(\operatorname{supp}\eta)$$

und

$$\operatorname{div}\tilde{E}\Big|_{\operatorname{supp}\eta} = 0 \quad \text{und} \quad M^{j+1}\,(\tilde{E},0)\Big|_{\operatorname{supp}\eta} = (0,0) \qquad .$$

Also liefert Satz 5.22 mit eindeutigen Konstanten $\xi^{j,\sigma,m}_{\cdot} \in \mathbb{C}$ die Darstellung

$$\tilde{E}\Big|_{\operatorname{supp}\eta} = \sum_{\substack{0\leq\ell\leq j\,,\\ \gamma>s-j-1-\frac{N}{2}+\ell\,,\\ 1\leq\nu\leq\mu^{q,\ell}_{\gamma}}} \xi^{j,\sigma,m}_{\ell,\gamma,\nu} \cdot {}^-D^{q,\ell}_{\gamma,\nu} \overset{(6.23)}{=} \sum_{I\in\mathfrak{I}^{\leq j}_{\infty}\setminus\mathfrak{I}^{\leq j}_{s-j-1}} \xi^{j,\sigma,m}_I \cdot D^q_I$$

und damit die Behauptung. ∎

Unser Nahziel ist nun die Charakterisierung von $\operatorname{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s(\Omega)$ durch Orthogonalitätsbedingungen. Einen ersten Schritt dorthin machen wir im

Lemma 7.16
Sei $s \in (2-N/2,\infty)\setminus\mathbb{I}$ und $(F,G) \in \operatorname{Reg}^{q,0}_s(\Omega)$ besitze die Darstellung

$$\mathcal{L}_0(F,G) = (E,H) + \sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}} \mathtt{e}_I \cdot \eta(D^q_I,0) + \sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}} \mathtt{h}_J \cdot \eta(0,R^{q+1}_J)$$

mit $(E,H) \in \big(\mathring{\mathrm{R}}^q_{s-1}(\Omega) \cap \varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big) \times \big(\mu^{-1}\mathring{\mathrm{R}}^{q+1}_{s-1}(\Omega) \cap \mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big)$ und $\mathtt{e}_I, \mathtt{h}_J \in \mathbb{C}$.
Dann gelten für alle $I = (0,\sigma,m,-) \in \mathfrak{I}^0_{s-1}$ und $J = (0,\gamma,n,-) \in \mathfrak{J}^0_{s-1}$

- **(i)** $\big\langle (F,G),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega} = 0$,
- **(ii)** $\big\langle (F,G),(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_{\Omega} = 0$,
- **(iii)** $\big\langle (F,G),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega} = \mathtt{e}_I$,
- **(iv)** $\big\langle (F,G),\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_{\Omega} = \mathtt{h}_J$.

Bemerkung 7.17
Hier genügt es, $\hat{j} \geq 2(s+1)$ in (1.34) zu wählen.

Beweis:
Wenden wir uns zuerst den Dirichlet–Formen $(E_{\sigma,m},0)$ zu.
Für $(0,\sigma,m,-)\in\mathfrak{I}^0_{s-1}$ gilt $s>\sigma+1+N/2$, so daß wir nur Gewichte s mit

$$s>1+N/2$$

betrachten brauchen. Nach Lemma 7.13 sind

$$E_{\sigma,m}\in{}_{\varepsilon}\mathcal{H}^q_{-s+1}(\Omega)\subset{}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{-s+1}(\Omega)\qquad\text{und}\qquad\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\in\{0\}\times\mathrm{D}^{q+1}_{-s}(\Omega)\qquad.\tag{7.11}$$

Damit sind alle auftretenden Skalarprodukte wohldefiniert. Mit Lemma 4.23 und Lemma 7.11 erhalten wir

$$\big\langle M(E,H),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega=\langle\operatorname{div}H,E_{\sigma,m}\rangle_\Omega=0$$

und können so

$$\begin{aligned}&\big\langle(F,G),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega=\big\langle M\mathcal{L}_0(F,G),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega\\
=&\sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}}\mathtt{e}_I\cdot\underbrace{\big\langle M\eta(D^q_I,0),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega}_{=0}+\sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}}\mathtt{h}_J\cdot\big\langle M\eta\underbrace{(0,R^{q+1}_J)}_{=M(D^q_{J_+},0)},(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega\\
=&\sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}}\mathtt{h}_J\cdot\big\langle M^2\eta(D^q_{J_+},0),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega-\sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}}\mathtt{h}_J\cdot\big\langle MC_{M,\eta}(D^q_{J_+},0),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega\end{aligned}$$

bestimmen. Da der Kommutator $C_{M,\eta}$ kompakten Träger besitzt, verschwinden alle Summanden der zweiten Summe mit partieller Integration. Für $J=(0,\gamma,n,-)\in\mathfrak{J}^0_{s-1}$ gilt in der ersten Summe

$$\operatorname{div}\eta D^q_{J_+}=\operatorname{div}\eta^-D^{q,1}_{\gamma,n}=0$$

nach Bemerkung 5.17 und somit $M^2\eta(D^q_{J_+},0)=\Delta\eta(D^q_{J_+},0)=C(D^q_{J_+},0)$. Wir erhalten daher

$$\big\langle(F,G),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega=\sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}}\mathtt{h}_J\cdot\big\langle C(D^q_{J_+},0),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega\qquad.$$

Mit Satz 6.48, Bemerkung 6.49 und Korollar 6.50 ist unter den Voraussetzungen auch $\mathcal{L}_0\mathcal{L}(F,G)$ wohldefiniert und besitzt die Darstellung

$$\mathcal{L}_0\mathcal{L}(F,G)=(E^2,H^2)+\sum_{I\in\mathfrak{I}^{\le1}_{s-2}}\mathtt{e}^2_I\cdot\eta(D^q_I,0)+\sum_{J\in\mathfrak{J}^{\le1}_{s-2}}\mathtt{h}^2_J\cdot\eta(0,R^{q+1}_J)$$

mit $(E^2,H^2)\in\big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{s-2}(\Omega)\cap\varepsilon^{-1}\mathrm{D}^q_{s-2}(\Omega)\big)\times\big(\mu^{-1}\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{s-2}(\Omega)\cap\mathrm{D}^{q+1}_{s-2}(\Omega)\big)$ und $\mathtt{e}^2_I,\mathtt{h}^2_J\in\mathbb{C}$. Desweiteren gelten für $I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}$ und $J\in\mathfrak{J}^0_{s-1}$

$$\mathtt{h}^2_{I_+}=\mathtt{e}_I\qquad\text{und}\qquad\mathtt{e}^2_{J_+}=\mathtt{h}_J\qquad.$$

Es folgt $\Lambda^{-1}M(E^2,H^2)\in\big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_{s-1}(\Omega)\cap\varepsilon^{-1}{}_0\mathrm{D}^q_{s-1}(\Omega)\big)\times\big(\mu^{-1}{}_0\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\cap\mathrm{D}^{q+1}_{s-1}(\Omega)\big)$ und mit (7.11) sowie Lemma 4.23 erhalten wir

$$\big\langle M\Lambda^{-1}M(E^2,H^2),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega=-\big\langle M(E^2,H^2),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega=-\langle\operatorname{div}H^2,E_{\sigma,m}\rangle_\Omega=0\qquad.$$

Damit bestimmen wir

$$\begin{aligned}&\big\langle(F,G),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega=\big\langle M\Lambda^{-1}M\mathcal{L}_0\mathcal{L}(F,G),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega\\
=&\sum_{I\in\mathfrak{I}^{\le1}_{s-2}}\mathtt{e}^2_I\cdot\underbrace{\big\langle M^2\eta(D^q_I,0),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega}_{=0}+\sum_{J\in\mathfrak{J}^{\le1}_{s-2}}\mathtt{h}^2_J\cdot\big\langle M^2\eta(0,R^{q+1}_J),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega\\
=&\sum_{J\in\mathfrak{J}^0_{s-2}}\mathtt{h}^2_J\cdot\big\langle M^2\eta(0,R^{q+1}_J),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega+\sum_{I\in\mathfrak{I}^0_{s-1}}\mathtt{h}^2_{I_+}\cdot\big\langle M^2\eta(0,R^{q+1}_{I_+}),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega\qquad,\end{aligned}$$

denn $\mathfrak{J}^{\le1}_{s-2}=\mathfrak{J}^0_{s-2}\,\dot\cup\,\mathfrak{J}^1_{s-2}=\mathfrak{J}^0_{s-2}\,\dot\cup\,(\mathfrak{I}^0_{s-1})_+$. Wie zuvor gilt $M^2\eta(0,R^{q+1}_{I_+})=\Delta\eta(0,R^{q+1}_{I_+})=C(0,R^{q+1}_{I_+})$ nach Bemerkung 5.17 und desweiteren $M^2\eta(0,R^{q+1}_J)=M^2\eta M(D^q_{J_+},0)=MM^2\eta(D^q_{J_+},0)-M^2C_{M,\eta}(D^q_{J_+},0)$, also $M^2\eta(0,R^{q+1}_J)=MC(D^q_{J_+},0)-M^2C_{M,\eta}(D^q_{J_+},0)$ wiederum mit Bemerkung 5.17. Durch partielle Integration folgt dann

$$\big\langle MC(D^q_{J_+},0),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega=-\big\langle C(D^q_{J_+},0),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega$$

und durch zweifache partielle Integration verschwinden alle Summanden der Gestalt

$$\big\langle M^2 C_{M,\eta}(D^q_{J_+},0),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega \qquad .$$

Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}&\big\langle (F,G),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega\\ &= -\sum_{J\in\mathcal{J}^0_{s-2}} \mathtt{h}^2_J\cdot\big\langle C(D^q_{J_+},0),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega + \sum_{I\in\mathcal{I}^0_{s-1}} \mathtt{h}^2_{I_+}\cdot\big\langle C(0,R^{q+1}_{I_+}),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega \qquad .\end{aligned}$$

Fassen wir die Ergebnisse bis hierher zusammen: Für $(0,\sigma,m,-)\in\mathcal{I}^0_{s-1}$ gelten

- $$\big\langle (F,G),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega = \sum_{J\in\mathcal{J}^0_{s-1}} \mathtt{h}_J\cdot\langle CD^q_{J_+},E_{\sigma,m}\rangle_\Omega \qquad ,$$
- $$\begin{aligned}\big\langle (F,G),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega &= -\sum_{J\in\mathcal{J}^0_{s-2}} \mathtt{h}^2_J\cdot\langle CD^q_{J_+},E_{\sigma,m}\rangle_\Omega\\ &\quad + \sum_{I\in\mathcal{I}^0_{s-1}} \mathtt{h}^2_{I_+}\cdot\big\langle C(0,R^{q+1}_{I_+}),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega\end{aligned}$$

und völlig analog für $(0,\gamma,n,-)\in\mathcal{J}^0_{s-1}$

- $$\big\langle (F,G),(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_\Omega = \sum_{I\in\mathcal{I}^0_{s-1}} \mathtt{e}_I\cdot\langle CR^{q+1}_{I_+},H_{\gamma,n}\rangle_\Omega \qquad ,$$
- $$\begin{aligned}\big\langle (F,G),\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_\Omega &= -\sum_{I\in\mathcal{I}^0_{s-2}} \mathtt{e}^2_I\cdot\langle CR^{q+1}_{I_+},H_{\gamma,n}\rangle_\Omega\\ &\quad + \sum_{J\in\mathcal{J}^0_{s-1}} \mathtt{e}^2_{J_+}\cdot\big\langle C(D^q_{J_+},0),\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_\Omega \qquad .\end{aligned}$$

Alle auftretenden Integrale erstrecken sich nur noch über $\operatorname{supp}\nabla\eta$, so daß wir für

$$(E_{\sigma,m},0)\,,\ \mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\,,\ (0,H_{\gamma,n})\,,\ \mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})$$

die Entwicklungen aus Korollar 7.15 einsetzen können. Mit den Orthogonalitätseigenschaften aus Lemma 5.19 $\big($mit $K=1$ und $Z\leq s-1-N/2$, d. h. $\hat{j}\geq 2(s+1)\geq N+2+2K+2Z\big)$ sehen wir

$$\langle CD^q_{J_+},E_{\sigma,m}\rangle_\Omega = \langle CR^{q+1}_{I_+},H_{\gamma,n}\rangle_\Omega = 0$$

und

$$\big\langle C(0,R^{q+1}_{I_+}),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega = \delta_{I,(0,\sigma,m,-)} \qquad , \qquad \big\langle C(D^q_{J_+},0),\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_\Omega = \delta_{J,(0,\gamma,n,-)} \qquad .$$

Dies ergibt schließlich für $I=(0,\sigma,m,-)\in\mathcal{I}^0_{s-1}$

- $$\big\langle (F,G),(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega = 0 \qquad ,$$
- $$\big\langle (F,G),\mathcal{L}_0\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_\Omega = \mathtt{h}^2_{I_+} = \mathtt{e}_I$$

und für $J=(0,\gamma,n,-)\in\mathcal{J}^0_{s-1}$

- $$\big\langle (F,G),(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_\Omega = 0 \qquad ,$$
- $$\big\langle (F,G),\mathcal{L}_0\Lambda(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_\Omega = \mathtt{e}^2_{J_+} = \mathtt{h}_J \qquad .$$

$\blacksquare$

Lemma 7.18
Seien $\mathbf{J} \in \mathbb{N}$ *und* $s \in (\mathbf{J}+1-N/2,\infty) \setminus \mathbb{I}$ *. Dann gilt für* $(F,G) \in \operatorname{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$

$$(F,G) \in \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\bigwedge_{\substack{(k,\sigma,m)\in\Theta_s^{q,\mathbf{J}}\,,\\ (\ell,\gamma,n)\in\Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}}} \big\langle (F,G), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = \big\langle (F,G), \mathcal{L}^{\ell+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = 0 \qquad .$$

Hierbei seien

$$\Theta_s^{q,\mathbf{J}} := \big\{ (k,\sigma,m) \in \mathbb{N}_0^3 \,\boldsymbol{:}\, k \leq \mathbf{J}-1 \,\wedge\, \sigma < s - N/2 - k - 1 \,\wedge\, 1 \leq m \leq \mu_\sigma^q \big\}$$

und $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\Omega,\Lambda}$ *das* $\langle \Lambda\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\Omega$*–Skalarprodukt.*

Bemerkung 7.19

(i) *Wegen der obigen Charakterisierungen ist* $\operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega)$ *ein abgeschlossener Unterraum von* $\operatorname{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ *und* $\mathrm{L}_s^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_s^{2,q+1}(\Omega)$.

(ii) *Die Indexmengen lassen sich durch*

$$\Theta_s^{q,\mathbf{J}} = \big\{ (k,\sigma,m) \in \{0,\dots,\mathbf{J}-1\} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \,\boldsymbol{:}\, \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0) \in \mathrm{L}_{-s}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_{-s}^{2,q+1}(\Omega) \big\}$$

bzw.

$$\Theta_s^{q+1,\mathbf{J}} = \big\{ (\ell,\gamma,n) \in \{0,\dots,\mathbf{J}-1\} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \,\boldsymbol{:}\, \mathcal{L}^{\ell+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n}) \in \mathrm{L}_{-s}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_{-s}^{2,q+1}(\Omega) \big\}$$

charakterisieren.

Beweis:
Die Charakterisierung der Indexmengen folgt mit Lemma 7.13.
Den Rest wollen wir durch Induktion über $\mathbf{J}$ beweisen:
`Induktionsanfang` $(\mathbf{J}=1)$: Für $(F,G) \in \operatorname{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ sehen wir mit Lemma 7.16 und den dortigen Bezeichnungen

$$(F,G) \in \operatorname{Reg}_s^{q,1}(\Omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \bigwedge_{\substack{I\in\mathcal{I}_{s-1}^0\,,\\ J\in\mathcal{J}_{s-1}^0}} \mathtt{e}_I = \mathtt{h}_J = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \bigwedge_{\substack{(0,\sigma,m)\in\Theta_s^{q,1}\,,\\ (0,\gamma,n)\in\Theta_s^{q+1,1}}} \big\langle (F,G), \mathcal{L}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = \big\langle (F,G), \mathcal{L}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = 0 \qquad ,$$

denn $\Theta_s^{q,1} = \big\{ (0,\sigma,m) \,\boldsymbol{:}\, (0,\sigma,m,-) \in \mathcal{I}_{s-1}^0 \big\}$ und $\Theta_s^{q+1,1} = \big\{ (0,\gamma,n) \,\boldsymbol{:}\, (0,\gamma,n,-) \in \mathcal{J}_{s-1}^0 \big\}$.
`Induktionsschritt` $(\mathbf{J} \rightsquigarrow \mathbf{J}+1)$: Per Definition ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}+1}(\Omega) &= \big\{ (F,G) \in \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega) \,\boldsymbol{:}\, \mathcal{L}^{\mathbf{J}+1}(F,G) \in \operatorname{Reg}_{s-\mathbf{J}-1}^{q,0}(\Omega) \big\} \\ &= \big\{ (F,G) \in \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega) \,\boldsymbol{:}\, \mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \in \operatorname{Reg}_{s-\mathbf{J}}^{q,1}(\Omega) \big\} \qquad , \end{aligned}$$

so daß nach Induktionsanfang $(F,G) \in \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}+1}(\Omega)$ genau dann gilt, wenn

$$(F,G) \in \operatorname{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega)$$

$$\wedge \qquad \bigwedge_{\substack{(0,\sigma,m)\in\Theta_{s-\mathbf{J}}^{q,1}\,,\\ (0,\gamma,n)\in\Theta_{s-\mathbf{J}}^{q+1,1}}} \big\langle \mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G), \mathcal{L}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = \big\langle \mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G), \mathcal{L}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = 0$$

erfüllt ist. Aus $\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G) \in \operatorname{Reg}_{s-\mathbf{J}}^{q,1}(\Omega)$ folgt insbesondere

$$\mathcal{L}_0\mathcal{L}^{\mathbf{J}-1}(F,G) \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}_{s-\mathbf{J}}^{q}(\Omega) \times \mathrm{D}_{s-\mathbf{J}}^{q+1}(\Omega)$$

und mit Lemma 7.13 gilt

$$\Lambda^{-1}\mathcal{L}^2\Lambda(E_{\sigma,m},0) \in \overset{\circ}{\mathrm{R}}{}_{-s-1+\mathbf{J}}^{q}(\Omega) \times \{0\} \qquad ,$$

denn $(0,\sigma,m)\in\Theta^{q,1}_{s-\mathbf{J}}$ impliziert $\sigma<s-1-\mathbf{J}-N/2$, also $s+1-\mathbf{J}>\sigma+2+N/2$. Lemma 4.23 liefert

$$\begin{aligned}\big\langle\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G),\mathcal{L}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}&=\big\langle\mathcal{L}_0\mathcal{L}^{\mathbf{J}-1}(F,G),M\Lambda^{-1}\mathcal{L}^2\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega}\\&=-\big\langle\mathcal{L}^{\mathbf{J}-1}(F,G),\mathcal{L}^2\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}\end{aligned}$$

und wir erhalten induktiv

$$\big\langle\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G),\mathcal{L}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}=(-1)^{\mathbf{J}}\cdot\big\langle(F,G),\mathcal{L}^{\mathbf{J}+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}\qquad.$$

Analog ergeben ähnliche partielle Integrationen

$$\big\langle\mathcal{L}^{\mathbf{J}}(F,G),\mathcal{L}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}=(-1)^{\mathbf{J}}\cdot\big\langle(F,G),\mathcal{L}^{\mathbf{J}+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}\qquad.$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}&(F,G)\in\mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}+1}_s(\Omega)\quad\Longleftrightarrow\quad(F,G)\in\mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s(\Omega)\\\wedge\bigwedge_{\substack{(0,\sigma,m)\in\Theta^{q,1}_{s-\mathbf{J}},\\(0,\gamma,n)\in\Theta^{q+1,1}_{s-\mathbf{J}}}}&\big\langle(F,G),\mathcal{L}^{\mathbf{J}+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}=\big\langle(F,G),\mathcal{L}^{\mathbf{J}+1}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}=0\end{aligned}$$

und die Induktionsvoraussetzung für $\mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s(\Omega)$ liefert schließlich die Behauptung. ∎

Nun wollen wir explizit Projektoren auf $\mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s(\Omega)$ angeben und suchen dazu eine duale Basis zu den Formen

$$\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\sigma,m},0)\qquad\text{und}\qquad\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\sigma,m})\qquad.$$

Wir definieren noch zu $\mathcal{L}=\Lambda\mathcal{L}_0$ den Linksinversen–Operator

$$\mathcal{M}:=M\Lambda^{-1}\tag{7.12}$$

sowie

$$\mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{vox}}(\Omega):=\big(\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{vox}}(\Omega)\cap\mathcal{F}^q(\Omega)\big)\times\big(\mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{vox}}(\Omega)\cap\mathcal{G}^{q+1}(\Omega)\big)\tag{7.13}$$

und kommen zum

Lemma 7.20
Zu $\sigma\in\mathbb{N}_0$ und $(m,n)\in\{1,\dots,\mu^q_\sigma\}\times\{1,\dots,\mu^{q+1}_\sigma\}$ definieren wir

$$e_{\sigma,n}:=\eta^-D^{q,1}_{\sigma,n}\qquad,\qquad h_{\sigma,m}:=\eta^-R^{q+1,1}_{\sigma,m}\qquad.$$

Für diese C^∞–Formen und $\ell,k\in\mathbb{N}_0$ gelten

- $\mathcal{L}^k\mathcal{M}^{k+\ell}(e_{\sigma,n},0)=\mathcal{M}^\ell(e_{\sigma,n},0)\in\mathrm{Reg}^{q,0}_{<\frac{N}{2}+\sigma-1}(\Omega)\qquad,$
- $\mathcal{L}^k\mathcal{M}^{k+\ell}(0,h_{\sigma,m})=\mathcal{M}^\ell(0,h_{\sigma,m})\in\mathrm{Reg}^{q,0}_{<\frac{N}{2}+\sigma-1}(\Omega)$

und

$$\mathcal{M}^{\ell+2}(e_{\sigma,n},0)\,,\;\mathcal{M}^{\ell+2}(0,h_{\sigma,m})\in\mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{vox}}(\Omega)$$

sowie für $s\in(\ell-N/2,\infty)\setminus\mathbb{I}$

$$\mathcal{M}^{\ell+2}(e_{\sigma,n},0)\,,\;\mathcal{M}^{\ell+2}(0,h_{\sigma,m})\in\mathrm{Reg}^{q,\ell}_s(\Omega)\qquad.$$

Beweis:
Nach Bemerkung 5.17 gelten $\operatorname{div}e_{\sigma,n}=0$ und $\operatorname{rot}h_{\sigma,m}=0$. Mit Bemerkung 5.24 folgt daher

$$(e_{\sigma,n},0)\,,\;(0,h_{\sigma,m})\in\mathrm{Reg}^{q,0}_{<\frac{N}{2}+\sigma-1}(\Omega)\qquad.$$

Weiterhin bestimmen wir

- $$\mathcal{M}(e_{\sigma,n},0)=M(e_{\sigma,n},0)=\eta(0,{}^-R^{q+1,0}_{\sigma,n})+C_{M,\eta}({}^-D^{q,1}_{\sigma,n},0)\in\mathrm{Reg}^{q,0}_{<\frac{N}{2}+\sigma}(\Omega)\qquad,\tag{7.14}$$
- $$\mathcal{M}^2(e_{\sigma,n},0)=M^2(e_{\sigma,n},0)=C({}^-D^{q,1}_{\sigma,n},0)=C_{M,\eta}(0,{}^-R^{q+1,0}_{\sigma,n})+MC_{M,\eta}({}^-D^{q,1}_{\sigma,n},0)\tag{7.15}$$

und

- $$\mathcal{M}(0,h_{\sigma,m}) = \eta({}^{-}D^{q,0}_{\sigma,m},0) + C_{M,\eta}(0,{}^{-}R^{q+1,1}_{\sigma,m}) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_{<\frac{N}{2}+\sigma}(\Omega) \quad , \tag{7.16}$$
- $$\mathcal{M}^2(0,h_{\sigma,m}) = M^2(0,h_{\sigma,m}) = C(0,{}^{-}R^{q+1,1}_{\sigma,m}) = C_{M,\eta}({}^{-}D^{q,0}_{\sigma,m},0) + MC_{M,\eta}(0,{}^{-}R^{q+1,1}_{\sigma,m}) \quad . \tag{7.17}$$

Somit folgt für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$

$$\operatorname{supp}\mathcal{M}^{\ell+2}(e_{\sigma,n},0) \cup \operatorname{supp}\mathcal{M}^{\ell+2}(0,h_{\sigma,m}) \subset \operatorname{supp}\nabla\eta \quad ,$$

also

$$\mathcal{M}^{\ell+2}(e_{\sigma,n},0)\,,\ \mathcal{M}^{\ell+2}(0,h_{\sigma,m}) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{vox}}(\Omega) \quad .$$

Nach Satz 6.48 bzw. Korollar 6.50 sind also beliebig viele Iterationen von $\mathcal{L}$ auf diesen Formen wohldefiniert. Aufgrund der kompakten Träger erhalten wir für $\ell \geq 2$

$$\mathcal{L}\mathcal{M}^{1+\ell}(e_{\sigma,n},0) = \mathcal{M}^{\ell}(e_{\sigma,n},0) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{L}\mathcal{M}^{1+\ell}(0,h_{\sigma,m}) = \mathcal{M}^{\ell}(0,h_{\sigma,m}) \quad . \tag{7.18}$$

Desweiteren haben die Formen $(e_{\sigma,n},0)\,,\ (0,h_{\sigma,m})$ und mit (7.14), (7.16) auch $\mathcal{M}(e_{\sigma,n},0)\,,\ \mathcal{M}(0,h_{\sigma,m})$ die richtige Gestalt, so daß (7.18) mit Korollar 6.50 auch für $\ell = 0,1$ folgt. Per Induktion gilt dann für alle $\ell,k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{L}^k\mathcal{M}^{k+\ell}(e_{\sigma,n},0) = \mathcal{M}^{\ell}(e_{\sigma,n},0) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{L}^k\mathcal{M}^{k+\ell}(0,h_{\sigma,m}) = \mathcal{M}^{\ell}(0,h_{\sigma,m}) \quad .$$

Mit diesen Gleichungen und wegen der kompakten Träger von $\mathcal{M}^2(e_{\sigma,n},0)$ und $\mathcal{M}^2(0,h_{\sigma,m})$ erhalten wir für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $s \in (\ell - N/2, \infty) \setminus \mathbb{I}$ schließlich

$$\mathcal{M}^{\ell+2}(e_{\sigma,n},0)\,,\ \mathcal{M}^{\ell+2}(0,h_{\sigma,m}) \in \mathrm{Reg}^{q,\ell}_{s}(\Omega) \quad .$$

■

Lemma 7.21
Seien $K, Z \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten für alle $\sigma \in \{0,\dots,Z\}$ und $k \in \{-1,\dots,K\}$ sowie alle $(\ell,\gamma) \in \mathbb{N}_0^2$ und geeigneten Indizes m,n

- $\left\langle \mathcal{M}^{\ell+2}(e_{\gamma,n},0), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\right\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = 0 \quad ,$
- $\left\langle \mathcal{M}^{\ell+2}(e_{\gamma,n},0), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(0,H_{\sigma,m})\right\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = (-1)^{\ell}\cdot\delta_{k,\ell}\cdot\delta_{\sigma,\gamma}\cdot\delta_{m,n} \quad ,$
- $\left\langle \mathcal{M}^{\ell+2}(0,h_{\gamma,n}), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\right\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = (-1)^{\ell}\cdot\delta_{k,\ell}\cdot\delta_{\sigma,\gamma}\cdot\delta_{m,n} \quad ,$
- $\left\langle \mathcal{M}^{\ell+2}(0,h_{\gamma,n}), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(0,H_{\sigma,m})\right\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = 0 \quad .$

Bemerkung 7.22
Hierbei genügt es, $\hat{\jmath} \geq N + 4 + 2(K+Z)$ in (1.34) zu wählen.

Beweis:
Aufgrund des kompakten Trägers von $\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n},0)$ folgt für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit partieller Integration und (7.15)

$$\begin{aligned} S^{k,\ell}_{\sigma,\gamma} := \left\langle \mathcal{M}^{\ell+2}(e_{\gamma,n},0), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\right\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} &= \left\langle (\Lambda^{-1}M)^{\ell}\Lambda^{-1}\mathcal{M}^2(e_{\gamma,n},0), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\right\rangle_{\Omega} \\ &= (-1)^{\ell}\cdot\left\langle C({}^{-}D^{q,1}_{\gamma,n},0), \mathcal{M}^{\ell}\mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\right\rangle_{\Omega} \quad . \end{aligned}$$

Wegen $\mathcal{M}\mathcal{L} = \mathrm{Id}$ und $M(E_{\sigma,m},0) = (0,0)$ verschwindet $S^{k,\ell}_{\sigma,\gamma}$ für $\ell \geq k+2$. Hingegen erhalten wir für $\ell \leq k+1$

$$S^{k,\ell}_{\sigma,\gamma} = (-1)^{\ell}\cdot\left\langle C({}^{-}D^{q,1}_{\gamma,n},0), \mathcal{L}^{k+1-\ell}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\right\rangle_{\Omega}$$

und dieses Skalarprodukt kann nur für gerade $k+1-\ell$ von Null verschieden sein. Da sich das Integral nur über $\operatorname{supp}\nabla\eta$ erstreckt, können wir die Reihenentwicklungen aus Korollar 7.15 für $\mathcal{L}^{k+1-\ell}\Lambda(E_{\sigma,m},0)$ einsetzen und sehen mit Lemma 5.19 auch in diesen Fällen

$$S^{k,\ell}_{\sigma,\gamma} = 0 \quad .$$

Mit denselben Argumenten muß sodann

$$\tilde{S}^{k,\ell}_{\sigma,\gamma} := \left\langle \mathcal{M}^{\ell+2}(e_{\gamma,n},0), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(0,H_{\sigma,m})\right\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}$$

für $\ell \geq k+2$ verschwinden. Im Fall $\ell \leq k+1$ ergibt sich wie oben

$$\tilde{S}^{k,\ell}_{\sigma,\gamma} = (-1)^\ell \cdot \big\langle C({}^- D^{q,1}_{\gamma,n}, 0), \mathcal{L}^{k+1-\ell}\Lambda(0, H_{\sigma,m}) \big\rangle_\Omega \qquad .$$

Dieses Skalarprodukt kann nun aber nur dann nicht verschwinden, wenn $k+1-\ell$ ungerade ist. Wieder dürfen wir die Reihendarstellung aus Korollar 7.15 für $\mathcal{L}^{k+1-\ell}\Lambda(0, H_{\sigma,m})$ einsetzen. Hier tritt aber nun genau im Fall $k = \ell$ ein Term auf, nämlich ${}^+D^{q,1}_{\sigma,m}$, dessen Skalarprodukt mit $C\,{}^-D^{q,1}_{\gamma,n}$ nach Lemma 5.19 nicht verschwindet. Es folgt also

$$\tilde{S}^{k,\ell}_{\sigma,\gamma} = (-1)^\ell \cdot \big\langle C({}^- D^{q,1}_{\gamma,n}, 0), ({}^+ D^{q,k+1-\ell}_{\sigma,m}, 0) \big\rangle_\Omega = (-1)^\ell \cdot \delta_{k,\ell} \cdot \delta_{\sigma,\gamma} \cdot \delta_{m,n} \qquad .$$

Die Behauptungen über

$$\big\langle \mathcal{M}^{\ell+2}(0, h_{\gamma,n}), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m}, 0) \big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} \qquad \text{und} \qquad \big\langle \mathcal{M}^{\ell+2}(0, h_{\gamma,n}), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(0, H_{\sigma,m}) \big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}$$

zeigen wir analog. ■

Satz 7.23
Seien $\mathbf{J} \in \mathbb{N}$ *und* $s \in (\mathbf{J}+1-N/2, \infty) \setminus \mathbb{I}$. *Dann gilt*

$$\mathrm{Reg}^{q,0}_s(\Omega) = \mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s(\Omega) \dotplus \Upsilon^{q,\mathbf{J}}_s$$

mit

$$\Upsilon^{q,\mathbf{J}}_s := \mathrm{Lin}\big\{ \mathcal{M}^{k+2}(e_{\sigma,m}, 0)\,,\ \mathcal{M}^{\ell+2}(0, h_{\gamma,n}) : (k,\sigma,m) \in \Theta^{q+1,\mathbf{J}}_s \ \wedge\ (\ell,\gamma,n) \in \Theta^{q,\mathbf{J}}_s \big\} \qquad .$$

Genauer: Jedes $(F,G) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_s(\Omega)$ *läßt sich eindeutig in*

$$(F,G) = (F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}) + (F_\Upsilon, G_\Upsilon)$$

mit $(F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}) \in \mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s(\Omega)$ *und* $(F_\Upsilon, G_\Upsilon) \in \Upsilon^{q,\mathbf{J}}_s$ *zerlegen. Dabei sind*

$$\begin{aligned}(F_\Upsilon, G_\Upsilon) := &\sum_{(k,\sigma,m)\in\Theta^{q,\mathbf{J}}_s} (-1)^k \cdot \big\langle (F,G), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m}, 0) \big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} \cdot \mathcal{M}^{k+2}(0, h_{\sigma,m}) \\ &+ \sum_{(k,\sigma,m)\in\Theta^{q+1,\mathbf{J}}_s} (-1)^k \cdot \big\langle (F,G), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(0, H_{\sigma,m}) \big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} \cdot \mathcal{M}^{k+2}(e_{\sigma,m}, 0)\end{aligned}$$

und $(F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}) := (F,G) - (F_\Upsilon, G_\Upsilon)$.

Bemerkung 7.24

(i) *Die Räume* $\Upsilon^{q,\mathbf{J}}_s$ *sind endlichdimensionale Teilräume von* $\big(\mathrm{C}^{\infty,q}_0(\Omega) \times \mathrm{C}^{\infty,q+1}_0(\Omega)\big) \cap \mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{vox}}(\Omega)$ *und die Projektoren* $(F,G) \mapsto (F_\Upsilon, G_\Upsilon)$ *bzw.* $(F,G) \mapsto (F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}})$ *stetig.*

(ii) *Hier wäre die Wahl* $\hat{\jmath} \geq 2(s+\mathbf{J}+1)$ *in (1.34) hinreichend.*

Beweis:
Nach Lemma 7.20 gilt

$$\Upsilon^{q,\mathbf{J}}_s \subset \mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{vox}}(\Omega) \qquad .$$

Für $(F,G) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_s(\Omega)$ folgt daher $(F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}})\,,\ (F_\Upsilon, G_\Upsilon) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_s(\Omega)$. Mit Lemma 7.21 erhalten wir für alle $(k,\sigma,m) \in \Theta^{q,\mathbf{J}}_s$ und $(\ell,\gamma,n) \in \Theta^{q+1,\mathbf{J}}_s$

$$\big\langle (F_\Upsilon, G_\Upsilon), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m}, 0) \big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = \big\langle (F,G), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m}, 0) \big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}$$

und

$$\big\langle (F_\Upsilon, G_\Upsilon), \mathcal{L}^{\ell+1}\Lambda(0, H_{\gamma,n}) \big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = \big\langle (F,G), \mathcal{L}^{\ell+1}\Lambda(0, H_{\gamma,n}) \big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} \qquad .$$

Damit folgt für alle $(k,\sigma,m) \in \Theta^{q,\mathbf{J}}_s$ und $(\ell,\gamma,n) \in \Theta^{q+1,\mathbf{J}}_s$

$$\big\langle (F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m}, 0) \big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = \big\langle (F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}), \mathcal{L}^{\ell+1}\Lambda(0, H_{\gamma,n}) \big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = 0$$

und daher $(F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}) \in \mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s(\Omega)$ nach Lemma 7.18. Wir erhalten

$$\mathrm{Reg}^{q,0}_s(\Omega) \subset \mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s(\Omega) + \Upsilon^{q,\mathbf{J}}_s \subset \mathrm{Reg}^{q,0}_s(\Omega) \qquad \text{, also} \qquad \mathrm{Reg}^{q,0}_s(\Omega) = \mathrm{Reg}^{q,\mathbf{J}}_s(\Omega) + \Upsilon^{q,\mathbf{J}}_s \qquad .$$

Somit bleibt nur noch die Direktheit dieser Summe zu zeigen. Sei dazu

$$(F,G) = \sum_{(k,\sigma,m)\in\Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}} \mathtt{f}_{k,\sigma,m} \cdot \mathcal{M}^{k+2}(e_{\sigma,m},0) \quad + \sum_{(k,\sigma,m)\in\Theta_s^{q,\mathbf{J}}} \mathtt{g}_{k,\sigma,m} \cdot \mathcal{M}^{k+2}(0,h_{\sigma,m}) \in \mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega) \cap \Upsilon_s^{q,\mathbf{J}}$$

ein Element des Schnittes. Wir wenden $\mathcal{L}$ an und bekommen mit Lemma 7.20

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F,G) &\in \mathrm{Reg}_{s-1}^{q,\mathbf{J}-1}(\Omega) \subset \mathrm{L}_{s-1}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_{s-1}^{2,q+1}(\Omega) \\ &= \sum_{(k,\sigma,m)\in\Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}} \mathtt{f}_{k,\sigma,m} \cdot \mathcal{M}^{k+1}(e_{\sigma,m},0) \quad + \sum_{(k,\sigma,m)\in\Theta_s^{q,\mathbf{J}}} \mathtt{g}_{k,\sigma,m} \cdot \mathcal{M}^{k+1}(0,h_{\sigma,m}) \qquad . \end{aligned}$$

Für $k>0$ besitzen die Formen $\mathcal{M}^{k+1}(e_{\sigma,m},0)$ bzw. $\mathcal{M}^{k+1}(0,h_{\sigma,m})$ kompakte Träger. Mit (7.14), (7.16) gilt für $k=0$ hingegen

$$\mathcal{M}(e_{\sigma,m},0)\,,\ \mathcal{M}(0,h_{\sigma,m}) \in \mathrm{L}_{<\frac{N}{2}+\sigma}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_{<\frac{N}{2}+\sigma}^{2,q+1}(\Omega)$$

und desweiteren

$$\mathcal{M}(e_{\sigma,m},0)\,,\ \mathcal{M}(0,h_{\sigma,m}) \notin \mathrm{L}_{\frac{N}{2}+\sigma}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_{\frac{N}{2}+\sigma}^{2,q+1}(\Omega) \qquad .$$

Wir erhalten somit

$$\mathcal{M}(e_{\sigma,m},0)\,,\ \mathcal{M}(0,h_{\sigma,m}) \notin \mathrm{L}_{s-1}^{2,q}(\Omega) \times \mathrm{L}_{s-1}^{2,q+1}(\Omega) \qquad ,$$

denn $(0,\sigma,m) \in \Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}$ bzw. $(0,\sigma,m) \in \Theta_s^{q,\mathbf{J}}$ impliziert per Definition $N/2+\sigma < s-1$. Da die Formen $\mathcal{M}(e_{\sigma,m},0)$ bzw. $\mathcal{M}(0,h_{\sigma,m})$ linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten

$$\mathtt{f}_{0,\sigma,m} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathtt{g}_{0,\sigma,m}$$

verschwinden. Wiederholen wir dieses Argument mit $\mathcal{L}^j(F,G)$ für $j=2,\dots,\mathbf{J}$, so erhalten wir schließlich für alle $(k,\sigma,m)\in\Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}$ bzw. $(k,\sigma,m)\in\Theta_s^{q,\mathbf{J}}$

$$\mathtt{f}_{k,\sigma,m} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathtt{g}_{k,\sigma,m} = 0 \qquad .$$

Damit ist $\mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega) \cap \Upsilon_s^{q,\mathbf{J}} = \{(0,0)\}$ und der Beweis beendet. ■

Nun haben wir alle Hilfsmittel zusammen, um die Asymptotik anzugehen.

7.3 Niederfrequenzasymptotik in lokalen Normen

Wir wollen zunächst zwei neue Bezeichnungen einführen. Für $K \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ definieren wir den Operator

$$\mathcal{L}_{\omega,K} := \mathcal{L}_\omega - \sum_{k=0}^{K} (-\mathrm{i}\,\omega)^k \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^k \quad , \quad K \geq 0 \quad , \qquad\qquad \mathcal{L}_{\omega,-1} := \mathcal{L}_\omega$$

und desweiteren ein neues $\mathcal{O}$–Symbol $\mathcal{O}'$ mit folgender Bedeutung:
Für die drei Symbole $\mathbf{J}' \in \{\mathbf{J}-1,\mathbf{J}\}$, $t' \in \{t,\tilde{t}\}$ und $\mathcal{O}' \in \{\mathcal{O},o\}$ sei das Tupel

$$(\mathbf{J}',t',\mathcal{O}') := \begin{cases} (\mathbf{J}-1,t,\mathcal{O}) & \text{, falls } \mathbf{J}'=\mathbf{J}-1 \\ (\mathbf{J},\tilde{t},o) & \text{, falls } \mathbf{J}'=\mathbf{J} \end{cases}$$

definiert.
Wir erhalten das

Lemma 7.25
Seien $\mathbf{J}\in\mathbb{N}_0$, $s \in (\mathbf{J}+1/2, \mathbf{J}+N/2)\setminus\mathbb{I}$ und $\tilde{t} < t := s-\mathbf{J}-(N+1)/2$. Dann gilt gleichmäßig bzgl. $\omega \in \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}}\setminus\{0\}$ und $(F,G)\in\mathrm{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\Big\| \mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'}(F,G) - \sum_{(k,\sigma,m)\in\Theta_s^{q,\mathbf{J}}} (\mathrm{i}\,\omega)^k \big\langle (F,G), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} \cdot \mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'-k}\mathcal{M}^2(0,h_{\sigma,m}) \\ &\qquad - \sum_{(k,\sigma,m)\in\Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}} (\mathrm{i}\,\omega)^k \big\langle (F,G), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(0,H_{\sigma,m})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} \cdot \mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'-k}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0) \Big\|_{0,t',\Omega} \\ &= \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big) \cdot \big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad . \end{aligned}$$

Beweis:
Mit Satz 7.23 zerlegen wir $(F,G) \in \mathrm{Reg}_s^{q,0}(\Omega)$ in

$$(F,G) = (F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}}) + (F_\Upsilon, G_\Upsilon) \in \mathrm{Reg}_s^{q,\mathbf{J}}(\Omega) \dotplus \Upsilon_s^{q,\mathbf{J}}$$

und erhalten mit Satz 7.9 gleichmäßig bzgl. ω und $(F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}})$

$$\big\|\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'}(F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}})\big\|_{0,t',\Omega} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big) \cdot \big\|(F_{\mathrm{reg}}, G_{\mathrm{reg}})\big\|_{0,s,\Omega} \qquad .$$

Nach Bemerkung 7.24 folgt daraus

$$\big\|\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'}(F,G) - \mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'}(F_\Upsilon, G_\Upsilon)\big\|_{0,t',\Omega} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big) \cdot \big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad ,$$

so daß wir nur noch für $k \leq \mathbf{J}-1$ die Asymptotik der speziellen Formen

$$\mathcal{M}^{k+2}(e_{\sigma,m},0) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{M}^{k+2}(0,h_{\sigma,m})$$

zu bestimmen haben. Nach Lemma 7.20 gilt

$$\mathcal{M}^{k+2}(e_{\sigma,m},0)\,,\ \mathcal{M}^{k+2}(0,h_{\sigma,m}) \in \mathrm{Reg}_s^{q,k}(\Omega) \qquad ,$$

so daß Satz 7.9 und Lemma 7.20

- $\mathcal{L}_{\omega,k-1}\mathcal{M}^{k+2}(e_{\sigma,m},0) = (-\,\mathrm{i}\,\omega)^k \mathcal{L}_\omega \mathcal{L}^k \mathcal{M}^{k+2}(e_{\sigma,m},0) = (-\,\mathrm{i}\,\omega)^k \mathcal{L}_\omega \mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0) \qquad ,$
- $\mathcal{L}_{\omega,k-1}\mathcal{M}^{k+2}(0,h_{\sigma,m}) = (-\,\mathrm{i}\,\omega)^k \mathcal{L}_\omega \mathcal{L}^k \mathcal{M}^{k+2}(0,h_{\sigma,m}) = (-\,\mathrm{i}\,\omega)^k \mathcal{L}_\omega \mathcal{M}^2(0,h_{\sigma,m})$

liefern. Wir erhalten dann für $1 \leq k \leq \mathbf{J}-1$

- $$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'}\mathcal{M}^{k+2}(e_{\sigma,m},0) &= \mathcal{L}_{\omega,k-1}\mathcal{M}^{k+2}(e_{\sigma,m},0) - \sum_{j=k}^{\mathbf{J}'}(-\,\mathrm{i}\,\omega)^j \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^j \mathcal{M}^{k+2}(e_{\sigma,m},0) \\ &= (-\,\mathrm{i}\,\omega)^k \mathcal{L}_\omega \mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0) - \sum_{j=k}^{\mathbf{J}'}(-\,\mathrm{i}\,\omega)^j \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^{j-k} \mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0) \\ &= (-\,\mathrm{i}\,\omega)^k \mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'-k}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0)\end{aligned}$$

und analog

- $\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'}\mathcal{M}^{k+2}(0,h_{\sigma,m}) = (-\,\mathrm{i}\,\omega)^k \mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'-k}\mathcal{M}^2(0,h_{\sigma,m}) \qquad .$

■

Wegen des vorherigen Lemmas müssen wir nur noch für $\omega \in \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$, $0 \leq k \leq \mathbf{J}-1$ und $\sigma < s - N/2 - 1$ die Asymptotik der speziellen Formen

$$\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'-k}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'-k}\mathcal{M}^2(0,h_{\sigma,m})$$

bestimmen. Hierzu bedienen wir uns einer Technik, welche von Weck und Witsch in [47], [48] und [49] entwickelt worden ist und ihre ganze Stärke dann in [50] bzw. [53] zeigen konnte. Die Idee ist,

$$\mathcal{L}_\omega \mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{L}_\omega \mathcal{M}^2(0,h_{\sigma,m})$$

mit den speziellen Ganzraumstrahlungslösungen des Abschnitts 5.5 zu vergleichen, um dadurch die richtigen statischen Terme ihrer asymptotischen Entwicklungen identifizieren zu können. Hierbei ist wesentlich, daß die Störungen $\hat{\varepsilon}$ und $\hat{\mu}$ in ε und μ kompakte Träger besitzen.

$\boxed{\textbf{zu } \mathcal{L}_\omega \mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0)\textbf{:}}$ Nach Bemerkung 5.25 löst die Form

$$(\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}) \in \mathbf{H}^{\infty,q}_{<-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big) \times \mathbf{H}^{\infty,q+1}_{<-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big)$$

aus (5.44), (5.45) die homogene Gleichung

$$(M + \mathrm{i}\,\omega)(\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}) = (0,0)$$

und erfüllt die Strahlungsbedingung. Damit erfüllt auch

$$\eta(\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}) \in \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{\infty,q}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{\infty,q+1}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)$$

die Strahlungsbedingung und löst

$$(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)\eta(\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}) = (M + \mathrm{i}\,\omega)\eta(\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}) = C_{M,\eta}(\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}) \qquad ,$$

also gilt

$$\mathcal{L}_\omega C_{M,\eta}(\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}) = \eta(\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}) \qquad . \tag{7.19}$$

Aufgrund des kompakten Trägers der Form $C_{M,\eta}({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0)$ haben wir

$$\mathcal{L}_\omega(M + \mathrm{i}\,\omega\Lambda)C_{M,\eta}({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0) = C_{M,\eta}({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0)$$

und folglich

$$\mathcal{L}_\omega M C_{M,\eta}({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0) = (\mathrm{Id} - \mathrm{i}\,\omega\mathcal{L}_\omega)C_{M,\eta}({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0) \qquad . \tag{7.20}$$

Mit (7.15) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\omega\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m}, 0) \quad &= \quad \mathcal{L}_\omega M C_{M,\eta}({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0) + \mathcal{L}_\omega C_{M,\eta}(0, {}^-R^{q+1,0}_{\sigma,m}) \\
&\overset{(7.20)}{=} \quad C_{M,\eta}({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0) + \mathcal{L}_\omega C_{M,\eta}\big((0, {}^-R^{q+1,0}_{\sigma,m}) - \mathrm{i}\,\omega({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0)\big) \\
&\overset{(7.14)}{=} \quad \mathcal{M}(e_{\sigma,m}, 0) - \eta(0, {}^-R^{q+1,0}_{\sigma,m}) \\
&\qquad\quad + \mathrm{i}\,\omega\mathcal{L}_\omega C_{M,\eta}\Big(- \frac{\mathrm{i}}{\omega}(0, {}^-R^{q+1,0}_{\sigma,m}) - ({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0)\Big) \\
&\overset{(7.19)}{=} \quad \mathcal{M}(e_{\sigma,m}, 0) - \eta(0, {}^-R^{q+1,0}_{\sigma,m}) - \mathrm{i}\,\omega\eta(\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}) \\
&\qquad\quad + \mathrm{i}\,\omega\mathcal{L}_\omega C_{M,\eta}\Big((\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}) - \frac{\mathrm{i}}{\omega}(0, {}^-R^{q+1,0}_{\sigma,m}) - ({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0)\Big) \\
&= \quad \mathcal{M}(e_{\sigma,m}, 0) - \mathrm{i}\,\omega\eta({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0) \\
&\qquad\quad + \mathrm{i}\,\omega\big(\mathcal{L}_\omega C_{M,\eta} - \eta\big)\Big((\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}) - \frac{\mathrm{i}}{\omega}(0, {}^-R^{q+1,0}_{\sigma,m}) - ({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0)\Big) \qquad .
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.20 gelten

$$\eta({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0) = \mathcal{L}_0\mathcal{L}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m}, 0) \qquad \text{sowie} \qquad \mathcal{M}(e_{\sigma,m}, 0) = \mathcal{L}_0\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m}, 0)$$

und dies liefert mit der vorherigen Rechnung kombiniert

$$\mathcal{L}_{\omega,1}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m}, 0) = \mathrm{i}\,\omega\big(\mathcal{L}_\omega C_{M,\eta} - \eta\big)\Big((\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}, \mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}) - \frac{\mathrm{i}}{\omega}(0, {}^-R^{q+1,0}_{\sigma,m}) - ({}^-D^{q,1}_{\sigma,m}, 0)\Big) \qquad .$$

Setzen wir nun die Reihenentwicklungen aus (5.44) und (5.45) ein, sehen wir, daß gerade jeweils der erste Term der $(-)$–Reihe von $\mathbb{E}^{1,\omega}_{\sigma,m}$ bzw. $\mathbb{H}^{1,\omega}_{\sigma,m}$ wegfällt, und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\omega,1}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m}, 0) = \mathrm{i}\,\omega\big(\mathcal{L}_\omega C_{M,\eta} - \eta\big)\Big(&\sum_{k=1}^{\infty}(-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot ({}^-D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) + \frac{\mathrm{i}}{\omega}\sum_{k=1}^{\infty}(-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot (0, {}^-R^{q+1,2k}_{\sigma,m}) \\
&+ \kappa^{q+1}_\sigma\,\omega^{2\nu_\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}(-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot ({}^+D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) + \frac{\mathrm{i}}{\omega}\kappa^{q+1}_\sigma\,\omega^{2\nu_\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}(-\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \cdot (0, {}^+R^{q+1,2k}_{\sigma,m})\Big) \quad .
\end{aligned}$$

Erinnern wir uns an $\nu_\sigma = N/2 + \sigma$ und

$$\kappa_\sigma := \kappa^{q+1}_\sigma = \mathrm{i}\,2\nu_\sigma 4^{-\nu_\sigma}\frac{\Gamma(1-\nu_\sigma)}{\Gamma(1+\nu_\sigma)}(-1)^{\nu_\sigma+1/2} \qquad ,$$

so können wir die obige Gleichung etwas kürzer schreiben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\omega,1}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m}, 0) = \big(\eta - \mathcal{L}_\omega C_{M,\eta}\big)\Big(&\sum_{k=1}^{\infty}(-\mathrm{i}\,\omega)^{2k}(M - \mathrm{i}\,\omega)({}^-D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \\
&+ \kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}(-\mathrm{i}\,\omega)^{2k}(M - \mathrm{i}\,\omega)({}^+D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0)\Big)
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Diese Reihen konvergieren für $\omega \in \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$ und in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ lokal gleichmäßig und somit insbesondere in $\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Folglich konvergieren die Reihen $C_{M,\eta} \sum \ldots$ wegen der Kompaktheit des Trägers von $C_{M,\eta}$ für alle $s \in \mathbb{R}$ in $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)$, so daß die Stetigkeit von $\mathcal{L}_\omega$ die Konvergenz der Reihen

$$\mathcal{L}_\omega C_{M,\eta} \sum \cdots = \sum \mathcal{L}_\omega C_{M,\eta} \ldots$$

in $\mathrm{L}^{2,q}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)$ liefert.
Sei Ω_{b} ein beschränktes Gebiet mit $\operatorname{supp} \nabla\eta \subset \Omega_{\mathrm{b}} \Subset \overline{\Omega}$. Wir betrachten

$$(f, g) := C_{M,\eta}(M - \mathrm{i}\,\omega)({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) = (C_{\mathrm{div},\eta}\,{}^{\pm}R^{q+1,2k}_{\sigma,m}, -\mathrm{i}\,\omega C_{\mathrm{rot},\eta}\,{}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}) \qquad .$$

Mit Bemerkung 5.17 gelten

$$\operatorname{div} f = -\operatorname{div} \eta\,{}^{\pm}D^{q,2k-1}_{\sigma,m} = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot} g = \mathrm{i}\,\omega \operatorname{rot} \eta\,{}^{\pm}R^{q+1,2k}_{\sigma,m} = \mathrm{i}\,\omega C_{\mathrm{rot},\eta}\,{}^{\pm}R^{q+1,2k}_{\sigma,m} \qquad .$$

Weiterhin steht (f, g) wegen $\operatorname{supp}(f, g) \subset \operatorname{supp} \nabla\eta$ auf $\overset{\circ}{\mathrm{B}}{}^q(\Omega) \times \mathrm{B}^{q+1}(\Omega)$ senkrecht und alle $\|\cdot\|_{0,s,\Omega}$–Normen für (f, g) sind mit $\|(f, g)\|_{0,0,\Omega_{\mathrm{b}}}$ äquivalent. Beachten wir noch, daß $\operatorname{supp} C_{\mathrm{rot},\eta}$ beschränkt ist, so folgt mit Bemerkung 5.12 und aus Satz 7.3 (i) gleichmäßig bzgl. k und ω (sogar bzgl. σ, m)

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_\omega(f, g)\|_{0,0,\Omega_{\mathrm{b}}} &\leq c \cdot \Big(\|(f, g)\|_{0,s,\Omega} + \|C_{\mathrm{rot},\eta}\,{}^{\pm}R^{q+1,2k}_{\sigma,m}\|_{0,s,\Omega}\Big) \\
&\leq c \cdot \Big(\|{}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}\|_{0,0,\operatorname{supp}\nabla\eta} + \|{}^{\pm}R^{q+1,2k}_{\sigma,m}\|_{0,0,\operatorname{supp}\nabla\eta}\Big) \\
&\leq c
\end{aligned}$$

und damit auch gleichmäßig bzgl. k und ω

$$\|(\eta - \mathcal{L}_\omega C_{M,\eta})(M - \mathrm{i}\,\omega)({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0)\|_{0,0,\Omega_{\mathrm{b}}} \leq c \qquad .$$

Für $K > \mathbf{J}$ erhalten wir dann aus (7.21)

$$\begin{aligned}
&\Bigg\| \mathcal{L}_{\omega,1}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m}, 0) - \big(\eta - \mathcal{L}_\omega C_{M,\eta}\big)\Big(\sum_{k=1}^{K-1} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k}(M - \mathrm{i}\,\omega)({}^{-}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \\
&\qquad\qquad + \kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma} \sum_{k=0}^{K-1} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k}(M - \mathrm{i}\,\omega)({}^{+}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0)\Big)\Bigg\|_{0,0,\Omega_{\mathrm{b}}} \\
&\leq c \sum_{k=K}^{\infty} |\omega|^{2k} \leq c \cdot |\omega|^{2K} \qquad .
\end{aligned}$$

Wir wollen an dieser Stelle eine neue Schreibweise einführen und definieren:

$$u \overset{\ell}{\sim} v \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \|u - v\|_{0,0,\Omega_{\mathrm{b}}} \leq c \cdot |\omega|^\ell \qquad \text{gleichmäßig bzgl.} \qquad \omega \in \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$$

Mit dieser neuen Notation haben wir also bis hierher

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\omega,1}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m}, 0) &\overset{2K}{\sim} \sum_{k=1}^{K-1} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k}\big(\eta - \mathcal{L}_\omega C_{M,\eta}\big)(M - \mathrm{i}\,\omega)({}^{-}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \\
&\qquad + \kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma} \sum_{k=0}^{K-1} (-\mathrm{i}\,\omega)^{2k}\big(\eta - \mathcal{L}_\omega C_{M,\eta}\big)(M - \mathrm{i}\,\omega)({}^{+}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0)
\end{aligned} \tag{7.22}$$

gezeigt. Nun steckt das einzig unbekannte ω–Verhalten nach (7.22) in den Termen

$$\mathcal{L}_\omega C_{M,\eta}(M - \mathrm{i}\,\omega)({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \qquad .$$

Zur näheren Untersuchung dieser Ausdrücke sehen wir mit $C_{M^2,\eta} = M^2\eta - \eta M^2 = MC_{M,\eta} + C_{M,\eta}M$ und Bemerkung 5.17

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\omega C_{M,\eta}(M-\mathrm{i}\,\omega)({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) &= \mathcal{L}_\omega C_{M^2,\eta}({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) - \mathcal{L}_\omega(M+\mathrm{i}\,\omega)C_{M,\eta}({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0)\\ &= \mathcal{L}_\omega C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) - \mathcal{L}_\omega(M+\mathrm{i}\,\omega\Lambda)\underbrace{C_{M,\eta}({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0)}_{\text{kompakter Träger!}}\\ &= \mathcal{L}_\omega C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) - C_{M,\eta}({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0)\end{aligned}$$

und somit für $k\in\mathbb{N}_0$

$$\big(\eta-\mathcal{L}_\omega C_{M,\eta}\big)(M-\mathrm{i}\,\omega)({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) = -\mathcal{L}_\omega C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) + (M-\mathrm{i}\,\omega)\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) \qquad . \tag{7.23}$$

Für $k\geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^2\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) = M^2\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) &= C_{M^2,\eta}({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) + \eta({}^{\pm}D^{q,2k-1}_{\sigma,m},0)\\ &= C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) + \eta({}^{\pm}D^{q,2k-1}_{\sigma,m},0) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \qquad .\end{aligned}$$

Also können wir nach Satz 6.48 $\mathcal{L}^2$ auf $\mathcal{M}^2\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0)$ anwenden und erhalten, da auch

$$\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \tag{7.24}$$

nach Bemerkung 5.17 gilt,

$$\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) = \mathcal{L}^2\big(C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) + \eta({}^{\pm}D^{q,2k-1}_{\sigma,m},0)\big) \qquad .$$

Wegen (7.24) ist $\mathcal{L}$ sogar auf $\eta({}^{\pm}D^{q,2k-1}_{\sigma,m},0)$ wohldefiniert, so daß wir

$$\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) = \mathcal{L}^2 C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) + \mathcal{L}^2\eta({}^{\pm}D^{q,2k-1}_{\sigma,m},0)$$

bekommen. Eine Induktion zeigt

$$\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) = \sum_{\ell=1}^{k}\mathcal{L}^{2\ell}C({}^{\pm}D^{q,2k+3-2\ell}_{\sigma,m},0) + \mathcal{L}^{2k}\eta({}^{\pm}D^{q,1}_{\sigma,m},0) \qquad ,$$

woraus wir

$$\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) = \Lambda^{-1}\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) = \sum_{\ell=1}^{k}\mathcal{L}_0\mathcal{L}^{2\ell-1}C({}^{\pm}D^{q,2k+3-2\ell}_{\sigma,m},0) + \mathcal{L}_0\mathcal{L}^{2k-1}\eta({}^{\pm}D^{q,1}_{\sigma,m},0)$$

und

$$M\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) = \Lambda^{-1}M\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) = \sum_{\ell=1}^{k}\mathcal{L}_0\mathcal{L}^{2\ell-2}C({}^{\pm}D^{q,2k+3-2\ell}_{\sigma,m},0) + \mathcal{L}_0\mathcal{L}^{2k-2}\eta({}^{\pm}D^{q,1}_{\sigma,m},0)$$

ableiten. Dies zusammen liefert schließlich für $k\geq 1$

$$\begin{aligned}(M-\mathrm{i}\,\omega)\eta({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m},0) &= \mathcal{L}_0\mathcal{L}^{2k-2}\eta({}^{\pm}D^{q,1}_{\sigma,m},0) - \mathrm{i}\,\omega\mathcal{L}_0\mathcal{L}^{2k-1}\eta({}^{\pm}D^{q,1}_{\sigma,m},0)\\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{k}\Big(\mathcal{L}_0\mathcal{L}^{2\ell-2}C({}^{\pm}D^{q,2k+3-2\ell}_{\sigma,m},0) - \mathrm{i}\,\omega\mathcal{L}_0\mathcal{L}^{2\ell-1}C({}^{\pm}D^{q,2k+3-2\ell}_{\sigma,m},0)\Big) \qquad .\end{aligned} \tag{7.25}$$

Setzen wir diese Formel in (7.23) und all dies zusammen in (7.22) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\omega,1}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0) &\overset{2K}{\sim} -\mathbb{S}^-_{\mathrm{I}} + \mathbb{S}^-_{\mathrm{II}} + \mathbb{S}^-_{\mathrm{III}} + \kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma}\big(-\mathbb{S}^+_{\mathrm{I}} + \mathbb{S}^+_{\mathrm{II}} + \mathbb{S}^+_{\mathrm{III}}\big)\\ &\quad + \kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma}\Big(-\mathcal{L}_\omega C({}^{+}D^{q,1}_{\sigma,m},0) + (M-\mathrm{i}\,\omega)\eta({}^{+}D^{q,1}_{\sigma,m},0)\Big)\end{aligned} \tag{7.26}$$

mit

- $$\mathbb{S}^{\pm}_{\mathrm{I}} := \sum_{k=1}^{K-1} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \mathcal{L}_{\omega} C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \qquad ,$$
- $$\mathbb{S}^{\pm}_{\mathrm{II}} := \sum_{k=1}^{K-1} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \Big(\mathcal{L}_0 \mathcal{L}^{2k-2} \eta({}^{\pm}D^{q,1}_{\sigma,m}, 0) - \mathrm{i}\,\omega \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^{2k-1} \eta({}^{\pm}D^{q,1}_{\sigma,m}, 0) \Big) \qquad ,$$
- $$\mathbb{S}^{\pm}_{\mathrm{III}} := \sum_{k=1}^{K-1} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \sum_{\ell=1}^{k} \Big(\mathcal{L}_0 \mathcal{L}^{2\ell-2} C({}^{\pm}D^{q,2k+3-2\ell}_{\sigma,m}, 0) - \mathrm{i}\,\omega \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^{2\ell-1} C({}^{\pm}D^{q,2k+3-2\ell}_{\sigma,m}, 0) \Big) \qquad .$$

Offensichtlich gilt

$$\mathbb{S}^{\pm}_{\mathrm{II}} = \sum_{k=2}^{2K-1} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{k} \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^{k-2} \eta({}^{\pm}D^{q,1}_{\sigma,m}, 0) \qquad . \tag{7.27}$$

In den Doppelsummen $\mathbb{S}^{\pm}_{\mathrm{III}}$ substituieren wir zunächst $j(\ell) := k - \ell + 1$ und erhalten

$$\mathbb{S}^{\pm}_{\mathrm{III}} = \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{j=1}^{k} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \Big(\mathcal{L}_0 \mathcal{L}^{2(k-j)} C({}^{\pm}D^{q,2j+1}_{\sigma,m}, 0) - \mathrm{i}\,\omega \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^{2(k-j)+1} C({}^{\pm}D^{q,2j+1}_{\sigma,m}, 0) \Big) \qquad .$$

Nun vertauschen wir die Summationsreihenfolge, ersetzen k durch $i := k - j$ und benennen des Variablenpärchen (j, i) wieder in (k, ℓ) um. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{\pm}_{\mathrm{III}} &= \sum_{k=1}^{K-1} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \sum_{\ell=0}^{K-k-1} \Big((-\,\mathrm{i}\,\omega)^{2\ell} \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^{2\ell} C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) + (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{2\ell+1} \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^{2\ell+1} C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{K-1} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \sum_{\ell=0}^{2K-2k-1} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{\ell} \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^{\ell} C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \end{aligned}$$

und wir sehen

$$\mathbb{S}^{\pm}_{\mathrm{I}} - \mathbb{S}^{\pm}_{\mathrm{III}} = \sum_{k=1}^{K-1} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{2k} \mathcal{L}_{\omega,2K-2k-1} C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \qquad .$$

Es gilt $C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{vox}}(\Omega)$ und damit auch für alle $k \geq 1$ und $j \leq 2K$ sowie $\tilde{s} \in (2K - N/2, \infty) \setminus \mathbb{I}$ nach Lemma 7.18

$$C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \in \mathrm{Reg}^{q,j}_{\tilde{s}}(\Omega) \qquad ,$$

denn für alle (ℓ, γ, n) mit $\ell \leq 2K$ folgen mit den Reihenentwicklungen aus Korollar 7.15 und mit Hilfe von Lemma 5.19 wegen $2k + 1 \geq 3$

$$\big\langle C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0), \mathcal{L}^{\ell} \Lambda(E_{\gamma,n}, 0) \big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = \big\langle C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0), \mathcal{L}^{\ell} \Lambda(0, H_{\gamma,n}) \big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} = 0 \qquad .$$

Insbesondere haben wir für $1 \leq k \leq K - 1$

$$C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \in \mathrm{Reg}^{q,2K-2k}_{\tilde{s}}(\Omega) \qquad ,$$

so daß Satz 7.9 (i) gleichmäßig bzgl. ω (und k, σ, m)

$$\big\| \mathcal{L}_{\omega,2K-2k-1} C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \big\|_{0,0,\Omega_{\mathrm{b}}} \leq c \cdot |\omega|^{2K-2k} \cdot \big\| C({}^{\pm}D^{q,2k+1}_{\sigma,m}, 0) \big\|_{0,\tilde{s},\Omega} \leq c \cdot |\omega|^{2K-2k}$$

und daher

$$\mathbb{S}^{\pm}_{\mathrm{I}} - \mathbb{S}^{\pm}_{\mathrm{III}} \overset{2K}{\sim} (0, 0)$$

liefert. Beachten wir noch $\eta({}^{-}D^{q,1}_{\sigma,m}, 0) = (e_{\sigma,m}, 0) = \mathcal{L}^2 \mathcal{M}^2 (e_{\sigma,m}, 0)$ nach Lemma 7.20, so erhalten wir aus (7.27)

$$\mathbb{S}^{-}_{\mathrm{II}} = \sum_{k=2}^{2K-1} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{k} \mathcal{L}_0 \mathcal{L}^{k} \mathcal{M}^2 (e_{\sigma,m}, 0)$$

und damit aus (7.26) und (7.27)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\omega,2K-1}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0) = \mathcal{L}_{\omega,1}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0) - \mathbb{S}_{\mathrm{II}}^-\\
\overset{2K}{\sim}\ &\kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma}\Big(\mathbb{S}_{\mathrm{II}}^+ - \mathcal{L}_\omega C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) + (M-\mathrm{i}\,\omega)\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\Big)\\
=\ &\kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma}\Big(\sum_{k=2}^{2K-1}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\mathcal{L}_0\mathcal{L}^{k-2}\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) - \mathcal{L}_\omega C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) + (M-\mathrm{i}\,\omega)\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\Big) \qquad .
\end{aligned}$$

Für ein beliebiges $\mathbb{N}\ni j\leq \mathbf{J}+1$ ergibt sich schließlich durch die Wahl eines $K\in\mathbb{N}_0$ mit $2K\geq j$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\omega,j-1}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0) \overset{j}{\sim} \kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma}\Big(&\sum_{k=2}^{j-N-2\sigma-1}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\mathcal{L}_0\mathcal{L}^{k-2}\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\\
&- \mathcal{L}_\omega C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) + (M-\mathrm{i}\,\omega)\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\Big) \qquad .
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Nun wollen wir diese Terme noch näher identifizieren. Da $\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\in\mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ nach Bemerkung 5.17 gilt, liefern die Gleichung

$$M\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) = C_{M,\eta}({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) + \eta(0,{}^+R^{q+1,0}_{\sigma,m})$$

und Satz 6.48

$$\mathcal{L}_0 M\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) = \eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) \qquad \text{oder} \qquad \mathcal{L}\mathcal{M}\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) = \eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) \qquad . \tag{7.29}$$

Alternativ könnte man sich dies auch durch

$$\mathcal{L}_0 M\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) - \eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) \in \big({}_\varepsilon\mathcal{H}^q_{>-\frac{N}{2}}(\Omega)\cap\mathring{\mathrm{B}}^q(\Omega)^{\perp_\varepsilon}\big)\times\{0\} = \{0\}\times\{0\}$$

überlegen. Mit (7.29) können wir die letzten beiden Summanden aus (7.28) mit in die erste Summe aufnehmen, und es folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\omega,j-1}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0) \overset{j}{\sim} \kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma}\Big(&\sum_{k=2}^{j-N-2\sigma-1}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\mathcal{M}\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\\
&-\mathrm{i}\,\omega\Lambda^{-1}\mathcal{L}\mathcal{M}\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) + \Lambda^{-1}\mathcal{M}\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) - \mathcal{L}_\omega C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\Big)\\
= \kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma}\Big(&\sum_{k=0}^{j-N-2\sigma-1}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\mathcal{M}\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) - \mathcal{L}_\omega C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\Big) \qquad .
\end{aligned} \tag{7.30}$$

Da $C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\in\mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{vox}}(\Omega)$, können wir mit Korollar 6.50

$$(0,h) := -\mathcal{L}_0 C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) + M\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)$$

betrachten und sehen

- $M(0,h) = -C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) + M^2\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) = (0,0) \qquad ,$
- $\operatorname{rot}\mu h = 0 + \operatorname{rot}\mu\operatorname{rot}\eta^+D^{q,1}_{\sigma,m} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\eta^+D^{q,1}_{\sigma,m} = 0 \qquad ,$

also

$$h\in\big(\mu^{-1}{}_{\mu^{-1}}\mathcal{H}^{q+1}_{<-\frac{N}{2}-\sigma}(\Omega)\big)\cap\mathrm{B}^{q+1}(\Omega)^{\perp_\mu} \qquad .$$

Desweiteren gilt

$$h - {}^+R^{q+1,0}_{\sigma,m}\in\mathrm{L}^{2,q+1}_{>-\frac{N}{2}}(\Omega) \qquad .$$

Mit Lemma 7.11 haben wir folglich

$$(0,H_{\sigma,m}) = (0,h) = -\mathcal{L}_0 C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) + M\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)$$

bzw.

$$\mathcal{M}\eta({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) = \Lambda(0,H_{\sigma,m}) + \mathcal{L}C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) \qquad .$$

Schließlich bekommen wir durch Einsetzen dieser Gleichheit in (7.30)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\omega,j-1}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0) \overset{j}{\sim} \kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma}\Big(&\sum_{k=0}^{j-N-2\sigma-1}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\sigma,m})\\&+\sum_{k=0}^{j-N-2\sigma-1}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\mathcal{L}_0\mathcal{L}^kC({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)-\mathcal{L}_\omega C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\Big)\\=\kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma}\Big(&\sum_{k=0}^{j-N-2\sigma-1}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\sigma,m})-\mathcal{L}_{\omega,j-N-2\sigma-1}C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\Big)\quad.\end{aligned}\tag{7.31}$$

$\boxed{\textbf{zu } \mathcal{L}_\omega\mathcal{M}^2(0,h_{\sigma,m})\textbf{:}}$ Benutzen wir hier die Reihenentwicklungen der Formen

$$(\mathbb{E}^{2,\omega}_{\sigma,m},\mathbb{H}^{2,\omega}_{\sigma,m})\in\mathbf{H}^{\infty,q}_{<-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big)\times\mathbf{H}^{\infty,q+1}_{<-\frac{1}{2}}\big(A(1)\big)$$

aus (5.47), (5.46) und richten unsere Diskussion nun auf die Formen $(0,{}^\pm R^{q+1,2k+1}_{\sigma,m})$, so liefern völlig analoge Argumente wie zuvor bei $\mathcal{L}_\omega\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{\omega,j-1}\mathcal{M}^2(0,h_{\sigma,m})\\\overset{j}{\sim}\ &\kappa_\sigma\,\omega^{N+2\sigma}\Big(\sum_{k=0}^{j-N-2\sigma-1}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\sigma,m},0)-\mathcal{L}_{\omega,j-N-2\sigma-1}C(0,{}^+R^{q+1,1}_{\sigma,m})\Big)\quad.\end{aligned}\tag{7.32}$$

Halten wir die Ergebnisse bis hierher in einem Lemma fest:

Lemma 7.26
Für alle $\mathbb{N}\ni j\leq\mathbf{J}+1$ und alle geeigneten Indizes σ,m sowie alle beschränkten Teilgebiete $\Omega_{\mathrm{b}}\Subset\overline{\Omega}$ gelten die folgenden Asymptotiken:

(i)

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{\omega,j-1}\mathcal{M}^2(e_{\sigma,m},0)\\\overset{j}{\sim}\ &\kappa_\sigma\omega^{N+2\sigma}\Big(\sum_{k=0}^{j-N-2\sigma-1}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\sigma,m})-\mathcal{L}_{\omega,j-N-2\sigma-1}C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\Big)\\=:\ &\kappa_\sigma\omega^{N+2\sigma}\mathcal{A}^{j-N-2\sigma-1}_{\omega,\sigma,m}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{\omega,j-1}\mathcal{M}^2(0,h_{\sigma,m})\\\overset{j}{\sim}\ &\kappa_\sigma\omega^{N+2\sigma}\Big(\sum_{k=0}^{j-N-2\sigma-1}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\sigma,m},0)-\mathcal{L}_{\omega,j-N-2\sigma-1}C(0,{}^+R^{q+1,1}_{\sigma,m})\Big)\\=:\ &\kappa_\sigma\omega^{N+2\sigma}\mathcal{B}^{j-N-2\sigma-1}_{\omega,\sigma,m}\end{aligned}$$

Wir erhalten das

Lemma 7.27
Seien $\mathbf{J}\in\mathbb{N}_0$ und $s\in(\mathbf{J}+1/2,\mathbf{J}+N/2)\setminus\mathbb{I}$. Dann gilt für alle beschränkten Teilgebiete $\Omega_{\mathrm{b}}\Subset\overline{\Omega}$ gleichmäßig bzgl. $\omega\in\mathbb{C}_{+,\hat{\omega}}\setminus\{0\}$ und $(F,G)\in\mathrm{Reg}^{q,0}_s(\Omega)$

$$\begin{aligned}\Big\|\mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'}(F,G)&-\sum_{(k,\sigma,m)\in\tilde{\Theta}^q_{\mathbf{J}'-N}}(-\mathrm{i}\,\omega)^{N+k}\kappa_{k,\sigma}\big\langle(F,G),\mathcal{L}^{k-2\sigma+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}\cdot\mathcal{B}^{\mathbf{J}'-N-k}_{\omega,\sigma,m}\\&-\sum_{(k,\sigma,m)\in\tilde{\Theta}^{q+1}_{\mathbf{J}'-N}}(-\mathrm{i}\,\omega)^{N+k}\kappa_{k,\sigma}\big\langle(F,G),\mathcal{L}^{k-2\sigma+1}\Lambda(0,H_{\sigma,m})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}\cdot\mathcal{A}^{\mathbf{J}'-N-k}_{\omega,\sigma,m}\Big\|_{0,0,\Omega_{\mathrm{b}}}\\&=\mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big)\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega}\quad.\end{aligned}$$

Hierbei seien $\kappa_{k,\sigma}:=\mathrm{i}^{2k-2\sigma+N}\,\kappa_\sigma$ und $\tilde{\Theta}^q_j:=\big\{(k,\sigma,m)\in\mathbb{N}^3_0 : 2\sigma\leq k\leq j\,\wedge\,1\leq m\leq\mu^q_\sigma\big\}$.
Insbesondere gilt für $j\leq\min\{\mathbf{J},N\}$

$$\big\|\mathcal{L}_{\omega,j-1}(F,G)\big\|_{0,0,\Omega_{\mathrm{b}}}=\mathcal{O}\big(|\omega|^j\big)\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega}\quad.$$

Beweis:
Setzen wir die Asymptotiken aus Lemma 7.26 für $j := \mathbf{J}' - k + 1$ in die Abschätzung des Lemmas 7.25 ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}\Big\| \mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'}(F,G) - &\sum_{(k,\sigma,m)\in\Theta_s^{q,\mathbf{J}}} (\mathrm{i}\,\omega)^k \kappa_\sigma \omega^{N+2\sigma} \big\langle (F,G), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} \cdot \mathcal{B}^{\mathbf{J}'-N-k-2\sigma}_{\omega,\sigma,m} \\ &- \sum_{(k,\sigma,m)\in\Theta_s^{q+1,\mathbf{J}}} (\mathrm{i}\,\omega)^k \kappa_\sigma \omega^{N+2\sigma} \big\langle (F,G), \mathcal{L}^{k+1}\Lambda(0,H_{\sigma,m})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} \cdot \mathcal{A}^{\mathbf{J}'-N-k-2\sigma}_{\omega,\sigma,m} \Big\|_{0,0,\Omega_{\mathrm{b}}} \\ &= \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big) \cdot \big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega}\end{aligned}$$

und $(\mathrm{i}\,\omega)^k \kappa_\sigma \omega^{N+2\sigma} = \kappa_\sigma\, \mathrm{i}^{2k+2\sigma+N}(-\mathrm{i}\,\omega)^{N+k+2\sigma}$. Die Summation in z. B. $\Theta_s^{q,\mathbf{J}}$ erstreckt sich hierbei über

$$0 \le k \le \mathbf{J} - 1 \quad , \quad 0 \le \sigma < s - N/2 - k - 1 \quad , \quad 1 \le m \le \mu_\sigma^q$$

und wird ferner durch die Bedingung

$$k + 2\sigma + N \le \mathbf{J}'$$

eingeschränkt, denn Terme höherer Ordnung wandern in den $\mathcal{O}'$–Term. Also wird nur über

- $0 \le k \le \mathbf{J}' - N$,
- $0 \le \sigma \le \min\Big\{ s - \dfrac{N}{2} - k - 1, \dfrac{\mathbf{J}' - N - k}{2} \Big\} = \dfrac{\mathbf{J}' - N - k}{2}$, denn $\mathbf{J} + 1/2 < s < \mathbf{J} + N/2$,
- $1 \le m \le \mu_\sigma^q$

summiert. Wir vertauschen nun die Summation über k und σ , d. h.

$$0 \le 2\sigma \le \mathbf{J}' - N \quad , \quad 0 \le k \le \mathbf{J}' - N - 2\sigma \quad , \quad 1 \le m \le \mu_\sigma^q \quad ,$$

ersetzen dann k durch $\ell := k + 2\sigma$ und vertauschen wiederum die Summation bzgl. σ und ℓ . Taufen wir ℓ wieder auf k , so erhalten wir die erste Behauptung. Da

$$C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\,,\ C(0,{}^+R^{q+1,1}_{\sigma,m}) \in \mathrm{Reg}^{q,0}_{\mathrm{vox}}(\Omega) \quad , \tag{7.33}$$

ist nach Satz 7.3

$$\mathcal{L}_\omega C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0)\,,\ \mathcal{L}_\omega C(0,{}^+R^{q+1,1}_{\sigma,m}) \overset{0}{\sim} (0,0) \quad \text{, also} \quad \mathcal{A}^\ell_{\omega,\sigma,m}\,,\ \mathcal{B}^\ell_{\omega,\sigma,m} \overset{0}{\sim} (0,0) \quad . \tag{7.34}$$

Der erste Teil des Lemmas liefert somit die zweite Behauptung. ∎

Wir benutzen im folgenden oft ohne Kommentar das folgende Eindeutigkeitsresultat für asymptotische Entwicklungen:

Lemma 7.28
Seien $\tilde\omega \in \mathbb{R}_+$, $K \in \mathbb{N}_0$ und $x_0,\ldots,x_K$ Elemente eines normierten Raumes X . Gilt gleichmäßig bzgl. $\omega \in \mathbb{C}$ mit $0 < |\omega| < \tilde\omega$ die Abschätzung

$$\Big\| \sum_{k=0}^K \omega^k \cdot x_k \Big\|_X = o\big(|\omega|^K\big) \quad ,$$

so verschwinden alle x_k .

Nach den Definitionen aus Lemma 7.26 gelten

$$\mathcal{A}^k_{\omega,\sigma,m} = \mathbb{X}^k_{\sigma,m}(\omega) - \mathcal{L}_{\omega,k} C({}^+D^{q,1}_{\sigma,m},0) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}^k_{\omega,\sigma,m} = \mathbb{Y}^k_{\sigma,m}(\omega) - \mathcal{L}_{\omega,k} C(0,{}^+R^{q+1,1}_{\sigma,m}) \tag{7.35}$$

mit Polynomen

$$\mathbb{X}^k_{\sigma,m}(\omega) := \sum_{\ell=0}^k (-\mathrm{i}\,\omega)^\ell \Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell \Lambda(0,H_{\sigma,m}) \quad \text{und} \quad \mathbb{Y}^k_{\sigma,m}(\omega) := \sum_{\ell=0}^k (-\mathrm{i}\,\omega)^\ell \Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell \Lambda(E_{\sigma,m},0) \tag{7.36}$$

vom Grad k in ω $\big($und q–$(q+1)$–Formen als Koeffizienten$\big)$. Mit (7.33) liefert eine Anwendung von Lemma 7.27 für $j-1, \gamma \in \mathbb{N}_0$ und $n = 1,\ldots,\mu_\gamma^{q+1}$ sowie $\nu = 1,\ldots,\mu_\gamma^q$ auf

$$(F,G) := C({}^+D^{q,1}_{\gamma,n},0) \quad \text{und} \quad (F,G) := C(0,{}^+R^{q+1,1}_{\gamma,\nu})$$

die Asymptotiken

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{\omega,j-1}C({}^{+}D^{q,1}_{\gamma,n},0)\\ \overset{j}{\sim}\;&(-\mathrm{i}\,\omega)^N\cdot\sum_{\substack{(k,\sigma,m)\\ \in\tilde{\Theta}^q_{j-1-N}}}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\beta^{k,\sigma,m}_{D,\gamma,n}\cdot\big(\mathbb{Y}^{j-1-N-k}_{\sigma,m}(\omega)-\mathcal{L}_{\omega,j-1-N-k}C(0,{}^{+}R^{q+1,1}_{\sigma,m})\big)\\ &+(-\mathrm{i}\,\omega)^N\cdot\sum_{\substack{(k,\sigma,m)\\ \in\tilde{\Theta}^{q+1}_{j-1-N}}}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\alpha^{k,\sigma,m}_{D,\gamma,n}\cdot\big(\mathbb{X}^{j-1-N-k}_{\sigma,m}(\omega)-\mathcal{L}_{\omega,j-1-N-k}C({}^{+}D^{q,1}_{\sigma,m},0)\big)\end{aligned}\tag{7.37}$$

und

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{\omega,j-1}C(0,{}^{+}R^{q+1,1}_{\gamma,\nu})\\ \overset{j}{\sim}\;&(-\mathrm{i}\,\omega)^N\cdot\sum_{\substack{(k,\sigma,m)\\ \in\tilde{\Theta}^q_{j-1-N}}}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\beta^{k,\sigma,m}_{R,\gamma,\nu}\cdot\big(\mathbb{Y}^{j-1-N-k}_{\sigma,m}(\omega)-\mathcal{L}_{\omega,j-1-N-k}C(0,{}^{+}R^{q+1,1}_{\sigma,m})\big)\\ &+(-\mathrm{i}\,\omega)^N\cdot\sum_{\substack{(k,\sigma,m)\\ \in\tilde{\Theta}^{q+1}_{j-1-N}}}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\alpha^{k,\sigma,m}_{R,\gamma,\nu}\cdot\big(\mathbb{X}^{j-1-N-k}_{\sigma,m}(\omega)-\mathcal{L}_{\omega,j-1-N-k}C({}^{+}D^{q,1}_{\sigma,m},0)\big)\quad.\end{aligned}\tag{7.38}$$

Hierbei sind

- $\beta^{k,\sigma,m}_{D,\gamma,n} := \kappa_{k,\sigma}\cdot\big\langle C({}^{+}D^{q,1}_{\gamma,n},0),\mathcal{L}^{k-2\sigma+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}\quad,$ (7.39)
- $\alpha^{k,\sigma,m}_{D,\gamma,n} := \kappa_{k,\sigma}\cdot\big\langle C({}^{+}D^{q,1}_{\gamma,n},0),\mathcal{L}^{k-2\sigma+1}\Lambda(0,H_{\sigma,m})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}\quad,$ (7.40)
- $\beta^{k,\sigma,m}_{R,\gamma,\nu} := \kappa_{k,\sigma}\cdot\big\langle C(0,{}^{+}R^{q+1,1}_{\gamma,\nu}),\mathcal{L}^{k-2\sigma+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}\quad,$ (7.41)
- $\alpha^{k,\sigma,m}_{R,\gamma,\nu} := \kappa_{k,\sigma}\cdot\big\langle C(0,{}^{+}R^{q+1,1}_{\gamma,\nu}),\mathcal{L}^{k-2\sigma+1}\Lambda(0,H_{\sigma,m})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}}\quad.$ (7.42)

Somit gibt es Polynome $\tilde{\mathbb{X}}^{j-1}_{\gamma,n}(\omega)$ und $\tilde{\mathbb{Y}}^{j-1}_{\gamma,\nu}(\omega)$ vom Grade $j-1$ in ω (und q–$(q+1)$–Formen als Koeffizienten), so daß

$$\mathcal{L}_{\omega,j-1}C({}^{+}D^{q,1}_{\gamma,n},0)\overset{j}{\sim}\tilde{\mathbb{X}}^{j-1}_{\gamma,n}(\omega)\qquad\text{und}\qquad\mathcal{L}_{\omega,j-1}C(0,{}^{+}R^{q+1,1}_{\gamma,\nu})\overset{j}{\sim}\tilde{\mathbb{Y}}^{j-1}_{\gamma,\nu}(\omega)$$

gelten. Wegen

$$\mathcal{L}_{\omega,j}C({}^{+}D^{q,1}_{\gamma,n},0)\overset{j}{\sim}\mathcal{L}_{\omega,j-1}C({}^{+}D^{q,1}_{\gamma,n},0)\quad\text{und entsprechend}\quad\mathcal{L}_{\omega,j}C(0,{}^{+}R^{q+1,1}_{\gamma,\nu})\overset{j}{\sim}\mathcal{L}_{\omega,j-1}C(0,{}^{+}R^{q+1,1}_{\gamma,\nu})$$

hängen die Koeffizienten von $\tilde{\mathbb{X}}^{j-1}_{\gamma,n}(\omega)$ und $\tilde{\mathbb{Y}}^{j-1}_{\gamma,\nu}(\omega)$ nicht von $j-1$ ab. Es existieren also Formen

$$X^{\ell}_{\gamma,n},Y^{\ell}_{\gamma,\nu}\in\mathrm{L}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\qquad,$$

so daß

- $\mathcal{A}^{j-1}_{\omega,\gamma,n}\overset{j}{\sim}\mathbb{X}^{j-1}_{\gamma,n}(\omega)-\tilde{\mathbb{X}}^{j-1}_{\gamma,n}(\omega)=:\sum_{\ell=0}^{j-1}(-\mathrm{i}\,\omega)^{\ell}\cdot X^{\ell}_{\gamma,n}\qquad,$ (7.43)
- $\mathcal{B}^{j-1}_{\omega,\gamma,\nu}\overset{j}{\sim}\mathbb{Y}^{j-1}_{\gamma,\nu}(\omega)-\tilde{\mathbb{Y}}^{j-1}_{\gamma,\nu}(\omega)=:\sum_{\ell=0}^{j-1}(-\mathrm{i}\,\omega)^{\ell}\cdot Y^{\ell}_{\gamma,\nu}$ (7.44)

gelten. Ein Vergleich mit (7.37) und (7.38) zeigt

$$\mathcal{L}_{\omega,j-1}C({}^{+}D^{q,1}_{\gamma,n},0)\,,\,\mathcal{L}_{\omega,j-1}C(0,{}^{+}R^{q+1,1}_{\gamma,\nu})\overset{j}{\sim}(0,0)\tag{7.45}$$

für $1\leq j\leq N$ und daher

$$X^{\ell}_{\gamma,n}=\Lambda^{-1}\mathcal{L}^{\ell}\Lambda(0,H_{\gamma,n})\qquad,\qquad Y^{\ell}_{\gamma,\nu}=\Lambda^{-1}\mathcal{L}^{\ell}\Lambda(E_{\gamma,\nu},0)\tag{7.46}$$

für $\ell=0,\ldots,N-1$. Die übrigen Koeffizienten $X^{\ell}_{\gamma,n}$ und $Y^{\ell}_{\gamma,\nu}$ kann man rekursiv aus (7.37), (7.38) bestimmen. Es folgen nämlich für $j-1\geq N$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{X}}^{j-1}_{\gamma,n}(\omega)=(-\mathrm{i}\,\omega)^N\cdot&\sum_{\substack{(k,\sigma,m)\\ \in\tilde{\Theta}^q_{j-1-N}}}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\beta^{k,\sigma,m}_{D,\gamma,n}\cdot\big(\mathbb{Y}^{j-1-N-k}_{\sigma,m}(\omega)-\tilde{\mathbb{Y}}^{j-1-N-k}_{\sigma,m}(\omega)\big)\\ &+(-\mathrm{i}\,\omega)^N\cdot\sum_{\substack{(k,\sigma,m)\\ \in\tilde{\Theta}^{q+1}_{j-1-N}}}(-\mathrm{i}\,\omega)^k\alpha^{k,\sigma,m}_{D,\gamma,n}\cdot\big(\mathbb{X}^{j-1-N-k}_{\sigma,m}(\omega)-\tilde{\mathbb{X}}^{j-1-N-k}_{\sigma,m}(\omega)\big)\end{aligned}\tag{7.47}$$

und

$$\tilde{\mathbb{Y}}^{j-1}_{\gamma,\nu}(\omega) = (-\,\mathrm{i}\,\omega)^N \cdot \sum_{\substack{(k,\sigma,m)\\ \in\tilde{\Theta}^q_{j-1-N}}} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^k \beta^{k,\sigma,m}_{R,\gamma,\nu} \cdot \big(\mathbb{Y}^{j-1-N-k}_{\sigma,m}(\omega) - \tilde{\mathbb{Y}}^{j-1-N-k}_{\sigma,m}(\omega)\big)$$
$$+ (-\,\mathrm{i}\,\omega)^N \cdot \sum_{\substack{(k,\sigma,m)\\ \in\tilde{\Theta}^{q+1}_{j-1-N}}} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^k \alpha^{k,\sigma,m}_{R,\gamma,\nu} \cdot \big(\mathbb{X}^{j-1-N-k}_{\sigma,m}(\omega) - \tilde{\mathbb{X}}^{j-1-N-k}_{\sigma,m}(\omega)\big) \quad . \tag{7.48}$$

Mit (7.36) und (7.43), (7.44) und durch Koeffizientenvergleich sehen wir daher, daß die Formen $X^\ell_{\gamma,n}$, $Y^\ell_{\gamma,\nu}$ für $\ell \geq N$ der Rekursion

- $$X^\ell_{\gamma,n} = \Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell\Lambda(0,H_{\gamma,n}) - \sum_{\substack{(k,\sigma,m)\\ \in\tilde{\Theta}^q_{\ell-N}}} \beta^{k,\sigma,m}_{D,\gamma,n} \cdot Y^{\ell-N-k}_{\sigma,m} - \sum_{\substack{(k,\sigma,m)\\ \in\tilde{\Theta}^{q+1}_{\ell-N}}} \alpha^{k,\sigma,m}_{D,\gamma,n} \cdot X^{\ell-N-k}_{\sigma,m} \quad , \tag{7.49}$$
- $$Y^\ell_{\gamma,\nu} = \Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell\Lambda(E_{\gamma,\nu},0) - \sum_{\substack{(k,\sigma,m)\\ \in\tilde{\Theta}^q_{\ell-N}}} \beta^{k,\sigma,m}_{R,\gamma,\nu} \cdot Y^{\ell-N-k}_{\sigma,m} - \sum_{\substack{(k,\sigma,m)\\ \in\tilde{\Theta}^{q+1}_{\ell-N}}} \alpha^{k,\sigma,m}_{R,\gamma,\nu} \cdot X^{\ell-N-k}_{\sigma,m} \tag{7.50}$$

genügen. Mit diesen Darstellungen folgt

$$\begin{aligned} X^\ell_{\gamma,n}\,,\, Y^\ell_{\gamma,\nu} &\in \operatorname{Lin}\big\{\Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell\Lambda(0,H_{\gamma,n}), \Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell\Lambda(E_{\gamma,\nu},0)\big\} \\ &\quad + \operatorname{Lin}\big\{X^{\ell-N-k}_{\sigma,m}\,,\, Y^{\ell-N-\tilde{k}}_{\tilde{\sigma},\tilde{m}} : (k,\sigma,m) \in \tilde{\Theta}^{q+1}_{\ell-N} \wedge (\tilde{k},\tilde{\sigma},\tilde{m}) \in \tilde{\Theta}^q_{\ell-N}\big\} \\ &\subset \operatorname{Lin}\big\{\Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell\Lambda(0,H_{\gamma,n}), \Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell\Lambda(E_{\gamma,\nu},0)\big\} + \operatorname{Lin}\big\{X^k_{\sigma,m}\,,\, Y^k_{\sigma,\tilde{m}} : k+2\sigma \leq \ell - N\big\} \end{aligned}$$

und daher per Induktion

$$\begin{aligned} X^\ell_{\gamma,n}\,,\, Y^\ell_{\gamma,\nu} &\in \operatorname{Lin}\big\{\Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell\Lambda(0,H_{\gamma,n}), \Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell\Lambda(E_{\gamma,\nu},0)\big\} \\ &\quad + \operatorname{Lin}\big\{\Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\sigma,m},0), \Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\sigma,\tilde{m}}) : k+2\sigma \leq \ell - N\big\} \quad . \end{aligned} \tag{7.51}$$

Außerdem erfüllen diese Koeffizienten–Formen trivialerweise

$$MX^0_{\gamma,n} = MY^0_{\gamma,\nu} = (0,0) \tag{7.52}$$

und für $\ell \leq N-1$

$$\Lambda^{-1}MX^\ell_{\gamma,n} = X^{\ell-1}_{\gamma,n} \qquad \text{und} \qquad \Lambda^{-1}MY^\ell_{\gamma,\nu} = Y^{\ell-1}_{\gamma,\nu} \quad . \tag{7.53}$$

Eine Induktion zeigt diese Gleichungen auch für alle $\ell \geq N$.
Wir erhalten insgesamt das Hauptresultat dieses Abschnitts

Satz 7.29
Seien $\mathbf{J} \in \mathbb{N}_0$, $s \in (\mathbf{J}+1/2,\infty) \setminus \mathbb{I}$ und desweiteren die Koeffizienten–Formen $X^\ell_{\gamma,n}$, $Y^\ell_{\gamma,\nu}$ für $\ell, 2\gamma \leq \mathbf{J} - N$ und $n = 1,\dots,\mu^{q+1}_\gamma$ sowie $\nu = 1,\dots,\mu^q_\gamma$ rekursiv durch (7.46), (7.49), (7.50) bestimmt. Weiterhin seien für $(F,G) \in \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega) \times \mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)$ und $j = 0,\dots,\mathbf{J}-N$ die „Korrekturoperatoren"

$$\Gamma_j(F,G) := \sum_{(k,\sigma,m)\in\tilde{\Theta}^q_j} \kappa_{k,\sigma}\big\langle (F,G), \mathcal{L}^{k-2\sigma+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} \cdot Y^{j-k}_{\sigma,m}$$
$$+ \sum_{(k,\sigma,m)\in\tilde{\Theta}^{q+1}_j} \kappa_{k,\sigma}\big\langle (F,G), \mathcal{L}^{k-2\sigma+1}\Lambda(0,H_{\sigma,m})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} \cdot X^{j-k}_{\sigma,m}$$

definiert. Dann gilt für alle beschränkten Teilgebiete $\Omega_\mathrm{b} \Subset \overline{\Omega}$ und $\omega \in \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$ sowie gleichmäßig bzgl. $(F,G) \in \operatorname{Reg}^{q,0}_s(\Omega)$ die Asymptotik

$$\Big\| \mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'}(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}'-N} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{N+j} \cdot \Gamma_j(F,G) \Big\|_{0,0,\Omega_\mathrm{b}} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big) \cdot \big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \quad .$$

Bemerkung 7.30
Wegen (7.52), (7.53) *und mit* $\Gamma_{-1}(F,G) := (0,0)$ *erfüllen die Korrekturoperatoren*

$$\Lambda^{-1}M\,\Gamma_j(F,G) = \Gamma_{j-1}(F,G)$$

und mit (7.51) *gilt*

$$\Gamma_j(F,G) \in \operatorname{Lin}\left\{\Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\sigma,m},0)\,,\ \Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\sigma,n}) : k+2\sigma \leq j\right\} \qquad .$$

Damit sind die Korrekturoperatoren

$$\Gamma_j\ :\ \mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega) \longrightarrow \operatorname{Lin}\left\{\Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\sigma,m},0)\,,\ \Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\sigma,n}) : k+2\sigma \leq j\right\}$$

stetig und degeneriert.

Bemerkung 7.31
Mit Hilfe der Darstellungen aus Korollar 7.15 von $\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\sigma,m},0)$, $\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\sigma,m})$ *und der Orthogonalitätseigenschaften aus Lemma 5.19 läßt sich die rekursive Definition der Koeffizienten–Formen* $X^\ell_{\gamma,n}$, $Y^\ell_{\gamma,\nu}$ *noch etwas detaillierter beschreiben. Wir sehen nämlich an* (7.39)*, wenn wir* $k-2\sigma\geq 0$ *beachten, daß* $\beta^{k,\sigma,m}_{D,\gamma,n}$ *für ungerade* $k-2\sigma+1$ *, also gerade* k *, verschwindet. Für gerade* $k-2\sigma+1$ *, also ungerade* k *, ergibt sich hingegen nach Korollar 7.15 und Lemma 5.19*

$$\beta^{k,\sigma,m}_{D,\gamma,n} = -\kappa_{k,\sigma}\cdot\xi^{k-2\sigma+1,\sigma,m}_{(1,\gamma,n,-)} \qquad .$$

Dementsprechend erhalten wir

$$\alpha^{k,\sigma,m}_{D,\gamma,n} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ -\kappa_{k,\sigma}\cdot\xi^{k-2\sigma+1,\sigma,m}_{(1,\gamma,n,-)} & \text{für } k \text{ gerade}\end{cases}$$

und analog

$$\beta^{k,\sigma,m}_{R,\gamma,\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ -\kappa_{k,\sigma}\cdot\zeta^{k-2\sigma+1,\sigma,m}_{(1,\gamma,\nu,-)} & \text{für } k \text{ gerade}\end{cases}$$

sowie

$$\alpha^{k,\sigma,m}_{R,\gamma,\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\kappa_{k,\sigma}\cdot\zeta^{k-2\sigma+1,\sigma,m}_{(1,\gamma,\nu,-)} & \text{für } k \text{ ungerade}\end{cases} \qquad .$$

Damit erhält die Rekursion (7.49), (7.50) *die folgende mehr explizite Gestalt*

- $$X^\ell_{\gamma,n} := \Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell\Lambda(0,H_{\gamma,n}) + \sum_{\substack{(k,\sigma,m)\in\tilde{\Theta}^q_{\ell-N}\\ k \text{ ungerade}}} \kappa_{k,\sigma}\xi^{k-2\sigma+1,\sigma,m}_{(1,\gamma,n,-)}\cdot Y^{\ell-N-k}_{\sigma,m} + \sum_{\substack{(k,\sigma,m)\in\tilde{\Theta}^{q+1}_{\ell-N}\\ k \text{ gerade}}} \kappa_{k,\sigma}\xi^{k-2\sigma+1,\sigma,m}_{(1,\gamma,n,-)}\cdot X^{\ell-N-k}_{\sigma,m} \qquad ,$$

- $$Y^\ell_{\gamma,\nu} := \Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell\Lambda(E_{\gamma,\nu},0) + \sum_{\substack{(k,\sigma,m)\in\tilde{\Theta}^q_{\ell-N}\\ k \text{ gerade}}} \kappa_{k,\sigma}\zeta^{k-2\sigma+1,\sigma,m}_{(1,\gamma,\nu,-)}\cdot Y^{\ell-N-k}_{\sigma,m} + \sum_{\substack{(k,\sigma,m)\in\tilde{\Theta}^{q+1}_{\ell-N}\\ k \text{ ungerade}}} \kappa_{k,\sigma}\zeta^{k-2\sigma+1,\sigma,m}_{(1,\gamma,\nu,-)}\cdot X^{\ell-N-k}_{\sigma,m} \qquad .$$

Beweis:
Sei o. B. d. A. $s \in (\mathbf{J}+1/2, \mathbf{J}+N/2) \setminus \mathbb{I}$. Setzen wir die Asymptotiken (7.43), (7.44) in die Abschätzung aus Lemma 7.27 ein, erhalten wir

$$\Big\| \mathcal{L}_{\omega,\mathbf{J}'}(F,G) - \sum_{(k,\sigma,m)\in\tilde{\Theta}^q_{\mathbf{J}'-N}} \sum_{\ell=0}^{\mathbf{J}'-N-k} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{N+k+\ell} \kappa_{k,\sigma} \big\langle (F,G), \mathcal{L}^{k-2\sigma+1}\Lambda(E_{\sigma,m},0)\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} \cdot Y^{\ell}_{\sigma,m}$$
$$- \sum_{(k,\sigma,m)\in\tilde{\Theta}^{q+1}_{\mathbf{J}'-N}} \sum_{\ell=0}^{\mathbf{J}'-N-k} (-\,\mathrm{i}\,\omega)^{N+k+\ell} \kappa_{k,\sigma} \big\langle (F,G), \mathcal{L}^{k-2\sigma+1}\Lambda(0,H_{\sigma,m})\big\rangle_{\Omega,\Lambda^{-1}} \cdot X^{\ell}_{\sigma,m} \Big\|_{0,0,\Omega_{\mathrm{b}}}$$
$$= \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big) \cdot \big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad .$$

Mit der neuen Variablen $j(\ell) := \ell + k$ und der Summationsreihenfolge j , k , σ , m erhalten wir die Behauptung des Satzes. An der Definition der Korrekturoperatoren und mit (7.51) sehen wir desweiteren

$$\begin{aligned}
\Gamma_j(F,G) &\in \operatorname{Lin}\big\{X^{j-k}_{\sigma,m}\,,\, Y^{j-\ell}_{\gamma,n} : (k,\sigma,m)\in\tilde{\Theta}^{q+1}_j \ \wedge\ (\ell,\gamma,n)\in\tilde{\Theta}^q_j\big\}\\
&\subset \operatorname{Lin}\big\{X^{k}_{\sigma,m}\,,\, Y^{k}_{\sigma,n} : k+2\sigma\le j\big\}\\
&\subset \operatorname{Lin}\big\{\Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\sigma,m})\,,\, \Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\sigma,n},0) : k+2\sigma\le j\big\}\\
&\qquad + \operatorname{Lin}\big\{\Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell\Lambda(E_{\gamma,\nu},0)\,,\, \Lambda^{-1}\mathcal{L}^\ell\Lambda(0,H_{\gamma,\tilde{\nu}}) : k+2\sigma\le j \ \wedge\ \ell+2\gamma\le k-N\big\}\\
&\subset \operatorname{Lin}\big\{\Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(0,H_{\sigma,m})\,,\, \Lambda^{-1}\mathcal{L}^k\Lambda(E_{\sigma,n},0) : k+2\sigma\le j\big\}
\end{aligned}$$

und mit (7.52), (7.53) überzeugen wir uns noch von

$$\Lambda^{-1} M\,\Gamma_j(F,G) = \Gamma_{j-1}(F,G) \qquad .$$

Dies zeigt die Behauptungen in Bemerkung 7.30. ■

7.4 Niederfrequenzasymptotik in gewichteten Normen

Satz 7.32
Seien $\mathbf{J}\in\mathbb{N}_0$ mit $\mathbf{J}'\ge 0$ und $s\in(\mathbf{J}+1/2,\infty)\setminus\mathbb{I}$ sowie $t<\min\{s,N/2\}-\mathbf{J}-2$. Dann gilt für $\omega\in\mathbb{C}_{+,\hat{\omega}}\setminus\{0\}$ und gleichmäßig bzgl. $(F,G)\in\operatorname{Reg}^{q,0}_s(\Omega)$

$$\Big\|\mathcal{L}_\omega(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}'}(-\,\mathrm{i}\,\omega)^j\cdot\mathcal{L}_0\mathcal{L}^j(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}'-N}(-\,\mathrm{i}\,\omega)^{N+j}\cdot\Gamma_j(F,G)\Big\|_{0,t,\Omega} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big)\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad .$$

Beweis:
Seien $\omega\in\mathbb{C}_{+,\hat{\omega}}\setminus\{0\}$, $(F,G)\in\operatorname{Reg}^{q,0}_s(\Omega)$ und $(E,H):=\mathcal{L}_\omega(F,G)$. Dann erfüllt

$$\eta(E,H)\in\mathbf{R}^q_{<-\frac12}\times\mathbf{D}^{q+1}_{<-\frac12}$$

die Strahlungsbedingung und löst

$$(M+\mathrm{i}\,\omega)\eta(E,H) = (M+\mathrm{i}\,\omega\Lambda)\eta(E,H) = \eta(F,G)+C_{M,\eta}(E,H) = (\eta+C_{M,\eta}\mathcal{L}_\omega)(F,G) =: (f,g) \quad . \tag{7.54}$$

(Hier und im folgenden denken wir uns oft ohne Kommentar Formen durch Null in den $\mathbb{R}^N$ fortgesetzt.) Also gilt $\eta(E,H)=L_\omega(f,g)$ oder auf $\operatorname{Reg}^{q,0}_s(\Omega)$ $\big($sogar auf $\mathrm{L}^{2,q}_s(\Omega)\times\mathrm{L}^{2,q+1}_s(\Omega)\big)$

$$\eta\mathcal{L}_\omega = L_\omega(\eta\operatorname{Id}+C_{M,\eta}\mathcal{L}_\omega) \qquad . \tag{7.55}$$

Die Divergenzfreiheit von F und Rotationsfreiheit von G liefern weiterhin $\Lambda(E,H)\in{}_0\mathrm{D}^q_{<-\frac12}(\Omega)\times{}_0\mathrm{R}^{q+1}_{<-\frac12}(\Omega)$ und daher

$$\operatorname{div}E|_{\operatorname{supp}\eta}=0 \qquad , \qquad \operatorname{rot}H|_{\operatorname{supp}\eta}=0 \qquad . \tag{7.56}$$

Mit (7.54) folgen $(f,g)\in\mathrm{D}^q_s\times\mathrm{R}^{q+1}_s$ sowie

$$(\operatorname{div}f,\operatorname{rot}g) = \mathrm{i}\,\omega(\operatorname{div}\eta E,\operatorname{rot}\eta H) \overset{(7.56)}{=} \mathrm{i}\,\omega(C_{\operatorname{div},\eta}E, C_{\operatorname{rot},\eta}H) =: -\,\mathrm{i}\,\omega Z_\eta(E,H) \qquad . \tag{7.57}$$

Mit (7.54), (7.55) und den Operatoren Φ_j , Ψ_j aus Lemma 5.6 erhalten wir

$$\eta\mathcal{L}_\omega(F,G) = L_{\omega,\mathbf{J}'}(f,g) + \sum_{j=0}^{\mathbf{J}'}(-\operatorname{i}\omega)^j\big(\Phi_j(f,g) + \frac{\operatorname{i}}{\omega}\Psi_j(\operatorname{div} f, \operatorname{rot} g)\big) \qquad ,$$

wobei

$$L_{\omega,\mathbf{J}'}(f,g) := L_\omega(f,g) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}'}(-\operatorname{i}\omega)^j\big(\Phi_j(f,g) + \frac{\operatorname{i}}{\omega}\Psi_j(\operatorname{div} f, \operatorname{rot} g)\big)$$

sei. Setzen wir (7.54) und (7.57) ein, ergibt sich

$$\eta\mathcal{L}_\omega(F,G) = L_{\omega,\mathbf{J}'}(f,g) + \sum_{j=0}^{\mathbf{J}'}(-\operatorname{i}\omega)^j\Phi_j\eta(F,G) + \sum_{j=0}^{\mathbf{J}'}(-\operatorname{i}\omega)^j\mathcal{S}_j\mathcal{L}_\omega(F,G) \tag{7.58}$$

mit den Operatoren

$$\mathcal{S}_j := \Phi_j C_{M,\eta} + \Psi_j Z_\eta \qquad .$$

Definieren wir Operatoren $\mathcal{K}_j$ durch

$$\sum_{j=0}^{\mathbf{J}}(-\operatorname{i}\omega)^j\cdot\mathcal{K}_j := \sum_{j=0}^{\mathbf{J}}(-\operatorname{i}\omega)^j\cdot\mathcal{L}_0\mathcal{L}^j + \sum_{j=0}^{\mathbf{J}-N}(-\operatorname{i}\omega)^{N+j}\cdot\Gamma_j$$

sowie für $J \leq \mathbf{J}$

$$\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,J} := \mathcal{L}_\omega - \sum_{j=0}^{J}(-\operatorname{i}\omega)^j\mathcal{K}_j = \mathcal{L}_{\omega,J} - \sum_{j=0}^{J-N}(-\operatorname{i}\omega)^{N+j}\cdot\Gamma_j$$

und benutzen diese Notationen in (7.58), so folgt

$$\begin{aligned}\eta\mathcal{L}_\omega(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}'}(-\operatorname{i}\omega)^j\Phi_j\eta(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}'}\sum_{k=0}^{\mathbf{J}'-j}(-\operatorname{i}\omega)^{j+k}\mathcal{S}_j\mathcal{K}_k(F,G)&\\ = L_{\omega,\mathbf{J}'}(f,g) + \sum_{j=0}^{\mathbf{J}'}(-\operatorname{i}\omega)^j\mathcal{S}_j\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}'-j}(F,G) \qquad .&\end{aligned} \tag{7.59}$$

Beachten wir, daß die Koeffizienten der Differentialoperatoren $C_{M,\eta}$ und Z_η kompakte Träger besitzen, liefert Lemma 5.6 gleichmäßig bzgl. ω und (f,g) bzw. (F,G)

$$\begin{aligned}\big\|L_{\omega,\mathbf{J}'}(f,g)\big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} &\leq c\cdot|\omega|^{\mathbf{J}'+1}\cdot\Big(\big\|(f,g)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \frac{1}{|\omega|}\cdot\big\|(\operatorname{div} f,\operatorname{rot} g)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N}\Big)\\ &\leq c\cdot|\omega|^{\mathbf{J}'+1}\cdot\Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|C_{M,\eta}\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N} + \big\|Z_\eta\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,s,\mathbb{R}^N}\Big)\\ &\leq c\cdot|\omega|^{\mathbf{J}'+1}\cdot\Big(\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} + \big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,0,\operatorname{supp}\nabla\eta}\Big) \qquad .\end{aligned}$$

Daher folgt mit Satz 7.3 (i) gleichmäßig bzgl. ω und (F,G)

$$\big\|L_{\omega,\mathbf{J}'}(f,g)\big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} \leq c\cdot|\omega|^{\mathbf{J}'+1}\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big)\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad .$$

Desweiteren erhalten wir wegen der Stetigkeit der Operatoren Φ_j und Ψ_j von L^2_s nach L^2_t sowie mit Satz 7.29 gleichmäßig bzgl. ω und (F,G)

$$\big\|\mathcal{S}_j\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}'-j}(F,G)\big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} \leq c\cdot\big\|\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}'-j}(F,G)\big\|_{0,0,\operatorname{supp}\nabla\eta} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}-j}\big)\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad .$$

Kombinieren wir diese beiden Abschätzungen mit (7.59) und summieren in der Doppelsumme um, so bekommen wir

$$\Big\|\eta\mathcal{L}_\omega(F,G) - \sum_{j=0}^{\mathbf{J}'}(-\operatorname{i}\omega)^j\Big(\Phi_j\eta(F,G) + \sum_{k=0}^{j}\mathcal{S}_k\mathcal{K}_{j-k}(F,G)\Big)\Big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big)\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad .$$

Da mit Satz 7.29 auch für jedes beschränkte Gebiet $\Omega_{\mathrm{b}} \Subset \overline{\Omega}$ gleichmäßig bzgl. ω und (F,G)

$$\big\|\eta\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}'}(F,G)\big\|_{0,0,\Omega_{\mathrm{b}}} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big)\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega}$$

gilt, erhalten wir sogar auf $\mathrm{Reg}^{q,0}_s(\Omega)$ die Identitäten

$$\eta\mathcal{K}_j = \Phi_j\eta + \sum_{k=0}^{j}\mathcal{S}_k\mathcal{K}_{j-k} \qquad , \qquad j = 0,\ldots,\mathbf{J} \qquad ,$$

und somit gleichmäßig bzgl. ω und (F,G) die Abschätzung

$$\big\|\eta\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}'}(F,G)\big\|_{0,t,\mathbb{R}^N} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big)\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad .$$

Mit Satz 7.29 können wir noch $\big\|(1-\eta)\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}'}(F,G)\big\|_{0,t,\Omega}$ abschätzen und dies liefert schließlich die Behauptung. ∎

Wir können (mit den Notationen des obigen Beweises) Satz 7.32 noch ein wenig verschärfen.

Korollar 7.33
Es seien die Voraussetzungen des Satzes 7.32 erfüllt und $\mathbf{J}' \geq 1$ *sowie* $\omega \in \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} \setminus \{0\}$ *. Dann ist*

$$\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}'} : \mathrm{Reg}^{q,0}_s(\Omega) \longrightarrow \big(\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_t(\Omega)\times\mathrm{D}^{q+1}_t(\Omega)\big)\cap\Lambda^{-1}\,\mathrm{Reg}^{q,0}_t(\Omega)$$

stetig und es gilt die Abschätzung

$$\big\|\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}'}\big\|_{B\left(\mathrm{Reg}^{q,0}_s(\Omega),\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_t(\Omega)\times\mathrm{D}^{q+1}_t(\Omega)\right)} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big) \qquad .$$

Bemerkung 7.34
Die Behauptungen des vorherigen Korollars gelten im Fall $\mathbf{J}' = 0$ *ebenso, wenn wir* $\overset{\circ}{\mathrm{R}}{}^q_t(\Omega)\times\mathrm{D}^{q+1}_t(\Omega)$ *durch* $\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^q_t(\Omega)\times\mathbf{D}^{q+1}_t(\Omega)$ *und die Bedingung*

$$t < \min\{s,N/2\} - \mathbf{J} - 2 \qquad \textit{durch} \qquad t < \min\{s,N/2\} - \mathbf{J} - 2 \quad \wedge \quad t \leq -N/2$$

ersetzen.

Beweis:
Beachten wir $M\mathcal{L}_0 = \mathrm{Id}$ und $\Lambda^{-1}M\Gamma_j = \Gamma_{j-1}$ sowie $\Gamma_{-1} = 0$, erhalten wir für $1 \leq \ell \leq \mathbf{J}'$

$$M\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\ell}(F,G) = -\,\mathrm{i}\,\omega\Lambda\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\ell-1}(F,G)$$

und desweiteren

$$M\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,0}(F,G) = M\big(\mathcal{L}_\omega(F,G) - \mathcal{L}_0(F,G)\big) = -\,\mathrm{i}\,\omega\Lambda\mathcal{L}_\omega(F,G) \qquad .$$

Im Fall $\mathbf{J}' \geq 1$ liefert Satz 7.32 für $s \in (\mathbf{J}+1/2,\infty)\setminus\mathbb{I}$ und $t < \min\{s,N/2\} - \mathbf{J} - 2$ bzw. $\tilde{s} \in (\mathbf{J}-1+1/2,\infty)\setminus\mathbb{I}$ und $\tilde{t} < \min\{\tilde{s},N/2\} - \mathbf{J} + 1 - 2$

- $\big\|\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}'}(F,G)\big\|_{0,t,\Omega} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big)\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad ,$
- $\big\|M\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,\mathbf{J}'}(F,G)\big\|_{0,\tilde{t},\Omega} \leq c\cdot|\omega|\cdot\big\|\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,(\mathbf{J}-1)'}(F,G)\big\|_{0,\tilde{t},\Omega} = |\omega|\cdot\mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}-1}\big)\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,\tilde{s},\Omega} \qquad .$

Wählen wir $\tilde{s} := s$ und $\tilde{t} := t+1$, erhalten wir folglich die Behauptungen des Korollars. Für $\mathbf{J}' = 0$ ist entweder $\mathbf{J}' = \mathbf{J} = 0$ oder $\mathbf{J}' = \mathbf{J} - 1 = 0$. Mit $s \in (\mathbf{J}+1/2,\infty)\setminus\mathbb{I}$ sowie $t < \min\{s,N/2\} - \mathbf{J} - 2$ und $t \leq -N/2$ können wir dann sowohl Satz 7.32 als auch Satz 7.3 anwenden und erhalten

- $\big\|\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,0}(F,G)\big\|_{0,t,\Omega} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big)\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad ,$
- $\big\|M\mathcal{L}^{\mathcal{K}}_{\omega,0}(F,G)\big\|_{0,t,\Omega} \leq c\cdot|\omega|\cdot\big\|\mathcal{L}_\omega(F,G)\big\|_{0,t,\Omega} = \mathcal{O}'\big(|\omega|^{\mathbf{J}}\big)\cdot\big\|(F,G)\big\|_{0,s,\Omega} \qquad .$

Damit ist auch die Bemerkung bewiesen. ∎

7.5 Differenzierbarkeit der Resolvente im Nullpunkt

Mit den Resultaten des letzten Abschnitts erhalten wir sofort die Differenzierbarkeit von $\mathcal{L}_\omega$ in der Operatornorm im Nullpunkt. Genauer:

Satz 7.35
Seien $s \in (3/2, \infty) \setminus \mathbb{I}$, $t < \min\{s, N/2\} - 3$ und $t < -1/2$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcccc} \mathbb{L} & : & \mathbb{C}_{+,\hat{\omega}} & \longrightarrow & B\big(\operatorname{Reg}_s^{q,0}(\Omega), \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}_t^q(\Omega) \times \mathbf{D}_t^{q+1}(\Omega)\big) \\ & & \omega & \longmapsto & \mathcal{L}_\omega \end{array}$$

im Nullpunkt differenzierbar und besitzt dort die Ableitung

$$\mathcal{L}_0' := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathbb{L}(0) = -\,\mathrm{i}\,\mathcal{L}_0 \Lambda \mathcal{L}_0 \qquad .$$

Bemerkung 7.36
Hier genügt es, $\hat{j} \geq 8 + N$ in (1.34) *zu wählen.*

Beweis:
Für $\mathbf{J}' = \mathbf{J} = 1$ sind die Operatoren $\mathcal{L}_\omega$, $\mathcal{L}_0$ und $\mathcal{L}_0 \Lambda \mathcal{L}_0$ in (siehe Korollar 7.5)

$$B_{s,t} = B\big(\operatorname{Reg}_s^{q,0}(\Omega), \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}_t^q(\Omega) \times \mathbf{D}_t^{q+1}(\Omega)\big)$$

wohldefiniert und damit liefert Korollar 7.33, da die Korrekturoperatoren Γ_j erst für $\mathbf{J}' \geq N \geq 3$ auftreten,

$$\big\| \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}_0 + \mathrm{i}\,\omega \mathcal{L}_0 \Lambda \mathcal{L}_0 \big\|_{B_{s,t}} = o\big(|\omega|\big) \qquad ,$$

also

$$\Big\| \frac{1}{\omega}(\mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}_0) + \mathrm{i}\,\mathcal{L}_0 \Lambda \mathcal{L}_0 \Big\|_{B_{s,t}} = o(1) \xrightarrow{\omega \to 0} 0 \qquad .$$

■

Literatur

[1] Agmon, Sh., *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, van Nostrand, New York, (1965).

[2] Ammari, H., Laouadi, M., Nédélec, J.–C., „Low frequency behavior of solutions to electromagnetic scattering problems in chiral media", *SIAM J. Appl. Math.*, 58 (3), (1998), 1022-1042.

[3] Ammari, H., Nédélec, J.–C., „Low–frequency electromagnetic scattering", *SIAM J. Math. Anal.*, 31 (4), (2000), 836-861.

[4] Athanasiadis, C., Costakis, G., Stratis, I. G., „Electromagnetic scattering by a perfectly conducting obstacle in a homogeneous chiral environment: solvability and low–frequency theory", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 25, (2002), 927-944.

[5] Bauer, S., „Eine Helmholtzzerlegung gewichteter L^2–Räume von q–Formen in Außengebieten des $\mathbb{R}^N$", *Diplomarbeit*, Essen, (2000).

[6] Bauer, S., „On the absence of eigenvalues of Maxwell and Lamé Systems", eingereicht und angenommen bei *Math. Meth. Appl. Sci.*

[7] Bishop, R. L., Goldberg, S. I., *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover Publications, New York, (1968).

[8] Dassios, G., Kleinman, R., *Low Frequency Scattering*, Clarendon Press, Oxford, (2000).

[9] Duff, G. F. D., „Differential forms in manifolds with boundary", *Ann. Math.*, 56 (1952), 115-127.

[10] Duff, G. F. D., Spencer, D. C., „Harmonic tensors on Riemannian manifolds with boundary", *Ann. Math.*, 56, (1952), 128-156.

[11] Eidus, D. M., „The Principle of Limiting Absorption", *Math. Sb.*, 57 (99) (1962), 13-44, und *AMS Transl.*, 47 (2), (1965), 157-191.

[12] Eidus, D. M., „The Principle of Limiting Amplitude", *Russ. Math. Surv.*, 24 (3), (1969), 97-167.

[13] Eidus, D. M., „On the spectra and eigenfunctions of the Schrödinger and Maxwell operators", *J. Math. Anal. Appl.*, 106, (1985), 540-568.

[14] Ikebe, T., Saito, Y., „Limiting absorption method and absolute continuity for the Schrödinger operators", *J. Math. Kyoto Univ.*, 12, (1972), 513-542.

[15] Jänich, K., *Vektoranalysis*, Springer, Heidelberg, (1993).

[16] Kress, R., „Potentialtheoretische Randwertprobleme bei Tensorfeldern beliebiger Dimension und beliebigen Ranges", *Arch. Rational Mech. Anal.*, 47, (1972), 59-80.

[17] Kuhn, P., „Die Maxwellgleichung mit wechselnden Randbedingungen", *Dissertation*, Essen, (1999).

[18] Leis, R., „Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien", *Math. Z.*, 106, (1968), 213-224.

[19] Leis, R., „Über die eindeutige Fortsetzbarkeit der Lösungen der Maxwellschen Gleichungen in anisotropen inhomogenen Medien", *Bull. Polyt. Inst. Jassy*, XIV (VIII), Fasc. 3-4, (1968), 119-124.

[20] Leis, R., *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics*, Teubner, Stuttgart, (1986).

[21] Magnus, W., Oberhettinger, F., Soni, R. P., *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Springer, Berlin – Heidelberg – New York, (1966).

[22] McOwen, R. C., „Behavior of the Laplacian in weighted Sobolev spaces", *Comm. Pure Appl. Math.*, 32, (1979), 783-795.

[23] Müller, C., *Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen*, Springer, Berlin – Heidelberg – New York, (1957).

[24] Pauly, D., „Eine Fredholmsche Alternative für die zeitharmonischen Maxwellschen Gleichungen inhomogener Medien in Außengebieten des $\mathbb{R}^3$", *Diplomarbeit*, Essen, (1997).

[25] Peter, B., „Die Lösungen der Helmholtzschen Schwingungsgleichung in Außengebieten und die Asymptotik ihrer Frequenzableitungen bei hohen und niedrigen Frequenzen", *Dissertation*, Essen, (1998).

[26] Picard, R., „Zur Theorie der harmonischen Differentialformen", *manuscripta math.*, 27, (1979), 31-45.

[27] Picard, R., „Randwertaufgaben der verallgemeinerten Potentialtheorie", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 3, (1981), 218-228.

[28] Picard, R., „Ein vereinheitlichter Zugang für eine Klasse linearer Wellenausbreitungs–Phänomene", *Habilitationsschrift*, Bonn, (1981).

[29] Picard, R., „On the boundary value problems of electro– and magnetostatics", *Proc. Roy. Soc. Edin.*, 92 (A), (1982), 165-174.

[30] Picard, R., „Ein Hodge–Satz für Mannigfaltigkeiten mit nicht–glattem Rand", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 5, (1983), 153-161.

[31] Picard, R., „An Elementary Proof for a Compact Imbedding Result in Generalized Electromagnetic Theory", *Math. Z.*, 187, (1984), 151-164.

[32] Picard, R., „On the low frequency asymptotics in electromagnetic theory", *J. Reine Angew. Math.*, 354, (1984), 50-73.

[33] Picard, R., „The low frequency limit for the time–harmonic acoustic waves", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 8, (1986), 436-450.

[34] Picard, R., „Some decomposition theorems and their applications to non–linear potential theory and Hodge theory", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 12, (1990), 35-53.

[35] Picard, R., „On a selfadjoint realization of curl in exterior domains", *Math. Z.*, 229, (1998), 319-338.

[36] Picard, R., Milani, A., „Decomposition theorems and their applications to non–linear electro– and magneto–static boundary value problems", *Lecture Notes in Math.*, 1357, Springer, Berlin – New York, (1988), *Partial diff. eq. and cal. of var.*, 317-340.

[37] Picard, R., Weck, N., Witsch, K. J., „Time-Harmonic Maxwell Equations in the Exterior of Perfectly Conducting, Irregular Obstacles", *Analysis*, 21, (2001), 231-263.

[38] Ramm, A. G., Weaver O. L., Weck, N., Witsch, K. J., „Dissipative Maxwell's Equations at Low Frequencies", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 13, (1990), 305-322.

[39] Rellich, F., „Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten", *Jber. Dt. Math.–Verein.*, 53, (1943), 57-65.

[40] Vogelsang, V., „Die absolute Stetigkeit des positiven Spektrums der Schwingungsgleichung mit oszillierendem Hauptteil", *Math. Z.*, 181, (1982), 201-213.

[41] Warner, F., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, New York, (1983).

[42] Weber, C., „A local compactness theorem for Maxwell's equations", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2, (1980), 12-25.

[43] Weck, N., „Eine Lösungstheorie für die Maxwellschen Gleichungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nicht–glattem Rand", *Habilitationsschrift*, Bonn, (1972).

[44] Weck, N., „Maxwell's boundary value problems on Riemannian manifolds with nonsmooth boundaries", *J. Math. Anal. Appl.*, 46, (1974), 410-437.

[45] Weck, N., Witsch, K. J., „Low frequency asymptotics for dissipative Maxwell's equations in bounded domains", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 13, (1990), 81-93.

[46] Weck, N., Witsch, K. J., „The low frequency limit of the exterior Dirichlet problem for the reduced wave equation", *Appl. Anal.*, 38, (1990), 33-43.

[47] Weck, N., Witsch, K. J., „Exterior Dirichlet problem for the reduced wave equation: asymptotic analysis of low frequencies", *Comm. PDE*, 16, (1991), 173-195.

[48] Weck, N., Witsch, K. J., „Exact Low Frequency Analysis for a Class of Exterior Boundary Value Problems for the Reduced Wave Equation in Two Dimensions", *J. Diff. Equ.*, 100, (1992), 312-340.

[49] Weck, N., Witsch, K. J., „Exact Low Frequency Analysis for a Class of Exterior Boundary Value Problems for the Reduced Wave Equation in Higher Dimensions", *Asymptotic Analysis*, 6, (1992), 161-172.

[50] Weck, N., Witsch, K. J., „Complete Low Frequency Analysis for the Reduced Wave Equation with Variable Coefficients in Three Dimensions", *Comm. PDE*, 17, (1992), 1619-1663.

[51] Weck, N., Witsch, K. J., „Generalized Spherical Harmonics and Exterior Differentiation in Weighted Sobolev Spaces", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 17, (1994), 1017-1043.

[52] Weck, N., Witsch, K. J., „Generalized Linear Elasticity in Exterior Domains I", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 20, (1997), 1469-1500.

[53] Weck, N., Witsch, K. J., „Generalized Linear Elasticity in Exterior Domains II", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 20, (1997), 1501-1530.

[54] Werner, P., „Über das Verhalten elektromagnetischer Felder für kleine Frequenzen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten I", *J. Reine Angew. Math.*, 278, (1975), 365-397.

[55] Werner, P., „Über das Verhalten elektromagnetischer Felder für kleine Frequenzen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten II", *J. Reine Angew. Math.*, 280, (1976), 98-125.

[56] Weyl, H., „Die natürlichen Randwertaufgaben im Außenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges", *Math. Z.*, 56, (1952), 105-119.

[57] Witsch, K. J., „A Remark on a Compactness Result in Electromagnetic Theory", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 16, (1993), 123-129.

[58] Wloka, J., *Partielle Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart, (1982).

Symbolverzeichnis

Mengen

Indexmengen

Konstanten

Operatoren und Abbildungen

Normen und Skalarprodukte

Transformationen

Funktionenräume

Formenräume

spezielle Formenräume

Operatorenräume

spezielle Funktionen

spezielle Formen und Operatoren

Differentialoperatoren

Lösungsoperatoren

Türme

$(\eta)^{-}\mathcal{D}_t^{q,\leq K}\,,\ (\eta)^{-}\mathcal{R}_t^{q,\leq K}$	77
$\eta\mathcal{D}^q(\mathcal{I})\,,\ \eta\mathcal{R}^{q+1}(\mathcal{J})$	101
$(\eta)\mathcal{D}_s^q\,,\ (\eta)\mathcal{R}_s^q$	88
$(\eta)A_s^q\,,\ (\eta)\mathcal{A}_s^q$	88
$(\eta)\tilde{\mathcal{D}}_s^q\,,\ (\eta)\tilde{\mathcal{R}}_s^q$	106
$(\eta)\mathcal{T}^q$	88
${}^{\pm}\mathrm{h}_\sigma^k\,,\ \mathrm{h}_I\,,\ \mathrm{h}_{\mathcal{J}}$	68, 101

Probleme

$\mathrm{Max}(\Lambda,\omega,F,G)$	35
$\mathrm{Max}(\Lambda,0,f,F,G,g,\zeta,\xi)$	99
$\mathrm{Max}(\Lambda,0,F,G)$	110

Eigenschaften des Gebietsrandes

MKE , LMKE	26, 28, 51
SME	28

Sonstige Symbole oder Schreibweisen

$\delta_{k,l}$	Kronecker–Symbol
$\mathcal{O}\,,\ o$	Landau–Symbole
$\mathcal{O}'$	128
$\overset{\ell}{\sim}$	131
$\cong$	70