Eine Fredholmsche Alternative für die zeitharmonischen Maxwellschen Gleichungen inhomogener Medien in Außengebieten des $\mathbb{R}^3$

DIPLOMARBEIT
im Fach Mathematik
an der Universität-GHS-Essen

Dirk Pauly

Essen, im August 1997

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Bezeichnungen **2**

2 Regularitätssätze und vorbereitende Lemmata **8**

3 Das polynomiale und exponentielle Abklingen der Eigenlösungen **19**

4 Lösungstheorie und Fredholmsche Alternative **33**
4.1 Die a-priori-Abschätzung 33
4.2 Lösungstheorie mittels des Prinzips der Grenzabsorption 36

5 Verbesserungen nach dem Diplom **45**
5.1 Einige weitere Sätze 45
5.2 Verschärfung des Hauptresultates 46

Kapitel 1

Einleitung und Bezeichnungen

Maxwell erkannte als Erster die völlige Symmetrie zwischen elektrischem und magnetischem Feld (bis auf die Tatsache, daß es wohl keine magnetischen Ladungen und Ströme gibt): *Ein sich zeitlich änderndes elektrisches (magnetisches) Feld erzeugt ein magnetisches (elektrisches) Wirbelfeld.* Die differentielle Form des vollständigen Feldgleichungssatzes lautet:

$$\begin{aligned}
\text{rot } H &= \dot{D} + j && (1.1)\\
\text{rot } E &= -\dot{B} && (1.2)\\
\text{div } D &= \rho && (1.3)\\
\text{div } B &= 0 && (1.4)
\end{aligned}$$

Dabei bedeuten:

H	:	magnetische Feldstärke
E	:	elektrische Feldstärke
B	:	Induktionsflußdichte
D	:	dielektrische Verschiebung
j	:	Stromdichte
ρ	:	Ladungsdichte

Zusätzlich gelten die Beziehungen $D = \epsilon E$ und $B = \mu H$, wobei ϵ die Dielektrizität und μ die Permeabilität des Mediums bezeichnen.
Häufig sind ϵ, μ linear und zeitunabhängig, wodurch sich (1.1) bis (1.4) zu dem System

$$\begin{aligned}
\text{rot } H &= \epsilon\dot{E} + j && (1.5)\\
\text{rot } E &= -\mu\dot{H} && (1.6)\\
\text{div } \epsilon E &= \rho && (1.7)\\
\text{div } \mu H &= 0 && (1.8)
\end{aligned}$$

vereinfachen. Durch einen zeitharmonischen Ansatz (d. h. $u(x,t) := e^{i\omega t}\hat{u}(x)$) gelangt man sodann zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{rot } \hat{H} &= i\omega\epsilon\hat{E} + \hat{j} && (1.9) \\ \text{rot } \hat{E} &= -i\omega\mu\hat{H} && (1.10) \\ \text{div } \epsilon\hat{E} &= \hat{\rho} && (1.11) \\ \text{div } \mu\hat{H} &= 0, && (1.12) \end{aligned}$$

welches in dieser Arbeit behandelt werden soll. Mit den Definitionen

$$a := \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \hat{E} \\ \hat{H} \end{pmatrix}, \qquad f := \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -iA_+^{-1}\hat{j} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_+ := \epsilon, \qquad A_- := \mu$$

$$M_A := i \begin{pmatrix} 0 & -A_+^{-1}\text{rot} \\ A_-^{-1}\text{rot} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

lesen sich (1.9) und (1.10) nun

$$(M_A - \omega)a = f. \tag{1.14}$$

Ergeben sich aus dem Text eindeutig die Matrizen $A_\pm$, so sei $M := M_A$. In dieser Arbeit soll nun Gleichung (1.14) in Außengebieten des $\mathbf{R}^3$ diskutiert werden. Nachdem der Lösungsbegriff für (1.14) und der Maxwell-Operator[1] M vernünftig im Außenraumfall definiert worden sind, werden für reelle Frequenzen $\omega \neq 0$ in (1.14) das polynomiale und exponentielle Abklingen der Eigenlösungen (siehe Sätze 3.1 und 3.2) und eine Art Fredholmsche Alternative (siehe Satz 4.3) bewiesen. Dazu werden bestimmte Voraussetzungen an das Wachstumsverhalten der Koeffizientenmatrizen $A_\pm$ und der rechten Seiten f gestellt, wodurch ein Lösungsbegriff in gewichteten Sobolevräumen nahegelegt wird.

Aufgrund eines klassischen Theorems von F. Rellich [9] gibt es neben der Null keine quadratintegrabelen Lösungen der homogenen Helmholtzschen Schwingungsgleichung in Außengebieten für reelle Frequenzen. Dieses Ergebnis wurde von verschiedenen Autoren verallgemeinert und entscheidend in den Eindeutigkeitsbeweisen von (1.14) im Falle, daß das Medium außerhalb einer Kugel homogen und isotrop (hierbei sind $A_\pm$ Vielfache der Einheitsmatrix) ist, z. B. von Leis ([6], Kapitel 8,9), [7] und Yee [17] benutzt. In diesem Falle erhält man nämlich im Äußeren einer Kugel durch die Beziehung rot rot $-\nabla$div $= -\Delta$ eine homogene Helmholtzsche Schwingungsgleichung. Eine Erweiterung der Matrizenklasse, die in der Matrizenklasse dieser Arbeit enthalten ist, findet man bei Jawtusch [4].

[1]In dieser Arbeit wird nur der reduzierte Maxwell-Operator in Außengebieten des $\mathbf{R}^3$ behandelt werden, was physikalisch div $\epsilon\hat{E} = 0$ und div $\mu\hat{H} = 0$ bedeutet.

In dieser Arbeit wird die Eindeutigkeit für reelle Frequenzen nicht erreicht werden, jedoch das polynomiale und exponentielle Abklingen der Eigenlösungen. Die Beweisideen hierzu gehen auf Techniken von Eidus [3] zurück, wobei die Voraussetzungen, z. B. die Quadratintegrabilität der Eigenlösungen, abgeschwächt werden können. Eine wichtige Eigenschaft der Lösungen wird hierbei eine Strahlungsbedingung sein, welche eine gewisse Integrierbarkeit bei Unendlich erzwingt.

Die Existenz einer Lösung von (1.14) im Falle reeller Frequenzen folgt mit dem Prinzip der Grenzabsorption, welches zum ersten Mal von Eidus [2] benutzt wurde (siehe auch Leis ([6], Kapitel 4.6) und Wilcox [15]). Hierzu wird eine a-priori-Abschätzung für Δ von Bedeutung sein, welche von Vogelsang [10] und unter schärferen Voraussetzungen mittels eines einfacheren Beweises von Lander [5] bewiesen wurde. Hierbei konvergieren die eindeutig bestimmten Lösungen von (1.14) im Falle echt komplexer Frequenzen in geeigneten gewichteten Räumen gegen eine Lösung von (1.14) einer reellen Frequenz.

Im Verlauf dieser Arbeit sind $A_{\pm}$, soweit nicht anders definiert, stets reelle, symmetrische, C^1-beschränkte und gleichmäßig positiv definite $3 \times 3 - C^1-$ Matrizen. Diese Eigenschaft einer Matrix wird im folgenden als *Grundvoraussetzung* bezeichnet. Desweiteren wird in den Raumbezeichnungen nicht unterschieden, ob die Funktionen skalar- oder vektorwertig sind.

Für $x, y \in \mathbf{C}^N$ sei $xy := \sum_{n=1}^{N} x_n y_n$ und speziell im Falle $N = 3$ definiert $x \wedge y := \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$ das Wedgeprodukt.

Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ein Gebiet. Mit $C^k(\Omega)$ sei der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet, außerdem sei $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbf{N}} C^k(\Omega)$. $C_0^k(\Omega)$ deutet einen kompakten Träger in Ω an.

$L^2(\Omega)$ und $H^k(\Omega)$ bezeichnen die üblichen Räume der quadratintegrierbaren Funktionen und Sobolevräume mit schwachen Ableitungen bis zur Ordnung k. $H^k_{loc}(\Omega) := \left\{ u \text{ meßbar } : \bigwedge_{\Xi \subset\subset \Omega} u \in H^k(\Xi) \right\}$. Der Index *vox* bezeichnet einen kompakten Träger im $\mathbf{R}^N$.

$\overset{o}{H}{}^k(\Omega)$ sei der Abschluß von $C_o^\infty(\Omega)$ in $H^k(\Omega)$.

Mit den üblichen Skalarprodukten und der Multiindexschreibweise definieren sich mit $s \in \mathbf{R}$ die gewichteten Räume

$$
\begin{aligned}
L_s^2(\Omega) &:= \{u \in L^2_{loc}(\Omega) : (1+r)^s u \in L^2(\Omega)\} \\
H_s^0(\Omega) &:= L_s^2(\Omega) \\
H_s^k(\Omega) &:= \{u \in H^k_{loc}(\Omega) : \bigwedge_{|\beta| \le k} \partial^\beta u \in L_s^2(\Omega)\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} H^k_{>s}(\Omega) &:= \bigcup_{m>s} H^k_m(\Omega) \\ H^k_{<s}(\Omega) &:= \bigcap_{m<s} H^k_m(\Omega); \end{aligned}$$

hierbei sei $r := r(x) := |x|$.
Normen werden in folgender Weise abgekürzt:

$$\begin{aligned} ||u||^2_{0,s,\Omega} &:= \langle (1+r)^{2s} u, u\rangle_\Omega \\ ||u||^2_{k,s,\Omega} &:= \sum_{|\beta|\le k} ||\partial^\beta u||^2_{0,s,\Omega} \\ |||u|||^2_{k,s,\Omega} &:= \sum_{|\beta|\le k} ||(1+r)^{s+|\beta|}\partial^\beta u||^2_{0,0,\Omega} \end{aligned}$$

Wenn sich aus dem Text eindeutig $u = \binom{u_+}{u_-}$ ergibt, so gelte stets

$$||u||^2_{k,s,\Omega} := \sum_{n\in\{+,-\}} ||u_n||^2_{k,s,\Omega}.$$

Sei nun speziell $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Wenn man mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ das Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$ bezeichnet, sei

$$L^2_A(\Omega) := L^2(\Omega)\times L^2(\Omega) \quad \text{mit dem Skalarprodukt } \langle u,v\rangle_A := \sum_{n\in\{+,-\}} \langle A_n u_n, v_n\rangle_\Omega.$$

Nun werden noch einige Räume eingeführt, die speziell in der Maxwellschen Theorie auftreten.

$$\begin{aligned} R(\Omega) &:= \{u\in L^2(\Omega) : \text{rot } u \in L^2(\Omega)\} \\ D(\Omega) &:= \{u\in L^2(\Omega) : \text{div } u \in L^2(\Omega)\} \\ R_{loc}(\Omega) &:= \{u\in L^2_{loc}(\Omega) : \text{rot } u \in L^2_{loc}(\Omega)\} \\ D_{loc}(\Omega) &:= \{u\in L^2_{loc}(\Omega) : \text{div } u \in L^2_{loc}(\Omega)\} \\ \overset{o}{R}(\Omega) &:= \{u\in R(\Omega) : \bigwedge_{v\in R(\Omega)} \langle u, \text{rot } v\rangle_\Omega = \langle \text{rot } u, v\rangle_\Omega\} \\ \overset{o}{D}(\Omega) &:= \{u\in D(\Omega) : \bigwedge_{v\in H^1(\Omega)} \langle u, \nabla v\rangle_\Omega = -\langle \text{div } u, v\rangle_\Omega\} \\ \overset{o}{R}_{loc}(\Omega) &:= \{u\in R_{loc}(\Omega) : \bigwedge_{\varphi\in C^\infty_o(\mathbf{R}^3)} u\varphi \in \overset{o}{R}(\Omega)\} \\ \overset{o}{D}_{loc}(\Omega) &:= \{u\in D_{loc}(\Omega) : \bigwedge_{\varphi\in C^\infty_o(\mathbf{R}^3)} u\varphi \in \overset{o}{D}(\Omega)\} \end{aligned}$$

Für $C^1(\overline{\Omega})-$Funktionen bedeuten $\overset{o}{R}_{loc}(\Omega)$ bzw. $\overset{o}{D}_{loc}(\Omega)$, daß $\nu\wedge u$ bzw. νu auf $\partial\Omega$ verschwinden, wobei ν die Normale an $\partial\Omega$ bezeichnet. Tragen die Divergenzräume einen weiteren Index 0 (unten rechts), so soll dies verschwindende

Divergenz anzeigen.

Um eine selbstadjungierte Realisierung des Maxwell-Operators zu erhalten, werden außerdem nachfolgende Räume definiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\Omega) &:= \overset{o}{R}(\Omega) \times R(\Omega) \\
\mathcal{R}_{loc}(\Omega) &:= \overset{o}{R}_{loc}(\Omega) \times R_{loc}(\Omega) \\
\mathcal{D}_0(\Omega) &:= A_+^{-1} D_0(\Omega) \times A_-^{-1} \overset{o}{D}_0(\Omega) \\
\mathcal{D}_{0,loc}(\Omega) &:= A_+^{-1} D_{0,loc}(\Omega) \times A_-^{-1} \overset{o}{D}_{0,loc}(\Omega) \\
D(M) &:= \mathcal{R}(\Omega) \cap \mathcal{D}_0(\Omega) \\
D_{loc}(M) &:= \mathcal{R}_{loc}(\Omega) \cap \mathcal{D}_{0,loc}(\Omega)
\end{aligned}$$

Dann sind sowohl

$$\begin{array}{rcccc} M_1 & : & \mathcal{R}(\Omega) \subset L^2_A(\Omega) & \longrightarrow & L^2_A(\Omega) \\ & & a & \longmapsto & Ma \end{array}$$

als auch

$$\begin{array}{rcccc} M & : & D(M) \subset \mathcal{D}_0(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}_0(\Omega) \\ & & a & \longmapsto & Ma \end{array}$$

selbstadjungierte Operatoren (siehe Leis ([6], Kapitel 8)). M nennt man den reduzierten Maxwell-Operator.

Sofern nichts anderes ausdrücklich gesagt wird, sei in diesem Text $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ stets ein Außengebiet, d. h. das Komplement ist kompakt. $U(0,R)$, $K(0,R)$ und $S(0,R)$ bezeichnen die offene und abgeschlossene Kugel sowie Sphäre mit Radius R um 0.

$$\begin{aligned}
A(R) &:= \mathbf{R}^3 \backslash K(0,R) \\
\Omega(R) &:= \Omega \cap U(0,R) \\
\Omega_R &:= \Omega \backslash K(0,R) \\
\Omega_r^R &:= \Omega(R) \cap \Omega_r \qquad \text{, falls } r < R \\
S_\rho &:= S(0,\rho)
\end{aligned}$$

Im Verlauf dieser Arbeit werden an die Koeffizientenmatrizen $A_\pm$ zwei wesentliche Bedingungen gestellt:

1. Die Matrizen $A_\pm$ erfüllen die *Bedingung 1*, falls mit der Grundvoraussetzung zusätzlich $A_\pm = \gamma_\pm A + \alpha_\pm$ gilt, wobei $\gamma_\pm \in \mathbf{R}^+$, A eine konstante, reelle, symmetrische und positiv definite Matrix ist und $\alpha_\pm = o(r^{-1})$ für $r \to \infty$ erfüllt, sowie $\alpha_\pm \in C_b^2(\overline{\Omega})^2$ gilt.

[2] $C_b^k(\overline{\Omega})$ besteht aus denjenigen Funktionen in $C^k(\Omega)$, die mitsamt ihren Ableitungen bis zur Ordnung k bis hin zum Rand von Ω beschränkt sind.

2. Die Matrizen $A_\pm$ erfüllen die *Bedingung 2*, falls sie Bedingung 1 erfüllen und $\partial^\beta \alpha_\pm = O(r^{-1-\epsilon})$ für $r \to \infty$ mit einem $\epsilon > 0$ für alle $\beta \in \mathbf{N}_0^3$ mit $|\beta| \leq 2$ gilt.

In dieser Arbeit sei die Summationskonvention vorausgesetzt. Desweiteren sei noch die Größe $\mu := \omega\sqrt{\gamma_+\gamma_-}$ definiert, welche häufig im Text erscheinen wird. Mit $\partial_r = \frac{x_l}{r}\partial_l$ sei die Radialableitung bezeichnet.

Die Fouriertransformierte einer Funktion f wird entweder mit $\hat{f}$ oder $\mathcal{F}(f)$ bezeichnet.

Wenn von in diesem Text auftretenden Matrizen nicht ausdrücklich gesagt wird, daß sie konstant sind, so hängen sie von x ab.

Kapitel 2

Regularitätssätze und vorbereitende Lemmata

In diesem Kapitel werden lokale und globale Regularitätsaussagen mit den entsprechenden Abschätzungen bereitgestellt.

Satz 2.1 (Regularität in beschränkten Gebieten)
Seien $k \in \mathbf{N}$ und $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein Gebiet der Klasse C^{k+1} sowie $C \in C^{k+1}$ eine reelle, symmetrische, $C^{k+1}-$beschränkte und gleichmäßig positiv definite $3 \times 3-$Matrix. Gilt $a \in \overset{o}{R}_{loc}(\Omega)$ oder $a \in C^{-1} \overset{o}{D}_{loc}(\Omega)$ und für alle beschränkten Mengen $B \subset \mathbf{R}^3$, $\mathrm{rot}\, a, \mathrm{div}\, Ca \in H^k(B \cap \Omega)$, so folgt für alle beschränkten Mengen B, $a \in H^{k+1}(B \cap \Omega)$. Desweiteren existiert zu jedem Paar offener, beschränkter Mengen B, B' mit $\overline{B} \subset B'$ eine Konstante $c = c(B, B')$, so daß

$$||a||_{k+1,0,B\cap\Omega} \leq c\left(||a||_{0,0,B'\cap\Omega} + ||\mathrm{rot}\, a||_{k,0,B'\cap\Omega} + ||\mathrm{div}\, Ca||_{k,0,B'\cap\Omega}\right)$$

gilt.

Beweis
Siehe Weber [12]. **q.e.d.**

Lemma 2.1 *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ein Außengebiet. Dann gilt für $N \geq 3$*

$$\begin{aligned} \overline{\nabla H^1(\Omega)} &= \nabla X^1(\Omega) \\ \overline{\nabla \overset{o}{H}{}^1(\Omega)} &= \nabla X^1_0(\Omega). \end{aligned}$$

Hierbei seien

$$\begin{aligned} X^1(\Omega) &= \{u \in H^1_{loc}(\Omega) : \nabla u, (1+r)^{-1}u \in L^2(\Omega)\} \\ X^1_0(\Omega) &= \{u \in X^1(\Omega) : \bigwedge_{\varphi \in C^\infty_o(\mathbf{R}^N)} \varphi u \in \overset{o}{H}{}^1(\Omega)\} \end{aligned}$$

Beweis

$X^1_{(0)}(\Omega)$ stehe für $X^1(\Omega)$ oder $X^1_0(\Omega)$; analog erklärt sich $\overset{(o)}{H^1}(\Omega)$.
" $\supset$ " : Sei $u \in X^1_{(0)}(\Omega)$. Da $C^\infty_o(\Omega)$ bzw. $C^\infty_{vox}(\Omega)$ dicht in $X^1_{(0)}(\Omega)$ liegt, folgt die Existenz einer Folge $(\varphi_n) \subset C^\infty_o(\Omega)$ bzw. $C^\infty_{vox}(\Omega)$ mit $\varphi_n \to u$ in $X^1_{(0)}(\Omega)$. Demnach gilt $\nabla\varphi_n \to \nabla u$ in $L^2(\Omega)$, woraus sich direkt $\nabla u \in \overline{\nabla \overset{(o)}{H^1}(\Omega)}$ ergibt.
" $\subset$ " : Sei $g \in \overline{\nabla \overset{(o)}{H^1}(\Omega)}$.

$$B(u,v) \;:=\; \langle \nabla u, \nabla v\rangle_\Omega$$

ist aufgrund der Abschätzung $||\nabla u||_{0,0,\Omega} \geq c||u||_{0,-1,\Omega}$ (siehe Leis ([6], S.57)) eine stetige und koerzitive Sesquilinearform über $X^1_{(0)}(\Omega)$ und $\langle \nabla\cdot, g\rangle_\Omega$ ein stetiges Funktional auf $X^1_{(0)}(\Omega)$. Nach dem Satz von Lax-Milgram (siehe Leis ([6], S.9)) existiert genau ein $u \in X^1_{(0)}(\Omega)$, so daß für alle $v \in X^1_{(0)}(\Omega)$

$$\langle \nabla v, \nabla u\rangle_\Omega \;=\; \langle \nabla v, g\rangle_\Omega$$

gilt. Es folgt daher

$$\nabla u - g \in \nabla X^1_{(0)}(\Omega)^\perp = \overline{\nabla X^1_{(0)}(\Omega)}^\perp$$

Es gilt weiterhin

$$\begin{array}{rrcl} & \overset{(o)}{H^1}(\Omega) & \subset & X^1_{(0)}(\Omega) \\ \Rightarrow & \nabla \overset{(o)}{H^1}(\Omega) & \subset & \nabla X^1_{(0)}(\Omega) \\ \Rightarrow & \overline{\nabla \overset{(o)}{H^1}(\Omega)} & \subset & \overline{\nabla X^1_{(0)}(\Omega)} \\ \Rightarrow & \overline{\nabla \overset{(o)}{H^1}(\Omega)}^\perp & \supset & \overline{\nabla X^1_{(0)}(\Omega)}^\perp \end{array}$$

Also folgt $\nabla u - g \in \overline{\nabla \overset{(o)}{H^1}(\Omega)}^\perp$ und nach dem ersten Teil des Beweises $\nabla u \in \nabla X^1_{(0)}(\Omega) \subset \overline{\nabla \overset{(o)}{H^1}(\Omega)}$, also $\nabla u = g$. **q.e.d.**

Korollar 2.1 *Sei $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ein Außengebiet und C eine reelle, symmetrische, beschränkte und gleichmäßig positiv definite $3 \times 3-$Matrix. Dann gelten folgende Zerlegungen:*

$$\begin{array}{rcl} L^2(\Omega) & = & \nabla X^1(\Omega) \;\oplus\; C^{-1}\overset{o}{D}_0(\Omega) \\ L^2(\Omega) & = & \nabla X^1_0(\Omega) \;\oplus\; C^{-1}D_0(\Omega) \end{array}$$

Beweis
Es ist natürlich, wie man z. B. in Leis ([6], S.148) nachlesen kann,

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \overline{\overline{\nabla H^1(\Omega)}} \oplus C^{-1} \overset{o}{D}_0(\Omega) \\ L^2(\Omega) &= \nabla \overset{o}{H}{}^1(\Omega) \oplus C^{-1} D_0(\Omega), \end{aligned}$$

wodurch mit Lemma 2.1 die Behauptung folgt. **q.e.d.**

Satz 2.2 (Regularität im $\mathbf{R}^3$) *Die Matrix C erfülle die Grundvoraussetzung. Gilt desweiteren $a, \text{rot } a, \text{div } Ca \in L^2(\mathbf{R}^3)$, so folgt $a \in H^1(\mathbf{R}^3)$ und es existiert eine Konstante unabhängig von a mit*

$$||a||_{1,0,\mathbf{R}^3} \leq c\left(||a||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\text{rot } a||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\text{div } Ca||_{0,0,\mathbf{R}^3}\right).$$

Beweis
Durch Korollar 2.1 ergibt sich

$$a = \nabla u + g \tag{2.1}$$

mit $u \in X^1(\mathbf{R}^3)$ und $g \in D_0(\mathbf{R}^3)$.

$$\begin{aligned} \text{rot } g &= \text{rot } a && \in L^2(\mathbf{R}^3) \\ \text{div } g &= 0 && \\ \widehat{\text{rot } g}(\xi) &= -i\xi \wedge \hat{g}(\xi) && \in L^2(\mathbf{R}^3) \\ \widehat{\text{div } g}(\xi) &= i\xi\hat{g}(\xi) = 0 && \in L^2(\mathbf{R}^3). \end{aligned}$$

Aufgrund der Vektorgleichung

$$\hat{g}(\xi) = -\frac{\xi}{|\xi|^2} \wedge (\xi \wedge \hat{g}(\xi)) + \frac{\xi}{|\xi|^2}(\xi\hat{g}(\xi)) \tag{2.2}$$

ergibt sich $\xi_l\hat{g}(\xi) \in L^2(\mathbf{R}^3)$ für $l \in \{1,2,3\}$ und somit $g \in H^1(\mathbf{R}^3)$.
Dadurch erfüllt u

$$\text{div } (C\nabla u) = \text{div } Ca - \text{div } Cg \quad \in L^2(\mathbf{R}^3).$$

Mit

$$\begin{aligned} \tau_{hi} u &:= u(\cdot + he^i) \\ \delta_{hi} u &:= \frac{\tau_{hi} u - u}{h}, \end{aligned}$$

wobei e^i einen kanonischen Basisvektor bezeichnet, folgt nun nach einer üblichen Beweistechnik bei elliptischer Regularität, welche z. B. in Agmon ([1], Kapitel 6 und 9) nachzulesen ist, für alle $\varphi \in C_o^\infty(\mathbf{R}^3)$

$$\begin{aligned} \langle C\nabla(\delta_{hi}u), \nabla\varphi\rangle_{\mathbf{R}^3} &= -\langle \nabla u, \delta_{-hi}(C\nabla\varphi)\rangle_{\mathbf{R}^3} \\ &= -\langle \nabla u, C\nabla(\delta_{-hi}\varphi) + (\delta_{-hi}C)(\tau_{-hi}\nabla\varphi)\rangle_{\mathbf{R}^3} \\ &= \langle \text{div } (C\nabla u), \delta_{-hi}\varphi\rangle_{\mathbf{R}^3} - \langle \nabla u, (\delta_{-hi}C)(\tau_{-hi}\nabla\varphi)\rangle_{\mathbf{R}^3}. \end{aligned}$$

Man erhält

$$|\langle C\nabla(\delta_{hi}u), \nabla\varphi\rangle_{\mathbf{R}^3}| \quad \leq \quad c\,(||\mathrm{div}\ (C\nabla u)||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\nabla u||_{0,0,\mathbf{R}^3})\,||\nabla\varphi||_{0,0,\mathbf{R}^3}.$$

Wählt man sodann aufgrund der Dichtheit von $C_o^\infty(\mathbf{R}^3)$ in $X^1(\mathbf{R}^3)$ eine Folge $(\varphi_n) \subset C_o^\infty(\mathbf{R}^3)$ mit $\varphi_n \to u$ in $X^1(\mathbf{R}^3)$, woraus dann auch $\delta_{hi}\varphi_n \to \delta_{hi}u$ in $X^1(\mathbf{R}^3)$ folgt, so ergibt sich

$$|\langle C\nabla(\delta_{hi}u), \nabla(\delta_{hi}u)\rangle_{\mathbf{R}^3}| \quad \leq \quad c\,(||\mathrm{div}\ (C\nabla u)||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\nabla u||_{0,0,\mathbf{R}^3})\,||\nabla(\delta_{hi}u)||_{0,0,\mathbf{R}^3}.$$

Da C gleichmäßig positiv definit ist, hat man nun die Ungleichung

$$||\nabla(\delta_{hi}u)||_{0,0,\mathbf{R}^3} \quad \leq \quad c\,(||\mathrm{div}\ (C\nabla u)||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\nabla u||_{0,0,\mathbf{R}^3})\,,$$

welche sofort $\nabla u \in H^1(\mathbf{R}^3)$ und

$$||\nabla u||_{1,0,\mathbf{R}^3} \ \leq \ c\,(||\mathrm{div}\ (C\nabla u)||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\nabla u||_{0,0,\mathbf{R}^3})$$

liefert. Schließlich gilt $a = \nabla u + g \in H^1(\mathbf{R}^3)$ und

$$\begin{aligned}
|g|_{1,\mathbf{R}^3} &\leq c||\mathrm{rot}\ g||_{0,0,\mathbf{R}^3} = c||\mathrm{rot}\ a||_{0,0,\mathbf{R}^3} \qquad \text{(Fouriertransformation)}\\
|\nabla u|_{1,\mathbf{R}^3} &\leq c\,(||\mathrm{div}\ Ca||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{div}\ Cg||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\nabla u||_{0,0,\mathbf{R}^3})\\
&\leq c\,(||\mathrm{div}\ Ca||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||g||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\nabla u||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{rot}\ a||_{0,0,\mathbf{R}^3})\\
&\leq c\,(||\mathrm{div}\ Ca||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||a||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{rot}\ a||_{0,0,\mathbf{R}^3})\,,
\end{aligned}$$

wobei $|\cdot|_{1,\Omega}^2 \ := \ \sum_{|\beta|=1} ||\partial^\beta \cdot ||_{0,0,\Omega}^2$ bedeutet. In der letzten Ungleichung wird wesentlich die Orthogonalität der Zerlegung (2.1) benutzt. Insgesamt folgt also

$$||a||_{1,0,\mathbf{R}^3} \quad \leq \quad c\,(||a||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{rot}\ a||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{div}\ Ca||_{0,0,\mathbf{R}^3})\,.$$

q.e.d.

Lemma 2.2 *Für jede nichtnegative Funktion $\varphi \in L^1((T,\infty))$ mit $T > 0$ und $\mu \leq 1$ gilt*

$$\liminf_{R\to\infty} R^\mu \varphi(R) = 0.$$

Beweis
Die gegenteilige Annahme liefert $R^{-\mu} \in L^1((T,\infty))$, was ein Widerspruch ist.
q.e.d.

Korollar 2.2 *Seien C eine Matrix, die die Grundvoraussetzung erfüllt, und $u \in X^1(\mathbf{R}^3)$ mit* div $(C\nabla u) = 0$. *Dann folgt $u = 0$.*

Beweis
Im Beweis von Satz 2.2 sieht man $u \in H^2_{loc}(\mathbf{R}^3)$ und somit

$$\begin{aligned} 0 &= -\langle \mathrm{div}\,(C\nabla u), u\rangle_{K(0,R)} \\ &= \langle C\nabla u, \nabla u\rangle_{K(0,R)} - \int_{S(0,R)} \frac{x}{R} C\nabla u \overline{u}\, do_x. \end{aligned}$$

Es folgt nach Lemma 2.2, da $u \in X^1(\mathbf{R}^3)$ gilt, daß der Limes inferior des Oberflächenintegrals für $R \to \infty$ verschwindet. Dadurch erhält man

$$\langle C\nabla u, \nabla u\rangle_{\mathbf{R}^3} = \liminf_{R\to\infty} \langle C\nabla u, \nabla u\rangle_{K(0,R)} = 0.$$

Demnach verschwindet ∇u im ganzen $\mathbf{R}^3$. Da $u \in X^1(\mathbf{R}^3)$ und
$(1+r)^{-1} \notin L^2(\mathbf{R}^3)$, folgt $u = 0$. **q.e.d.**

Korollar 2.3 *Die Matrix C erfülle die Grundvoraussetzung. Dann muß jedes $a \in R(\mathbf{R}^3) \cap C^{-1}D(\mathbf{R}^3)$ mit* rot $a = 0$ *und* div $Ca = 0$ *verschwinden.*

Beweis
Nach Korollar 2.1 ergibt sich

$$a = \nabla u + g \tag{2.3}$$

mit $u \in X^1(\mathbf{R}^3)$ und $g \in D_0(\mathbf{R}^3)$. Da rot $g =$ rot $a = 0$ und div $g = 0$ gelten, erhält man durch (2.2) $\hat{g} = 0 = g$, also $a = \nabla u$ und div $(C\nabla u) = 0$. Korollar 2.2 liefert $u = 0 = a$. **q.e.d.**

Hieraus folgt

Bemerkung 2.1 *Erfüllen die Matrizen $A_\pm$ die Grundvoraussetzung, so besitzt der reduzierte Maxwell-Operator M im Ganzraumfall einen trivialen Kern.*

Korollar 2.4 (Regularität in Außengebieten) *Seien Ω_i zwei Gebiete im $\mathbf{R}^3$ mit $\Omega_1 \subset \Omega_2$ und* dist $(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2) > 0$ *sowie C eine Matrix, die die Grundvoraussetzung erfüllt. Desweiteren sei $a \in R(\Omega_2) \cap C^{-1}D(\Omega_2)$. Dann folgt $a \in H^1(\Omega_1)$ und es existiert eine positive Konstante, so daß*

$$||a||_{1,0,\Omega_1} \leq c\left(||a||_{0,0,\Omega_2} + ||\mathrm{rot}\ a||_{0,0,\Omega_2} + ||\mathrm{div}\ Ca||_{0,0,\Omega_2}\right).$$

Beweis
Aufgrund von dist $(\mathrm{supp}\varphi, \partial\Omega_2) > 0$ existiert ein $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ mit $\varphi|_{\Omega_1} = 1$ und $\mathrm{supp}\varphi \subset \Omega_2$, so daß $|\nabla\varphi|$ beschränkt ist. Mit $a\varphi \in L^2(\mathbf{R}^3)$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\ (a\varphi) &= \varphi \mathrm{rot}\ a + \nabla\varphi \wedge a &\in L^2(\mathbf{R}^3) \\ \mathrm{div}\ (Ca\varphi) &= \varphi \mathrm{div}\ Ca + \nabla\varphi Ca &\in L^2(\mathbf{R}^3), \end{aligned}$$

folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Nun werden die gleichen Ungleichungen wie in Satz 2.2 und Korollar 2.4 in gewichteten Sobolevräumen bewiesen.

Korollar 2.5 *Seien $s \in \mathbf{R}$, C eine die Grundvoraussetzung erfüllende Matrix und $a, \mathrm{rot}\ a, \mathrm{div}\ Ca \in L_s^2(\mathbf{R}^3)$. Dann gilt $a \in H_s^1(\mathbf{R}^3)$ und*

$$||a||_{1,s,\mathbf{R}^3} \leq c\,(||a||_{0,s,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{rot}\ a||_{0,s,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{div}\ Ca||_{0,s,\mathbf{R}^3})\,.$$

Korollar 2.6 *Seien Ω_i zwei Gebiete im $\mathbf{R}^3$ mit $\Omega_1 \subset \Omega_2$ und $\mathrm{dist}\ (\partial\Omega_1, \partial\Omega_2) > 0$ sowie C eine Matrix, die die Grundvoraussetzung erfüllt. Desweiteren seien $a, \mathrm{rot}\ a, \mathrm{div}\ Ca \in L_s^2(\Omega_2)$ mit einem $s \in \mathbf{R}$. Dann folgt $a \in H_s^1(\Omega_1)$ und es existiert eine positive Konstante, so daß*

$$||a||_{1,s,\Omega_1} \leq c\,(||a||_{0,s,\Omega_2} + ||\mathrm{rot}\ a||_{0,s,\Omega_2} + ||\mathrm{div}\ Ca||_{0,s,\Omega_2})\,.$$

Beweise Korollar 2.5 und 2.6:
Mit $r^s a \in L^2(\Omega_2 \cap A(1))$ und

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\ (r^s a) &= r^s \mathrm{rot}\ a + s r^{-1} \tfrac{x}{r} \wedge r^s a \quad \in L^2(\Omega_2 \cap A(1))\,,\\ \mathrm{div}\ (C r^s a) &= r^s \mathrm{div}\ Ca + s r^{-1} \tfrac{x}{r} C r^s a \quad \in L^2(\Omega_2 \cap A(1))\,,\end{aligned}$$

folgen die Behauptungen aus Satz 2.2 und Korollar 2.4. **q.e.d.**

Bemerkung 2.2 *Bei glatten Rändern und unter Hinzunahme der Randbedingungen, folgt aufgrund von Satz 2.1 die Regularität in den Korollaren 2.4 und 2.6 bis zum Rand.*

Lemma 2.3 *Seien $G \subset \mathbf{R}^3$ ein Gebiet und C eine konstante, reelle, symmetrische und reguläre Matrix. Dann gelten für beliebige matrixwertige Funktionen B und*
$a \in R_{loc}(G) \cap B^{-1} D_{loc}(G)$ die Gleichungen

$$\mathrm{rot}\ (C(a \circ C)) = \det(C) C^{-1} (\mathrm{rot}\ a) \circ C \tag{2.4}$$
$$\mathrm{div}\ (C^{-1}(B \circ C) C^{-1} C (a \circ C)) = [\mathrm{div}\ (Ba)] \circ C. \tag{2.5}$$

Beweis
Da die Behauptungen lokale Eigenschaften sind, kann man sich mit einem Dichtheitsargument auf den Fall $a \in C_o^\infty(\mathbf{R}^3)$ zurückziehen. Seien $u, v, w \in \mathbf{R}^3$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}(u \wedge v) w &= \det(u, v, w)\\ &= \det(C^{-1}) \det(Cu, Cv, Cw)\\ &= \det(C^{-1})(Cu \wedge Cv) Cw,\end{aligned}$$

d. h.

$$u \wedge v = \det(C^{-1}) C (Cu \wedge Cv)$$

oder auch

$$C^{-1}((C^{-1}u) \wedge v) = \det(C^{-1})(u \wedge Cv). \tag{2.6}$$

Mittels der Fouriertransformation erhält man sodann mit $\mathrm{X}(x) := x$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\mathrm{rot}\ (C(a \circ C))\right) &= i\mathrm{X} \wedge C\mathcal{F}\left(a \circ C\right)\\ &= i \det(C^{-1})\mathrm{X} \wedge C(\mathcal{F}\left(a\right) \circ C^{-1})\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\det(C)C^{-1}(\mathrm{rot}\ a) \circ C\right) &= \det(C)C^{-1}\mathcal{F}\left((\mathrm{rot}\ a) \circ C\right)\\ &= \det(C)C^{-1}\det(C^{-1})\mathcal{F}\left(\mathrm{rot}\ a\right) \circ C^{-1}\\ &= iC^{-1}\left((C^{-1}\mathrm{X}) \wedge (\mathcal{F}\left(a\right) \circ C^{-1})\right)\\ &= i \det(C^{-1})\mathrm{X} \wedge C(\mathcal{F}\left(a\right) \circ C^{-1}).\end{aligned}$$

Die letzte Zeile folgt aus (2.6). Die Fourierrücktransformation liefert (2.4). Analog zeigt man (2.5), denn es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\mathrm{div}\ (Ba) \circ C\right) &= \det(C^{-1})\mathcal{F}\left(\mathrm{div}\ (Ba)\right) \circ C^{-1}\\ &= i \det(C^{-1})(C^{-1}\mathrm{X})\left(\mathcal{F}\left(Ba\right) \circ C^{-1}\right)\end{aligned}$$

und außerdem

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\mathrm{div}\ \left(C^{-1}(B \circ C)a \circ C\right)\right) &= i\mathrm{X}C^{-1}\left(\mathcal{F}\left((B \circ C)a \circ C\right)\right)\\ &= i \det(C^{-1})\mathrm{X}C^{-1}\left(\mathcal{F}\left(Ba\right) \circ C^{-1}\right)\\ &= i \det(C^{-1})(C^{-1}\mathrm{X})\left(\mathcal{F}\left(Ba\right) \circ C^{-1}\right).\end{aligned}$$

Mittels der Fourierrücktransformation folgt (2.5). **q.e.d.**

Lemma 2.4 (Transformation der Koeffizientenmatrizen) *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein Gebiet. Die Matrizen $A_\pm$ erfüllen die Bedingung 1 und es gelte*

$$\begin{aligned}(M_A - \omega)a &= f\\ \mathrm{div}\ (A_\pm a_\pm) &= g_\pm\end{aligned}$$

mit einem $a \in R_{loc}\left(\Omega\right)^2 \cap \left[A_+^{-1}D_{loc}\left(\Omega\right) \times A_-^{-1}D_{loc}\left(\Omega\right)\right]$. Dann gilt mit den Definitionen $W := A^{\frac{1}{2}}$ und $\widetilde{\Omega} := W^{-1}\Omega$, sowie den Transformationen

$$\tilde{a}_\pm := W(a_\pm \circ W) \tag{2.7}$$

$$\tilde{f}_\pm := W(f_\pm \circ W) \tag{2.8}$$

$$\tilde{g}_\pm := W(g_\pm \circ W) \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\pm &:= \det(W)W^{-1}(A_\pm \circ W)W^{-1} \\ &= \gamma_\pm \det(W) + \det(W)W^{-1}(\alpha_\pm \circ W)W^{-1}\\ &=: \gamma_\pm \det(W) + \tilde{\alpha}_\pm\end{aligned} \tag{2.10}$$

die Inklusion

$$\tilde{a} \in R_{loc}\left(\tilde{\Omega}\right)^2 \cap \left[\tilde{A}_+^{-1} D_{loc}\left(\tilde{\Omega}\right) \times \tilde{A}_-^{-1} D_{loc}\left(\tilde{\Omega}\right)\right] \quad \textit{und}$$

$$\begin{aligned} (M_{\tilde{A}} - \omega)\tilde{a} &= \tilde{f} \\ \operatorname{div}\,(\tilde{A}_\pm \tilde{a}_\pm) &= \det(W) W^{-1} \tilde{g}_\pm . \end{aligned}$$

$\tilde{A}_\pm$ erfüllen also die Bedingung 1 mit $A = id$.
Desweiteren transformieren sich auch die Randbedingungen, denn mit $\tilde{b} := W(b \circ W)$ und für beliebige Matrizen B mit $\tilde{B} := \det(W)W^{-1}(B \circ W)W^{-1}$ gilt:

$$b \in \overset{o}{R}(\Omega) \;\Rightarrow\; \tilde{b} \in \overset{o}{R}\left(\tilde{\Omega}\right) \tag{2.11}$$

$$b \in B^{-1}\,\overset{o}{D}(\Omega) \;\Rightarrow\; \tilde{b} \in \tilde{B}^{-1}\,\overset{o}{D}\left(\tilde{\Omega}\right) \tag{2.12}$$

Beweis
Da

$$\begin{aligned} (M_A - \omega)a = f &\iff \mp i A_\pm^{-1} \operatorname{rot}\, a_\mp = \omega a_\pm + f_\pm \\ &\iff \operatorname{rot}\, a_\mp = \pm i\omega A_\pm a_\pm \pm i A_\pm f_\pm \end{aligned}$$

gilt, berechnet man mittels (2.4)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\, \tilde{a}_\mp &= \operatorname{rot}\,(W(a_\mp \circ W)) \\ &= \det(W)W^{-1}(\operatorname{rot}\, a_\mp) \circ W \\ &= \det(W)W^{-1}(\pm i\omega\gamma_\pm A a_\pm) \circ W \\ &\quad + \det(W)W^{-1}(\pm i\omega\alpha_\pm a_\pm) \circ W \\ &\quad + \det(W)W^{-1}(\pm i A_\pm f_\pm) \circ W \\ &= \pm i\omega\gamma_\pm \det(W)\tilde{a}_\pm \\ &\quad \pm i\omega \det(W)W^{-1}(\alpha_\pm \circ W)W^{-1}\tilde{a}_\pm \\ &\quad \pm i \det(W)W^{-1}(A_\pm \circ W)W^{-1}\tilde{f}_\pm \\ &= \pm i\omega\tilde{A}_\pm\tilde{a}_\pm \pm i\tilde{A}_\pm\tilde{f}_\pm . \end{aligned}$$

Demnach erfüllt $\tilde{a}$

$$(M_{\tilde{A}} - \omega)\tilde{a} = \tilde{f}.$$

und es folgt durch (2.5)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\,(\tilde{A}_\pm\tilde{a}_\pm) &= \det(W)\operatorname{div}\left[W^{-1}((\gamma_\pm A + \alpha_\pm) \circ W)W^{-1}W(a_\pm \circ W)\right] \\ &= \det(W)\,\underbrace{\operatorname{div}\,(A_\pm a_\pm)}_{=g_\pm} \circ W \qquad (2.13) \\ &= \det(W)W^{-1}\tilde{g}_\pm . \end{aligned}$$

Nun zur Transformation der Randbedingungen. Sei $b \in \overset{o}{R}(\Omega)$ und $\Phi \in R\left(\tilde{\Omega}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{b} \text{ rot } \Phi \, dx &= \int_{\tilde{\Omega}} W(b \circ W) \text{rot } \Phi \, dx \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} (b \circ W) W \text{rot } \Phi \, dx \\
&= \det(W^{-1}) \int_{\Omega} bW(\text{rot } \Phi) \circ W^{-1} \, dx \\
&= \int_{\Omega} b \text{ rot } (\underbrace{W^{-1}(\Phi \circ W^{-1})}_{\in R(\Omega)}) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \text{rot } b \, (W^{-1}(\Phi \circ W^{-1})) \, dx \qquad (2.14) \\
&= \det(W) \int_{\tilde{\Omega}} W^{-1}(\text{rot } b \circ W) \Phi \, dx \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \text{rot } \tilde{b} \, \Phi \, dx
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde mehrmals Gleichung (2.4) und in Zeile (2.14) $b \in \overset{o}{R}(\Omega)$ benutzt. Also folgt $\tilde{b} \in \overset{o}{R}\left(\tilde{\Omega}\right)$. Analog folgert man (2.12). Denn sei $\varphi \in H^1\left(\tilde{\Omega}\right)$ und $b \in B^{-1} \overset{o}{D}(\Omega)$; dann gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{B}\tilde{b} \, \nabla\varphi \, dx &= \int_{\tilde{\Omega}} \det(W) W^{-1}(B \circ W) \, b \circ W \nabla\varphi \, dx \\
&= \int_{\Omega} W^{-1} Bb \, \nabla\varphi \circ W^{-1} \, dx \\
&= \int_{\Omega} W^{-1} Bb \, W \nabla(\varphi \circ W^{-1}) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \underbrace{Bb}_{\in \overset{o}{D}(\Omega)} \, \nabla(\underbrace{\varphi \circ W^{-1}}_{\in H^1(\Omega)}) \, dx \\
&= -\int_{\Omega} \text{div } (Bb) \, \varphi \circ W^{-1} \, dx \\
&= -\int_{\tilde{\Omega}} \det(W) \text{div } (Bb) \circ W \varphi \, dx \\
&= -\int_{\tilde{\Omega}} \text{div } (\tilde{B}\tilde{b}) \, \varphi \, dx,
\end{aligned}
$$

wobei die letzte Zeile aus (2.5) folgt. Ergo $\tilde{b} \in \tilde{B}^{-1} \overset{o}{D}\left(\tilde{\Omega}\right)$. **q.e.d.**

Bemerkung 2.3 *Die inverse Transformation in Lemma 2.4 ist*

$$a_{\pm} := W^{-1}(\tilde{a}_{\pm} \circ W^{-1}).$$

Die Transformation (2.7) bildet Außengebiete auf Außengebiete ab und ändert nichts an den Differenzierbarkeits- und Integrierbarkeitseigenschaften von a in gewichteten Sobolevräumen. Desweiteren lassen sich die Normen gegenseitig durch Konstanten, die nur von A abhängen, abschätzen.

Satz 2.3 *Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein Außengebiet und $A_\pm$ Matrizen, die die Bedingung 1 erfüllen. Desweiteren seien $\omega \in \mathbf{C}$ und $s \in \mathbf{R}$.*
$a \in R_{loc}(\Omega)^2 \cap \left[A_+^{-1}D_{0,loc}(\Omega) \times A_-^{-1}D_{0,loc}(\Omega)\right] \cap L_s^2(\Omega)^2$ erfülle $(M-\omega)a = f$ mit einem $f \in H_s^1(\Omega)^2$. Dann gilt $a \in H_s^2(\Xi)^2$ für alle Ξ mit $\overline{\Xi} \subset \Omega$ und es existiert ein $R > 0$, so daß

$$||a||_{2,s,\Xi} \;\leq\; c(||a||_{0,s,\Omega} + ||f||_{1,s,\Omega}).$$

Beweis
Aufgrund von Lemma 2.4 und Bemerkung 2.3 kann O.B.d.A. $A = id$ angenommen werden. Nach Korollar 2.6 gilt $a \in H_s^1(\Xi)^2$ für alle Ξ mit $\overline{\Xi} \subset \Omega$ und

$$||a||_{1,s,\Xi} \;\leq\; c(||a||_{0,s,\Omega} + ||f||_{0,s,\Omega}). \tag{2.15}$$

Nach Satz 2.1 und einer Abschneidetechnik gilt sogar $a \in H_{loc}^2(\Omega)^2$. Aus

$$\begin{aligned}
\text{rot } a_\mp &= \pm i\omega A_\pm a_\pm \pm iA_\pm f_\pm \\
&= \pm i\omega\gamma_\pm a_\pm \pm i\omega\alpha_\pm a_\pm \pm iA_\pm f_\pm \\
\text{div } a_\pm &= -\gamma_\pm^{-1}\text{div } (\alpha_\pm a_\pm)
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
-\Delta a_\mp &= \text{rot rot } a_\mp - \nabla\text{div } a_\mp \\
&= \pm i\omega\gamma_\pm\text{rot } a_\pm \pm i\omega\text{rot } (\alpha_\pm a_\pm) \pm i\text{rot } (A_\pm f_\pm) - \nabla\text{div } a_\mp \\
&= \omega^2\gamma_+\gamma_- a_\mp + \omega^2\gamma_\pm\alpha_\mp a_\mp \pm i\omega\text{rot } (\alpha_\pm a_\pm) \\
&\quad +\omega\gamma_\pm A_\mp f_\mp \pm i\text{rot } (A_\pm f_\pm) \\
&\quad +\gamma_\mp^{-1}\nabla\text{div } (\alpha_\mp a_\mp).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Da sich zweite Ableitungen immer durch Δ und erste Ableitungen abschätzen lassen und $\alpha_\pm = o(r^{-1})$ gilt, folgt für alle hinreichend große R und $|\beta| = 2$ mittels einer üblichen Abschneidetechnik (man schneidet zunächst zum Rand von Ω und nach Außen ab) sowie der Differentialgleichung (2.16)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_R} r^{2s}|\partial^\beta a_\pm|^2 dx \;&\leq\; c\int_{\Omega_{R-1}} r^{2s} \sum_{n\in\{+,-\}} \left(\sum_{l=1}^3 |\partial_l a_n|^2 + |a_n|^2\right) dx \\
&\quad + c\int_{\Omega_{R-1}} r^{2s} \sum_{n\in\{+,-\}} \left(\sum_{l=1}^3 |\partial_l f_n|^2 + |f_n|^2\right) dx.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Hierbei ist zu beachten, daß im Falle, wenn alle Ableitungen von $\nabla\text{div } (\alpha_\mp a_\mp)$ auf $a_\mp$ fallen, keine Ableitungen auf $\alpha_\mp$ stehen, und somit dieser Term durch die Eigenschaften der $\alpha_\mp$ klein wird. Dadurch kann er dann auf die linke Seite der Ungleichung geschaufelt werden.

Ergo

$$\begin{aligned} ||a||_{2,s,\Omega_R} &\leq c\left(||a||_{1,s,\Omega_{R-1}} + ||f||_{1,s,\Omega_{R-1}}\right) \\ &\leq c\left(||a||_{0,s,\Omega} + ||f||_{1,s,\Omega}\right), \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus (2.15) folgt, und $a \in H_s^2(\Xi)^2$ für alle Ξ mit $\overline{\Xi} \subset \Omega$. Satz 2.1 liefert die gewünschte Abschätzung. **q.e.d.**

Korollar 2.7 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.3 erfüllt. Zusätzlich sei Ω ein C^2−Gebiet und $a \in D_{loc}(M)$, d. h. a erfülle die Randbedingungen. Dann folgt $a \in H_s^2(\Omega)^2$ und*

$$||a||_{2,s,\Omega} \leq c(||a||_{0,s,\Omega} + ||f||_{1,s,\Omega}).$$

Beweis
Aus Satz 2.1 folgt $a \in H^1(\Omega(R))^2$ und

$$||a||_{1,0,\Omega(R)} \leq c(||a||_{0,0,\Omega(R+\frac{1}{2})} + ||f||_{0,0,\Omega(R+\frac{1}{2})}).$$

Nochmalige Anwendung von Satz 2.1 liefert $a \in H^2(\Omega(R))^2$ und

$$\begin{aligned} ||a||_{2,0,\Omega(R)} &\leq c(||a||_{0,0,\Omega(R+1)} + ||f||_{1,0,\Omega(R+1)}) \\ &\leq c(||a||_{0,s,\Omega} + ||f||_{1,s,\Omega}). \end{aligned}$$

Kombiniert man dieses Ergebnis mit Satz 2.3, so ergibt sich $a \in H_s^2(\Omega)^2$ und

$$\begin{aligned} ||a||_{2,s,\Omega}^2 &= ||a||_{2,s,\Omega(R)}^2 + ||a||_{2,s,\Omega_R}^2 \\ &\leq c(||a||_{2,0,\Omega(R)}^2 + ||a||_{2,s,\Omega_R}^2) \\ &\leq c(||a||_{0,s,\Omega}^2 + ||f||_{1,s,\Omega}^2). \end{aligned}$$

q.e.d.

Kapitel 3

Das polynomiale und exponentielle Abklingen der Eigenlösungen

Im wesentlichen besteht dieses Kapitel aus einer Verallgemeinerung einer Arbeit von Eidus [3].

Eidus beweist in [3] das polynomiale und exponentielle Abklingen der Eigenlösungen von (1.14) im Falle div $(A_\pm a_\pm) = 0$. Diese Ergebnisse werden hier in dem Sinne verallgemeinert, daß die Forderung an die Lösung, in einem größeren, d. h. schwächer gewichteten, Raum als $L^2(\Omega)$ zu liegen, bereits ausreichend ist. Desweiteren wird die Matrizenklasse der $A_\pm$ vergrößert. Außerdem werden bei dem polynomialen Abklingen rechte Seiten zugelassen. In den nachfolgenden Beweisen sei $\delta \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}_0^+)$ eine Funktion mit $\delta(\rho) \to 0$, falls $\rho \to \infty$.

Lemma 3.1 *Seien $m \in \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein Außengebiet und $A_\pm$ Matrizen , die die Bedingung 1 mit $A = id$ erfüllen.*
Desweitern löse $a \in R_{loc}(\Omega)^2 \cap \left[A_+^{-1} D_{0,loc}(\Omega) \times A_-^{-1} D_{0,loc}(\Omega)\right] \cap H_m^0(\Omega)^2$ die Gleichung $(M - \omega)a = f$ mit einem $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ und $f \in H_m^1(\Omega)^2$. Dann gilt $a \in H_m^2(\Xi)^2$ für alle Ξ mit $\overline{\Xi} \subset \Omega$ und mit den Definitionen

$$b_\pm := r^m a_\pm \tag{3.1}$$

$$B := \sum_{n \in \{+,-\}} \left(|b_n|^2 + \sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_n|^2 \right) \tag{3.2}$$

$$F := \sum_{n \in \{+,-\}} \left(|f_n| + \sum_{l=1}^{3} |\partial_l f_n| \right) \tag{3.3}$$

gelten folgende Gleichungen und Ungleichungen für hinreichend große ρ:

$$
\begin{array}{rrcl}
i) & \text{div } b_\pm & = & -\gamma_\pm^{-1}\left(\text{div } (\alpha_\pm b_\pm) - \frac{mx}{r^2} A_\pm b_\pm\right) \\
ii) & \Delta b_\pm + \left(\mu^2 + \frac{m(m-1)}{r^2}\right) b_\pm - 2\frac{m}{r}\partial_r b_\pm & = & -\omega^2 \gamma_\mp \alpha_\pm b_\pm \\
 & & & -\gamma_\pm^{-1}\nabla\left(\text{div } (\alpha_\pm b_\pm) - \frac{mx}{r^2}\alpha_\pm b_\pm\right) \\
 & & & \pm i\omega\left[\text{rot } (\alpha_\mp b_\mp) - \frac{mx}{r^2} \wedge \alpha_\mp b_\mp\right] \\
 & & & +\frac{mx}{r^2}\gamma_\pm^{-1}\left(\text{div } (\alpha_\pm b_\pm) - \frac{mx}{r^2}\alpha_\pm b_\pm\right) \\
 & & & -\omega\gamma_\mp r^m A_\pm f_\pm \pm i r^m \text{rot } (A_\mp f_\mp) \\
 & & =: & R_\pm \\
iii) & \sum_{|\beta|=2}\int_{\Omega_\rho} |\partial^\beta b_\pm|^2 \, dx & \leq & c\left(\int_{\Omega_{\rho-1}} B \, dx + ||f||^2_{1,m,\Omega_{\rho-1}}\right) \\
iv) & |\text{Re } \langle R_\pm, b_\pm\rangle_{\Omega_\rho}| & \leq & c\int_{S_\rho} B \, do_x + \delta(\rho)\int_{\Omega_{\rho-1}} B \, dx \\
 & & & +c\int_{\Omega_\rho} F r^m |b_\pm| \, dx + c||f||^2_{1,m,\Omega_{\rho-1}} \\
v) & \liminf_{t\to\infty} |\text{Re } \langle R_\pm, r\partial_r b_\pm\rangle_{\Omega_\rho^t}| & \leq & c\int_{S_\rho} B \, do_x + \delta(\rho)\int_{\Omega_{\rho-1}} B \, dx \\
 & & & +c\int_{S_\rho} r|\text{div } (\alpha_\pm b_\pm)|^2 \, do_x \\
 & & & +c\text{Re } \int_{S_\rho} \text{div } (\alpha_\pm b_\pm)\frac{x_n}{r} x_l \partial_l \overline{b}_\pm^n \, do_x \\
 & & & +c\int_{\Omega_\rho} F r^{m+1} \sum_{l=1}^3 |\partial_l b_\pm| \, dx \\
 & & & +c||f||^2_{1,m,\Omega_{\rho-1}} \\
vi) & \liminf_{t\to\infty} |\text{Re } \langle R_\pm, r b_\pm\rangle_{\Omega_\rho^t}| & \leq & c\rho\int_{S_\rho} B \, do_x + c\int_{\Omega_{\rho-1}} B \, dx \\
 & & & +c\int_{\Omega_\rho} F r^{m+1}|b_\pm| \, dx \\
 & & & +c||f||^2_{1,m,\Omega_{\rho-1}}
\end{array}
$$

Beweis
Aus Satz 2.3 folgt sofort $a \in H^2_m(\Xi)$ für alle Ξ mit $\overline{\Xi} \subset \Omega$. i) und ii) folgen aus elementaren Rechnungen. iii) ergibt sich analog zu (2.17) aus der Differentialgleichung ii) mittels einer Abschneidetechnik und der Abklingeigenschaften der $\alpha_\pm$. iv) und vi) erhält man durch einfache partielle Integration und Benutzung des Abklingverhaltens von $\alpha_\pm$, indem man alle Ableitungen von $\alpha_\pm$ entfernt, wobei man in vi) zuerst über Ω_ρ^t integriert, um die Existenz der Integrale zu zeigen. v) folgt analog zu iv) und vi), wobei allerdings ein etwas schwierigerer Term auftritt, nämlich

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\langle \nabla \mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm), x_l\partial_l b_\pm\rangle_{\Omega_\rho^t} &= -\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm), \mathrm{div}\, b_\pm\rangle_{\Omega_\rho^t} \\
&\quad -\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm), x_l\partial_l \mathrm{div}\, b_\pm\rangle_{\Omega_\rho^t} \qquad (3.4)\\
&\quad -\mathrm{Re}\int_{S_\rho} \mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm)\frac{x}{r}x_l\partial_l \bar{b}_\pm\, do_x \\
&\quad +\mathrm{Re}\int_{S_t} \mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm)\frac{x}{r}x_l\partial_l \bar{b}_\pm\, do_x \\
&= -\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm), \mathrm{div}\, b_\pm\rangle_{\Omega_\rho^t} \\
&\quad +\gamma_\pm^{-1}\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm), x_l\partial_l \mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm)\rangle_{\Omega_\rho^t} \qquad (3.5)\\
&\quad -\gamma_\pm^{-1}\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm), x_l\partial_l(\frac{mx}{r^2}A_\pm b_\pm)\rangle_{\Omega_\rho^t} \\
&\quad -\mathrm{Re}\int_{S_\rho} \mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm)\frac{x}{r}x_l\partial_l \bar{b}_\pm\, do_x \\
&\quad +\mathrm{Re}\int_{S_t} \mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm)\frac{x}{r}x_l\partial_l \bar{b}_\pm\, do_x
\end{aligned}
$$

In Zeile (3.4) wurde i) eingesetzt und in (3.5) benutzt man die Beziehung

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm)x_l\partial_l \mathrm{div}\,(\alpha_\pm \bar{b}_\pm) = \frac{1}{2}x_l\partial_l|\mathrm{div}\,(\alpha_\pm b_\pm)|^2.$$

Integriert man nun die rechten Seite noch einmal partiell, so ergibt sich die Existenz der Integrale für $t \to \infty$ durch die Eigenschaften der $\alpha_\pm$ und Lemma 2.2 und somit die gewünschte Abschätzung, wenn man noch einmal iii) benutzt. **q.e.d.**

Satz 3.1 (Polynomiales Abklingen) *Seien $s > m > -\frac{1}{2}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein Außengebiet und $A_\pm$ Matrizen, die die Bedingung 1 erfüllen.*
Desweitern löse $a \in R_{loc}(\Omega)^2 \cap \left[A_+^{-1}D_{0,loc}(\Omega) \times A_-^{-1}D_{0,loc}(\Omega)\right] \cap H_m^0(\Omega)^2$ die Gleichung $(M-\omega)a = f$ mit einem $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ und $f \in H_s^1(\Omega)^2$. Dann gilt $a \in H^2_{\frac{[s-m-2]}{2}+m}(\Xi)^2$ für alle Ξ mit $\overline{\Xi} \subset \Omega$ und es existieren $R > 0$ und $c = c(\Omega, m, s, R) > 0$, so daß

$$||a||_{2,\frac{[s-m-2]}{2}+m,\Omega_R} \;\le\; c(||a||_{0,m,\Omega} + ||f||_{1,s,\Omega})$$

gilt. $[\cdot]$ bezeichne in diesem Zusammenhang die Gaußklammer.

Beweis
Nach Lemma 2.4 und Bemerkung 2.3 kann man O.B.d.A. $A = id$ annehmen. Aufgrund von Satz 2.3 ist $a \in H_m^2(\Xi)^2$ für alle Ξ mit $\overline{\Xi} \subset \Omega$ und die Behauptung des Satzes nur interessant, falls $[s-m-2] > 0$ gilt, d. h. $s > m+3 > \frac{5}{2}$ erfüllt ist. Seien diese zusätzlichen Voraussetzungen also gegeben. Dann gilt nach Satz 2.3 für alle hinreichend großen R

$$||a||_{2,m,\Omega_R} \;\le\; c(||a||_{0,m,\Omega} + ||f||_{1,m,\Omega}).$$

Mit den Definitionen aus Lemma 3.1 erhält man durch Multiplikation der Gleichungen unter Lemma 3.1(ii) mit $\bar{b}_\pm$ und Integration über Ω_ρ für hinreichend große ρ sowie nachfolgender partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\rho} \sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 - \mu^2 |b_\pm|^2 \, dx &= -\mathrm{Re}\, \langle R_\pm, b_\pm \rangle_{\Omega_\rho} - \mathrm{Re} \int_{S_\rho} \frac{x_l}{r} \partial_l b_\pm \bar{b}_\pm \, do_x \qquad (3.6) \\
&\quad + \int_{\Omega_\rho} \frac{m(m-1)}{r^2} |b_\pm|^2 \, dx - \mathrm{Re} \int_{\Omega_\rho} 2\frac{m}{r} \partial_r b_\pm \bar{b}_\pm \, dx \\
&\leq \delta(\rho) \int_{\Omega_{\rho-1}} B \, dx + c \int_{S_\rho} B \, do_x \qquad (3.7) \\
&\quad + c \int_{\Omega_\rho} F r^m |b_\pm| \, dx + c ||f||^2_{1,m,\Omega_{\rho-1}}.
\end{aligned}$$

(3.7) folgt mit Lemma 3.1(iv). Die gleiche Prozedur mit $r\partial_r \bar{b}_\pm$ liefert mit Hilfe von Lemma 3.1(v) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\rho} - \sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 + 3\mu^2 |b_\pm|^2 + 4m |\partial_r b_\pm|^2 \, dx \\
&\leq \delta(\rho) \int_{\Omega_{\rho-1}} B \, dx + c \int_{S_\rho} B \, do_x \qquad (3.8) \\
&\quad + c \int_{\Omega_\rho} F r^{m+1} \sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm| \, dx \\
&\quad + c \int_{S_\rho} r \left(\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 - \mu^2 |b_\pm|^2 \right) do_x \\
&\quad + c \int_{S_\rho} r |\mathrm{div}\, (\alpha_\pm b_\pm)|^2 \, do_x \\
&\quad + c\mathrm{Re} \int_{S_\rho} \mathrm{div}\, (\alpha_\pm b_\pm) \frac{x_k}{r} x_l \partial_l \bar{b}^k_\pm \, do_x. \\
&\quad + c ||f||^2_{1,m,\Omega_{\rho-1}}.
\end{aligned}$$

Nochmalige Anwendung dieses Verfahrens mit $r\bar{b}_\pm$ liefert mit Hilfe von Lemma 3.1(vi) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to\infty} \int_{\Omega^t_\rho} r \left(\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 - \mu^2 |b_\pm|^2 \right) dx &\leq c \int_{\Omega_\rho} F r^{m+1} |b_\pm| \, dx \qquad (3.9) \\
&\quad + \delta(\rho) \int_{\Omega_{\rho-1}} B \, dx + c\rho \int_{S_\rho} B \, do_x \\
&\quad + c ||f||^2_{1,m,\Omega_{\rho-1}}.
\end{aligned}$$

Im Falle $m \geq 0$ wird nun (3.6) mit 2 multipliziert und zu (3.8) addiert, wodurch sich folgende Ungleichung ergibt:

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\rho} \left(\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 + \mu^2 |b_\pm|^2 \right) dx \quad &\leq \quad \int_{\Omega_\rho} \left(\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 + \mu^2 |b_\pm|^2 \right) dx \\
&\quad + \int_{\Omega_\rho} 4m |\partial_r b_\pm|^2 \, dx \\
&\leq \quad \delta(\rho) \int_{\Omega_{\rho-1}} B \, dx + c \int_{S_\rho} B \, do_x \\
&\quad + c \int_{\Omega_\rho} F r^{m+1} \left(\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm| + |b_\pm| \right) dx \\
&\quad + c \int_{S_\rho} r \left(\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 - \mu^2 |b_\pm|^2 \right) do_x \\
&\quad + c \int_{S_\rho} r |\mathrm{div}\ (\alpha_\pm b_\pm)|^2 \, do_x \\
&\quad + c\mathrm{Re} \int_{S_\rho} \mathrm{div}\ (\alpha_\pm b_\pm) \frac{x_k}{r} x_l \partial_l \bar{b}_\pm^k \, do_x \\
&\quad + c ||f||^2_{1,m,\Omega_{\rho-1}}
\end{aligned}
$$

Im Falle $m < 0$ gilt $4m|\partial_r b_\pm|^2 \geq 4m \sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2$. Da $-4m + 1 < 3$ ist, sei ein $0 < \epsilon < 3$ gewählt, so daß $4m - 1 + \epsilon > 0$ erfüllt ist. Nun wird (3.6) mit diesem ϵ multipliziert und zu (3.8) addiert. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\rho} \left(\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 + \mu^2 |b_\pm|^2 \right) dx \quad &\leq \quad c(\epsilon - 1 + 4m) \int_{\Omega_\rho} \sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 \, dx \\
&\quad + c(3 - \epsilon)\mu^2 \int_{\Omega_\rho} |b_\pm|^2 \, dx \\
&\leq \quad \delta(\rho) \int_{\Omega_{\rho-1}} B \, dx + c \int_{S_\rho} B \, do_x \\
&\quad + c \int_{\Omega_\rho} F r^{m+1} \left(\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm| + |b_\pm| \right) dx \\
&\quad + c \int_{S_\rho} r \left(\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 - \mu^2 |b_\pm|^2 \right) do_x \\
&\quad + c \int_{S_\rho} r |\mathrm{div}\ (\alpha_\pm b_\pm)|^2 \, do_x \\
&\quad + c\mathrm{Re} \int_{S_\rho} \mathrm{div}\ (\alpha_\pm b_\pm) \frac{x_k}{r} x_l \partial_l \bar{b}_\pm^k \, do_x \\
&\quad + c ||f||^2_{1,m,\Omega_{\rho-1}}.
\end{aligned}
$$

Damit erhält man für alle hinreichend großen ρ

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\rho} B\ dx \quad \leq \quad & \int_{\Omega_{\rho-1}^\rho} B\ dx + c\int_{S_\rho} B\ do_x \\
& + c \sum_{n\in\{+,-\}} \int_{\Omega_\rho} F r^{m+1} \left(\sum_{l=1}^3 |\partial_l b_n| + |b_n| \right)\ dx \\
& + c \sum_{n\in\{+,-\}} \int_{S_\rho} r \left(\sum_{l=1}^3 |\partial_l b_n|^2 - \mu^2 |b_n|^2 \right)\ do_x \\
& + c \sum_{n\in\{+,-\}} \int_{S_\rho} r |\mathrm{div}\ (\alpha_n b_n)|^2\ do_x \\
& + c \sum_{n\in\{+,-\}} \mathrm{Re} \int_{S_\rho} \mathrm{div}\ (\alpha_n b_n) \frac{x_k}{r} x_l \partial_l \bar{b}_n^k\ do_x \\
& + c ||f||^2_{1,m,\Omega_{\rho-1}}.
\end{aligned}
$$

Diese Ungleichung wird nun von ρ bis T integriert.

$$
\int_\rho^T \int_{\Omega_t} B\ dx\ dt \quad \leq \quad \int_\rho^T \int_{\Omega_{t-1}^t} B\ dx\ dt + c\int_{\Omega_\rho^T} B\ dx \tag{3.10}
$$

$$
+ c \sum_{n\in\{+,-\}} \int_\rho^T \int_{\Omega_t} F r^{m+1} \left(\sum_{l=1}^3 |\partial_l b_n| + |b_n| \right)\ dx\ dt \tag{3.11}
$$

$$
+ c \sum_{n\in\{+,-\}} \int_{\Omega_\rho^T} r \left(\sum_{l=1}^3 |\partial_l b_n|^2 - \mu^2 |b_n|^2 \right)\ dx \tag{3.12}
$$

$$
+ c \sum_{n\in\{+,-\}} \int_{\Omega_\rho^T} r |\mathrm{div}\ (\alpha_n b_n)|^2\ dx \tag{3.13}
$$

$$
+ c \sum_{n\in\{+,-\}} \mathrm{Re} \int_{\Omega_\rho^T} \mathrm{div}\ (\alpha_n b_n) \frac{x_k}{r} x_l \partial_l \bar{b}_n^k\ dx \tag{3.14}
$$

$$
+ c \int_\rho^T ||f||^2_{1,m,\Omega_{t-1}}\ dt \tag{3.15}
$$

Das erste Integral auf der rechten Seite von Zeile (3.10) formt man mit dem Satz von Fubini-Tonelli in

$$
\int_\rho^T \int_{t-1}^t \int_{S_\tau} B\ do_x\ d\tau\ dt = \int_{\rho-1}^T \int_{\max\{\tau,\rho\}}^{\min\{T,\tau+1\}} \int_{S_\tau} B\ do_x\ dt\ d\tau
$$

um und kann es nun durch $\int_{\Omega_{\rho-1}} B\ dx$ abschätzen. In Zeile (3.11) und (3.15) wird $f \in H^1_s(\Omega)$ ausgenutzt. (3.12) schätzt sich durch (3.9) ab. In (3.13) und (3.14) wird noch einmal partiell integriert, so daß keine Ableitungen mehr auf einem der $\alpha_\pm$ stehen. Bildet man nun den Limes inferior für $T \to \infty$ auf beiden Seiten und benutzt wiederum die Abklingeigenschaften der $\alpha_\pm$, Lemma 2.2 und Lemma

3.1(iii), so ergibt sich die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\int_\rho^\infty \int_{\Omega_t} B\ dx\ dt \ &\le\ c\int_{\Omega_{\rho-1}} B\ dx + c\rho\int_{S_\rho} B\ do_x \\
&\quad + c\sum_{n\in\{+,-\}} \int_{\Omega_\rho} Fr^{m+1}\left(\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_n| + |b_n|\right)\ dx \\
&\quad + c||f||^2_{1,m,\Omega_{\rho-1}} + c\int_\rho^\infty ||f||^2_{1,m,\Omega_{t-1}}\ dt \\
&\quad + c\sum_{n\in\{+,-\}} \int_\rho^\infty \int_{\Omega_t} Fr^{m+1}\left(\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_n| + |b_n|\right)\ dx\ dt \\
&\le\ c\int_{\Omega_{\rho-1}} B\ dx + c\rho\int_{S_\rho} B\ do_x \\
&\quad + c\rho^{m+1-s}||f||_{1,s,\Omega_\rho}||b||_{1,0,\Omega_\rho} \\
&\quad + c\rho^{2(m-s)}||f||^2_{1,s,\Omega_{\rho-1}} + c\int_\rho^\infty t^{2(m-s)}\ dt||f||^2_{1,s,\Omega_{\rho-1}} \\
&\quad + c\int_\rho^\infty t^{m+1-s}\ dt||f||_{1,s,\Omega_{\rho-1}}||b||_{1,0,\Omega_{\rho-1}} \\
&\le\ c||b||^2_{1,0,\Omega_{\rho-1}} + c\rho\int_{S_\rho} B\ do_x \\
&\quad + c\rho^{m+2-s}\left[||f||^2_{1,s,\Omega_{\rho-1}} + ||b||^2_{1,0,\Omega_{\rho-1}}\right] \\
&\le\ c||b||^2_{1,0,\Omega_{\rho-1}} + c\rho\int_{S_\rho} B\ do_x \\
&\quad + c\rho^{m+2-s}\left[||f||^2_{1,s,\Omega} + ||b||^2_{1,0,\Xi}\right].
\end{aligned}
$$

Ξ sei hierbei fest mit $\overline{\Omega_{\rho-1}} \subset \overline{\Xi} \subset \Omega$, für diese hinreichend großen ρ. Diese Rechnungen sind aufgrund von $s > m+2$ durchführbar.

Andererseits erhält man mit dem Satz von Fubini, indem man die linke Seite als Oberflächenintegral schreibt und dann die Integrationsreihenfolge vertauscht

$$
\begin{aligned}
\int_\rho^\infty \int_{\Omega_t} B\ dx\ dt \ &=\ \int_\rho^\infty \int_t^\infty \int_{S_\tau} B\ do_x\ d\tau\ dt \\
&=\ \int_\rho^\infty \int_\rho^\tau \int_{S_\tau} B\ do_x\ dt\ d\tau \\
&=\ \int_\rho^\infty (\tau-\rho)\int_{S_\tau} B\ do_x\ d\tau \\
&=\ \int_{\Omega_\rho} (r-\rho)B\ dx.
\end{aligned}
$$

Eine leichte Induktion liefert, solange $m+1-s+l < 0$ gilt, folgende beiden Abschätzungen:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\rho}(r-\rho)^l B\,dx &\leq c\rho^{l-1}||b||^2_{1,0,\Omega_{\rho-1}}+c\rho^l\int_{S_\rho}B\,do_x\\ &+c\rho^{m+1-s+l}\left[||f||^2_{1,s,\Omega}+||b||^2_{1,0,\Xi}\right]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\rho}r^l B\,dx &\leq c\rho^l\left[||b||^2_{1,0,\Omega_{\rho-1}}+\int_{S_\rho}B\,do_x\right]\\ &+c\rho^{m+1-s+l}\left[||f||^2_{1,s,\Omega}+||b||^2_{1,0,\Xi}\right]\end{aligned}$$

Diese Ungleichungen gelten bis maximal $l=[s-m-2]$, d. h.

$$\begin{aligned}||a||^2_{1,\frac{[s-m-2]}{2}+m,\Omega_\rho} &\leq c||b||^2_{1,\frac{[s-m-2]}{2},\Omega_\rho}\\ &\leq c\left(||b||^2_{1,0,\Xi}+\int_{S_\rho}B\,do_x+||f||^2_{1,s,\Omega}\right)\\ &\leq c\left(||a||^2_{1,m,\Xi}+\int_{S_\rho}r^{2m}\left(\sum_{k=1}^3|\partial_k a|^2+|a|^2\right)\,do_x+||f||^2_{1,s,\Omega}\right)\\ &\leq c\left(||a||^2_{1,m,\Xi}+||a||^2_{2,m,\Omega_\rho}+||f||^2_{1,s,\Omega}\right) \qquad (3.16)\\ &\leq c\left(||a||^2_{0,m,\Omega}+||f||^2_{1,s,\Omega}\right). \qquad (3.17)\end{aligned}$$

(3.16) folgt aus dem Spursatz und (3.17) aus Satz 2.3, falls ρ hinreichend groß ist.

Mit $q:=\frac{[s-m-2]}{2}+m$ gilt also $a\in H^1_q(\Omega_\rho)^2$ und mittels der Differentialgleichung (2.16) folgt für genügend große ρ

$$\begin{aligned}||a||^2_{2,q,\Omega_\rho} &\leq c\left(||a||^2_{1,q,\Omega_{\rho-1}}+||f||^2_{1,q,\Omega}\right)\\ &\leq c\left(||a||^2_{0,m,\Omega}+||f||^2_{1,s,\Omega}\right).\end{aligned}$$

Ergo $a\in H^2_q(\Xi)^2$ für alle Ξ mit $\overline{\overline{\Xi}}\subset\Omega$. **q.e.d.**

Bemerkung 3.1 *Gilt in Satz 3.1 $f\in H^1_s(\Omega)^2$ für alle $s\in\mathbf{R}$, so folgt $a\in H^2_s(\Xi)^2$ für alle $s\in\mathbf{R}$ und Ξ mit $\overline{\overline{\Xi}}\subset\Omega$. Dies ist z. B. erfüllt, wenn $f\in H^1(\Omega)^2$ einen kompakten Träger besitzt.*

Satz 3.2 (Exponentielles Abklingen) *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.1 mit $f=0$ erfüllt. Dann gilt für alle $t\in\mathbf{R}$, $\exp(tr)a\in H^1(\Xi)^2$, sofern $\overline{\overline{\Xi}}\subset\Omega$.*

Beweis
Wie in Satz 3.1 nimmt man wieder O.B.d.A. $A = id$ an. Satz 3.1 liefert $b := r^m a \in H^2(\Xi)^2$, falls $\overline{\Xi} \subset \Omega$, für alle $m \in \mathbf{R}$. Es werden nun ähnliche Abschätzungen wie beim polynomialen Abklingen bewiesen, wobei hier allerdings darauf geachtet werden muß, daß die auftretenden Konstanten nicht von m abhängen, da diese Abschätzungen im weiteren Verlauf des Beweises aufsummiert werden sollen. Sei $g \in C^\infty(\mathbf{R}, [0,1])$ und $g|_{(-\infty,0)} = 0$, $g|_{(1,\infty)} = 1$. Dann gilt für $g_\rho := g(|\cdot| - \rho) \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, $g|_{K(0,\rho)} = 0$ und $g|_{A(\rho+1)} = 1$. Durch Multiplikation der Gleichung unter Lemma 3.1(ii)($f = 0$) mit $g_\rho r^p \overline{b}_\pm$, Integration über Ω_ρ für hinreichend großes ρ und nachfolgender partieller Integration, folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\rho} g_\rho r^p \left(\mu^2 + \frac{1}{r^2}\left[\frac{p}{2}(1+p) + m(m+p)\right]\right) |b_\pm|^2 \, dx \qquad (3.18)\\ &+\mathrm{Re} \int_{\Omega_\rho} g_\rho' r^p \left(-\partial_r b_\pm \overline{b}_\pm + \left(\frac{p}{2r} + \frac{m}{r}\right)|b_\pm|^2\right) dx \;=\; \mathrm{Re} \int_{\Omega_\rho} g_\rho r^p R_\pm \overline{b}_\pm \, dx \\ &\qquad + \int_{\Omega_\rho} g_\rho r^p \sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Im Verlauf des Beweises werden nur die Werte $p = 0$ und $p = -2$ benötigt, deshalb dürfen die nachfolgenden Konstanten von p abhängen.

Somit erhält man durch das Abklingen der $\alpha_\pm$ und der Tatsache, daß $\mathrm{supp}(g_\rho') \subset \Omega_\rho^{\rho+1}$ ist,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\rho} g_\rho r^p \sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 \, dx \;\leq\; & c \int_{\Omega_\rho} g_\rho r^p \left(1 + \frac{m^2}{r^2}\right) \sum_{n \in \{+,-\}} |b_n|^2 \, dx \qquad (3.19)\\ & + c m^2 (\rho+1)^{2m+p}. \end{aligned}$$

Da $\mathrm{supp}(1 - g_\rho) \cap \Omega_\rho \subset \Omega_\rho^{\rho+1}$ gilt, folgt Ungleichung (3.19) auch ohne g_ρ. In die Konstanten fließt nun natürlich $||a||_{1,0,\Omega}$ mit ein. Setzt man in (3.18) $p = 0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\rho} g_\rho \left(-\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 + \left(\mu^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)|b_\pm|^2\right) dx \\ &\qquad +\mathrm{Re} \int_{\Omega_\rho} g_\rho' \left(-\partial_r b_\pm \overline{b}_\pm + \frac{m}{r}|b_\pm|^2\right) dx \;=\; \mathrm{Re} \int_{\Omega_\rho} g_\rho R_\pm \overline{b}_\pm \, dx. \end{aligned}$$

Nun wird die rechte Seite wieder so lange partiell integriert, bis keine Ableitungen mehr auf den $\alpha_\pm$ stehen. Es folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\rho} g_\rho \left(\sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 - \left(\mu^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)|b_\pm|^2\right) dx \\ &\leq \; \delta(\rho) m^2 (\rho+1)^{2m} \qquad (3.20) \end{aligned}$$

$$+\delta(\rho)\int_{\Omega_\rho} g_\rho\left(1+\frac{m^2}{r^2}\right)\sum_{n\in\{+,-\}}|b_n|^2\,dx$$
$$+\delta(\rho)\int_{\Omega_\rho} g_\rho\sum_{l=1}^{3}\left(|\partial_l b_\pm|^2+\sum_{k=1}^{3}|\partial_l\partial_k b_\pm|^2\right)\,dx.$$

Diese Prozedur wird nun wiederholt, indem Lemma 3.1(ii)($f=0$) mit $g_\rho x_l\partial_l\bar{b}_\pm$ multipliziert und über Ω_ρ integriert wird. Einige partielle Integrationen (hierbei fließt Lemma 3.1(i) stark ein) liefern wiederum

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\rho} g_\rho\left(-\sum_{l=1}^{3}|\partial_l b_\pm|^2+\left(3\mu^2+\frac{m^2}{r^2}\right)|b_\pm|^2\right)\,dx\\
&\quad\le\ \delta(\rho)m^2(\rho+1)^{2m+1} \qquad (3.21)\\
&\qquad +\delta(\rho)\int_{\Omega_\rho} g_\rho\left(1+\frac{m^4}{r^4}\right)\sum_{n\in\{+,-\}}|b_n|^2\,dx\\
&\qquad +\delta(\rho)\int_{\Omega_\rho} g_\rho\sum_{l=1}^{3}|\partial_l b_\pm|^2\,dx\\
&\qquad +\delta(\rho)\int_{\Omega_\rho} g_\rho\sum_{l,k=1}^{3}|\partial_l\partial_k b_\pm|^2\,dx\\
&\qquad -\int_{\Omega_\rho} g_\rho 4m|\partial_r b_\pm|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Da nun $m>0$ gelten soll, folgt durch Addition von (3.20) und (3.21) die Ungleichung (man beachte wiederum $\operatorname{supp}(1-g_\rho)\cap\Omega_\rho\subset\Omega_\rho^{\rho+1}$)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\rho} 2\mu^2|b_\pm|^2\,dx\ \le\ &\delta(\rho)m^2(\rho+1)^{2m+1} \qquad (3.22)\\
&+\delta(\rho)\int_{\Omega_\rho} g_\rho\left(1+\frac{m^4}{r^4}\right)\sum_{n\in\{+,-\}}|b_n|^2\,dx\\
&+\delta(\rho)\int_{\Omega_\rho} g_\rho\sum_{l=1}^{3}|\partial_l b_\pm|^2\,dx\\
&+\delta(\rho)\int_{\Omega_\rho} g_\rho\sum_{l,k=1}^{3}|\partial_l\partial_k b_\pm|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Mittels Lemma 3.1(ii) folgt sofort für hinreichend große ρ

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\rho} g_\rho|\partial_l\partial_k b_\pm|^2\,dx\ \le\ &c\int_{\Omega_\rho}\left(1+\frac{m^4}{r^4}\right)\sum_{n\in\{+,-\}}|b_n|^2\,dx \qquad (3.23)\\
&+c\int_{\Omega_\rho}\left(1+\frac{m^2}{r^2}\right)\sum_{n\in\{+,-\}}\sum_{l=1}^{3}|\partial_l b_n|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Benutzt man (3.23) in (3.22), so ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\{+,-\}}\int_{\Omega_\rho}|b_n|^2\,dx &\le \delta(\rho)m^2(\rho+1)^{2m+1}\\ &\quad+\delta(\rho)\int_{\Omega_\rho}\left(1+\frac{m^4}{r^4}\right)\sum_{n\in\{+,-\}}|b_n|^2\,dx\\ &\quad+\delta(\rho)\int_{\Omega_\rho}\left(1+\frac{m^2}{r^2}\right)\sum_{n\in\{+,-\}}\sum_{l=1}^{3}|\partial_l b_n|^2\,dx.\end{aligned}$$

Unter Benutzung von (3.19)(ohne g_ρ) für $p=0$ und $p=-2$ folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\{+,-\}}\int_{\Omega_\rho}|b_n|^2\,dx &\le \delta(\rho)m^4(\rho+1)^{2m+1}\\ &\quad+\delta(\rho)\int_{\Omega_\rho}\left(1+\frac{m^4}{r^4}\right)\sum_{n\in\{+,-\}}|b_n|^2\,dx,\end{aligned}$$

und somit für genügend große ρ

$$\int_{\Omega_\rho} r^{2m}|a|^2\,dx \le \delta(\rho)m^4\left((\rho+1)^{2m+1}+\int_{\Omega_\rho} r^{2m-4}|a|^2\,dx\right),$$

oder mit $n := 2m$

$$\int_{\Omega_\rho} r^{n}|a|^2\,dx \le \delta(\rho)n^4\left((\rho+1)^{n+1}+\int_{\Omega_\rho} r^{n-4}|a|^2\,dx\right). \tag{3.24}$$

Für $M > N$ hinreichend groß und $t\in\mathbf{R}^+$ beliebig gilt sodann mit (3.24)

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{M}\frac{t^n}{n!}\int_{\Omega_\rho} r^n|a|^2\,dx &\le \delta(\rho)\sum_{n=N}^{M}\frac{t^n}{n!}n^4\int_{\Omega_\rho} r^{n-4}|a|^2\,dx\\ &\quad+\delta(\rho)\sum_{n=N}^{M}\frac{t^n}{n!}\underbrace{n^4}_{\le 4^n}(\rho+1)^{n+1}\\ &\le \delta(\rho)\sum_{n=N-4}^{M}\frac{t^{n+4}}{(n+4)!}(n+4)^4\int_{\Omega_\rho} r^n|a|^2\,dx\\ &\quad+c(\rho+1)\exp(4t(\rho+1))\\ &\le \delta(\rho)\sum_{n=N}^{M}\frac{t^n}{n!}t^4\frac{(n+4)^4}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}\int_{\Omega_\rho} r^n|a|^2\,dx\\ &\quad+c(\rho+1)\exp(4t(\rho+1))\\ &\quad+c\sum_{n=N-4}^{N-1}\frac{t^{n+4}}{(n+4)!}(n+4)^4\int_{\Omega_\rho} r^n|a|^2\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq t^4\delta(\rho)\sum_{n=N}^{M}\frac{t^n}{n!}\int_{\Omega_\rho} r^n|a|^2\,dx \\
&\quad +c(\rho+1)\exp(4t(\rho+1)) \\
&\quad +c\sum_{n=N-4}^{N-1}\frac{t^{n+4}}{(n+4)!}(n+4)^4\int_{\Omega_\rho} r^n|a|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Wählt man also ρ hinreichend groß, so folgt

$$\sum_{n=N}^{M}\frac{t^n}{n!}\int_{\Omega_\rho} r^n|a|^2\,dx \quad\leq\quad c$$

mit c unabhängig vom M. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert

$$\exp\left(\frac{tr}{2}\right) a \in L^2\left(\Omega\right)^2$$

für alle $t \in \mathbf{R}$. Aus

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to\infty}\int_{\Omega_\rho^t} e^{tr}|\partial_l a_\pm|^2\,dx \quad&=\quad -\liminf_{t\to\infty}\int_{\Omega_\rho^t} e^{tr}a_\pm\Delta\bar a_\pm\,dx \\
&\quad\quad -\liminf_{t\to\infty}\int_{\Omega_\rho^t} te^{tr}a_\pm\partial_r\bar a_\pm\,dx \\
&\quad\quad -\int_{S_\rho} e^{tr}a_\pm\partial_r\bar a_\pm\,do_x \\
&\quad\quad +\liminf_{t\to\infty}\int_{S_t} e^{tr}a_\pm\partial_r\bar a_\pm\,do_x
\end{aligned}$$

und der Existenz der rechten Seite folgt sofort

$$\exp\left(\frac{tr}{2}\right)\partial_l a \in L^2\left(\Xi\right)^2$$

für alle $l = 1,2,3$ und Ξ mit $\overline{\Xi} \subset \Omega$. Ergo $\exp(tr)a \in H^1\left(\Xi\right)^2$. **q.e.d.**

Korollar 3.1 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.1 mit einem $s > m+3$ erfüllt. Dann gibt es ein $R > 0$ und ein $c > 0$, welches von a, f und $\omega \in I \subset\subset \mathbf{R}\backslash\{0\}$ unabhängig ist, so daß mit $q := \frac{[s-m-2]}{2} + m$ die Ungleichung*

$$||a||_{0,q,\Omega} \quad\leq\quad c\left(||a||_{0,0,\Omega(R)} + ||f||_{1,s,\Omega}\right)$$

gilt.

Beweis
Sei $\hat R$ so groß, daß man Satz 3.1 anwenden kann.

$$||a||_{0,q,\Omega}^2 \quad=\quad ||a||_{0,q,\Omega(\hat R)}^2 + ||a||_{0,q,\Omega_{\hat R}}^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \hat{c}\left(||a||^2_{0,0,\Omega(\hat{R})} + ||a||^2_{0,m,\Omega} + ||f||^2_{1,s,\Omega}\right) &(3.25)\\
&= \hat{c}\left(||a||^2_{0,0,\Omega(\hat{R})} + ||f||^2_{1,s,\Omega}\right)\\
&\quad +\hat{c}||a||^2_{0,m,\Omega(R)} + \hat{c}||a||^2_{0,m,\Omega_R}\\
&\leq \hat{c}\left(||a||^2_{0,0,\Omega(\hat{R})} + ||f||^2_{1,s,\Omega}\right) &(3.26)\\
&\quad +\hat{c}c||a||^2_{0,0,\Omega(R)} + \hat{c}R^{2(m-q)}||a||^2_{0,q,\Omega_R}\\
&\leq c(\hat{R},R)\left(||a||^2_{0,0,\Omega(R)} + ||f||^2_{1,s,\Omega}\right) &(3.27)\\
&\quad +\frac{1}{2}||a||^2_{0,q,\Omega}
\end{aligned}$$

Hierbei seien c von R und $\hat{c}$ von $\hat{R}$ abhängig und O.B.d.A. $R > \hat{R}$. In Zeile (3.25) wurde Satz 3.1 benutzt. Da $2(m-q) = 2(m - \frac{[s-m-2]}{2} - m) \leq -s+m+3 < 0$ ist, folgt (3.26) und in (3.27) sei R so groß gewählt, daß $\hat{c}R^{2(m-q)} < \frac{1}{2}$ gilt. **q.e.d.**

Korollar 3.2 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt. Zusätzlich sei Ω ein C^2-Gebiet und $a \in D_{loc}(M)$, d. h. a erfüllt die Randbedingungen. Dann gilt $a \in H^2_q(\Omega)^2$ und*

$$||a||_{2,q,\Omega} \leq c\left(||a||_{0,m,\Omega} + ||f||_{1,s,\Omega}\right).$$

Beweis
Nach Satz 3.1 genügt es $||a||_{2,q,\Omega(R)}$, d. h. $||a||_{2,0,\Omega(R)}$ abzuschätzen. Da a nun die Randbedingungen erfüllt, ergibt sich durch Satz 2.1

$$\begin{aligned}
||a||_{2,0,\Omega(R)} &\leq c\left(||a||_{0,0,\Omega(R+1)} + ||f||_{1,0,\Omega(R+1)}\right)\\
&\leq c\left(||a||_{0,m,\Omega} + ||f||_{1,s,\Omega}\right).
\end{aligned}$$

q.e.d.

Korollar 3.3 *Es seien die Voraussetzungen von Korollar 3.2 erfüllt. Falls $s > m+3$ gilt, so existiert ein $R > 0$ und $c > 0$, welches nicht von a, f und $\omega \in I \subset\subset \mathbf{R}\backslash\{0\}$ abhängt, so daß*

$$||a||_{2,q,\Omega} \leq c\left(||a||_{0,0,\Omega(R)} + ||f||_{1,s,\Omega}\right).$$

Beweis

$$\begin{aligned}
||a||^2_{2,q,\Omega} &\leq c\left(||a||^2_{0,m,\Omega} + ||f||^2_{1,s,\Omega}\right) &(3.28)\\
&\leq c(R)||a||^2_{0,0,\Omega(R)} + c||a||^2_{0,m,\Omega_R}\\
&\quad +c||f||^2_{1,s,\Omega}\\
&\leq c(R)||a||^2_{0,0,\Omega(R)} + c||f||^2_{1,s,\Omega}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +cR^{2(m-q)}||a||^2_{0,q,\Omega_R} && (3.29)\\
\leq\ & c(R)||a||^2_{0,0,\Omega(R)} + c||f||^2_{1,s,\Omega} \\
& +\frac{1}{2}||a||^2_{2,q,\Omega} && (3.30)
\end{aligned}
$$

(3.28) folgt aus Korollar 3.2. (3.29) ergibt sich, da $2(m-q) < 0$ gilt. In (3.30) sei R so groß, daß $cR^{2(m-q)} < \frac{1}{2}$ folgt. Dies liefert die Behauptung. **q.e.d.**

Kapitel 4

Lösungstheorie und Fredholmsche Alternative

4.1 Die a-priori-Abschätzung

Das wichtigste Hilfsmittel zur Durchführung der Grenzabsorption und damit zum Beweis der Existenz ist die a-priori-Abschätzung, in der die Lösung a von (1.14) zu echt komplexen Frequenzen ω im wesentlichen durch die rechte Seite f unabhängig von ω abgeschätzt werden kann.

Diese Abschätzung wird sich natürlich in gewichteten Sobolevräumen ergeben. Zusätzlich erhält man eine Abschätzung, aus der sich die Strahlungsbedingung, die die Lösung erfüllen soll, ergeben wird.

Satz 4.1 (Die a-priori-Abschätzung) *Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein Außengebiet, $1 \geq s > \frac{1}{2}$, $t < -\frac{1}{2}$, $I \subset\subset \mathbf{R}\backslash\{0\}$ ein Intervall und $A_\pm$ Matrizen, die die Bedingung 2 mit $A = id$ erfüllen. Dann existieren $c, R > 0$, so daß für alle $\omega \in I$, $\sigma \in (0,1]$ und $f \in H_s^1(\Omega)^2 \cap \mathcal{D}_0(\Omega)$ mit $\lambda^2 = \omega^2 + i\sigma\omega$*

$$\begin{aligned} &||(M-\lambda)^{-1}f||_{0,t,\Omega} + |||\exp(i\mu r)(M-\lambda)^{-1}f|||_{1,\hat{s}-2,\Omega_R} \\ &\leq \; c\left(||f||_{1,s,\Omega} + ||(M-\lambda)^{-1}f||_{0,0,\Omega(R)}\right) \end{aligned}$$

mit einem $\hat{s} > \frac{1}{2}$ gilt. (Zur Erinnerung: $\mu = \omega\sqrt{\gamma_+\gamma_-}$)

Beweis
Zunächst ergibt sich die Existenz von $a := (M-\lambda)^{-1}f$ aus der Selbstadjungiertheit von

$$\begin{array}{rcccc} M & : & D(M) \subset \mathcal{D}_0(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}_0(\Omega) \\ & & a & \longmapsto & Ma \end{array}$$

Aus Satz 2.3 folgt $a \in H^2(\Xi)^2$ für alle Ξ mit $\overline{\Xi} \subset \Omega$. Sei $\mathbf{R}^3\backslash\Omega \subset\subset U(0,R)$ und $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ mit $\varphi|_{A(R)} = 1$ und $\text{supp}\varphi \subset \Omega$. Dann folgt $a\varphi \in H^2(\mathbf{R}^3)^2$. Mittels der Differentialgleichung (2.16) erhält man

$$\begin{aligned}
-\Delta(a_\pm\varphi) - \lambda^2\gamma_+\gamma_- a_\pm\varphi &= -\Delta a_\pm\varphi - \lambda^2\gamma_+\gamma_- a_\pm\varphi \\
&\quad -2\partial_l a_\pm \partial_l\varphi - a_\pm\Delta\varphi \\
&= (\gamma_\pm^{-1}\nabla\mathrm{div}\ (\alpha_\pm a_\pm) + \lambda^2\gamma_\mp\alpha_\pm a_\pm \\
&\quad \mp i\lambda\mathrm{rot}\ (\alpha_\mp a_\mp) + \lambda\gamma_\mp A_\pm f_\pm \\
&\quad \mp i\mathrm{rot}\ (A_\mp f_\mp))\varphi - 2\partial_l a_\pm\partial_l\varphi - a_\pm\Delta\varphi \\
&=: R_\pm.
\end{aligned}$$

Da $A_\pm$ die Bedingung 2 erfüllen und $\mathrm{supp}(2\partial_l a_\pm\partial_l\varphi + a_\pm\Delta\varphi) \subset \Omega(R)$ gilt, folgt $R_\pm \in L_s^2(\mathbf{R}^3)$. Aufgrund der Selbstadjungiertheit von

$$\begin{array}{rccc}
-\Delta \ : & H^2(\mathbf{R}^3) \subset L^2(\mathbf{R}^3) & \longrightarrow & L^2(\mathbf{R}^3) \\
& u & \longmapsto & -\Delta u
\end{array}$$

existieren eindeutige $u_\pm \in H^2(\mathbf{R}^3)$ mit

$$(-\Delta - \lambda^2\gamma_+\gamma_-)u_\pm = R_\pm.$$

Hieraus folgt $u = a\varphi$. Aus einer a-priori-Abschätzung für Δ in einer Arbeit von Vogelsang ([10], Theorem) (siehe auch Weck, Witsch ([14], Lemma 7)) folgt sodann mit $-\frac{1}{2} > \hat{t} > t$ und $\frac{1}{2} < \hat{s} < s$ und einer von a, f, ω und σ unabhängigen Konstanten $c > 0$

$$||a\varphi||_{0,\hat{t},\mathbf{R}^3} + |||\exp(i\mu r)a\varphi|||_{1,\hat{s}-2,\mathbf{R}^3} \le c||R||_{0,\hat{s},\mathbf{R}^3}.$$

Die Abklingeigenschaften der $\alpha_\pm$ liefern

$$\begin{aligned}
||a\varphi||_{0,\hat{t},\mathbf{R}^3} + |||\exp(i\mu r)a\varphi|||_{1,\hat{s}-2,\mathbf{R}^3} &\le c(||f\varphi||_{1,\hat{s},\mathbf{R}^3} + ||a\varphi||_{2,\hat{s}-1-\epsilon,\mathbf{R}^3} \\
&\quad + ||a||_{1,0,\mathrm{supp}(\nabla\varphi)}) \\
&\le c(||f||_{1,\hat{s},\Omega} + ||a\varphi||_{2,\hat{s}-1-\epsilon,U(0,R)} \\
&\quad + ||a\varphi||_{2,\hat{s}-1-\epsilon,A(R)} + ||a||_{1,0,\mathrm{supp}(\nabla\varphi)}) \\
&\le c(||f||_{1,\hat{s},\Omega} + ||a\varphi||_{2,0,U(0,R)} \\
&\quad + ||a||_{2,\hat{s}-1-\epsilon,A(R)} + ||a||_{1,0,\mathrm{supp}(\nabla\varphi)}) \\
&\le c(||f||_{1,\hat{s},\Omega} + ||a\varphi||_{2,0,U(0,R)} \qquad (4.1) \\
&\quad + ||a||_{0,\hat{s}-1-\epsilon,\Omega} + ||a||_{1,0,\mathrm{supp}(\nabla\varphi)}).
\end{aligned}$$

In Zeile (4.1) wurde Satz 2.3 benutzt. Nun werden Satz 2.1 im Falle $\Omega = \mathbf{R}^3$ und Korollar 2.4 mehrfach angewandt.

$$\begin{aligned}
||a\varphi||_{0,\hat{t},\mathbf{R}^3} + |||\exp(i\mu r)a\varphi|||_{1,\hat{s}-2,\mathbf{R}^3} \leq\ & c(||f||_{1,\hat{s},\Omega} + ||a\varphi||_{0,0,U(0,R+\frac{1}{2})} \\
& + ||\mathrm{rot}\ (a\varphi)||_{1,0,U(0,R+\frac{1}{2})} \\
& + \sum_{n\in\{+,-\}} ||\mathrm{div}\ (A_n a_n \varphi)||_{1,0,U(0,R+\frac{1}{2})} \\
& + ||a||_{0,0,\Omega(R+1)} + ||\mathrm{rot}\ a||_{0,0,\Omega(R+1)} \\
& + ||a||_{0,\hat{s}-1-\epsilon,\Omega}) \\
\leq\ & c(||f||_{1,\hat{s},\Omega} + ||a||_{0,0,\Omega(R+1)} \\
& + ||a\varphi||_{1,0,U(0,R+\frac{1}{2})} + ||a||_{0,\hat{s}-1-\epsilon,\Omega} \\
& + \sum_{n\in\{+,-\}} ||a_n \wedge \nabla\varphi||_{1,0,U(0,R+\frac{1}{2})} \\
& + \sum_{n\in\{+,-\}} ||a_n A_n \nabla\varphi||_{1,0,U(0,R+\frac{1}{2})}) \\
\leq\ & c(||f||_{1,\hat{s},\Omega} + ||a||_{0,0,\Omega(R+1)} \\
& + ||a\varphi||_{0,0,U(0,R+1)} + ||a||_{0,\hat{s}-1-\epsilon,\Omega} \\
& + \sum_{n\in\{+,-\}} ||\mathrm{div}\ (A_n a_n \varphi)||_{0,0,U(0,R+1)} \\
& + ||\mathrm{rot}\ (a\varphi)||_{0,0,U(0,R+1)} \\
& + ||a||_{1,0,\mathrm{supp}(\nabla\varphi)}) \\
\leq\ & c(||f||_{1,\hat{s},\Omega} + ||a||_{0,0,\Omega(R+1)} \\
& + ||a||_{0,\hat{s}-1-\epsilon,\Omega})
\end{aligned}$$

Seien nun $\hat{s}$ so nahe bei $\frac{1}{2}$ und $\hat{t}$ so nahe bei $-\frac{1}{2}$ gewählt, so daß $\hat{t} > \hat{s}-1-\epsilon$ gilt. Dann folgt mit $\tilde{R} > R+1$ hinreichend groß, da $-\hat{t}+\hat{s}-1-\epsilon < 0$ erfüllt ist,

$$\begin{aligned}
||a||_{0,\hat{t},\Omega} + |||\exp(i\mu r)a|||_{1,\hat{s}-2,\Omega_{\tilde{R}}} \leq\ & c(||a||_{0,0,\Omega(R)} + ||a\varphi||_{0,\hat{t},\Omega_R} \\
& + |||\exp(i\mu r)a\varphi|||_{1,\hat{s}-2,\Omega_{\tilde{R}}}) \\
\leq\ & c(||a||_{0,0,\Omega(R)} + ||a\varphi||_{0,\hat{t},\mathbf{R}^3} \\
& + |||\exp(i\mu r)a\varphi|||_{1,\hat{s}-2,\mathbf{R}^3}) \\
\leq\ & c(||f||_{1,\hat{s},\Omega} + ||a||_{0,0,\Omega(\tilde{R})} \\
& + ||a||_{0,\hat{s}-1-\epsilon,\Omega}) \\
\leq\ & c||f||_{1,\hat{s},\Omega} + c(\tilde{R})||a||_{0,0,\Omega(\tilde{R})} \\
& + c\tilde{R}^{-\hat{t}+\hat{s}-1-\epsilon}||a||_{0,\hat{t},\Omega_{\tilde{R}}} \\
\leq\ & c(||f||_{1,\hat{s},\Omega} + ||a||_{0,0,\Omega(\tilde{R})}) \\
& + \frac{1}{2}||a||_{0,\hat{t},\Omega}.
\end{aligned}$$

Ergo

$$||a||_{0,\hat{t},\Omega} + |||\exp(i\mu r)a|||_{1,\hat{s}-2,\Omega_{\tilde{R}}} \leq c(||f||_{1,\hat{s},\Omega} + ||a||_{0,0,\Omega(\tilde{R})})$$

mit c unabhängig von σ, ω, a und f. Da $t < \hat{t}$ und $s > \hat{s}$ folgt schließlich

$$||a||_{0,t,\Omega} + ||| \exp(i\mu r)a|||_{1,\hat{s}-2,\Omega_{\tilde{R}}} \leq c(||f||_{1,s,\Omega} + ||a||_{0,0,\Omega(\tilde{R})}).$$

q.e.d.

Korollar 4.1 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.1 ohne die Zusatzbedingung $A = id$ erfüllt. Dann folgt mit $a := (M-\lambda)^{-1}f$ und $\tilde{a}_\pm = W(a_\pm \circ W)$ die a-priori-Abschätzung*

$$\begin{aligned} &||a||_{0,t,\Omega} + ||| \exp(i\mu \det(W) r)\tilde{a}|||_{1,\hat{s}-2,\widetilde{\Omega}_R} \\ &\leq c\left(||f||_{1,s,\Omega} + ||a||_{0,0,\Omega(R)}\right) \end{aligned}$$

mit einem $\hat{s} > \frac{1}{2}$ und $R > 0$.
Hierbei gilt wieder $W := A^{\frac{1}{2}}$ und $\widetilde{\Omega} := A^{-\frac{1}{2}}\Omega$.

Beweis
Durch Satz 4.1 und die Transformationseigenschaften aus Lemma 2.4 und Bemerkung 2.3 folgt sofort die Behauptung. **q.e.d.**

4.2 Lösungstheorie mittels des Prinzips der Grenzabsorption

Definition 4.1 (Der Lösungsbegriff) *Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein Außengebiet und $A_\pm$ Bedingung 1 erfüllende Matrizen. Ein $a \in D_{loc}(M)$ löst*

$$(M - \omega)a = f$$

mit einem $f \in \mathcal{D}_{0,loc}(\Omega)$, falls $(M-\omega)a = f$ im schwachen Sinne erfüllt ist und

1. *entweder $\omega \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ und $a \in \mathcal{R}(\Omega)$ gilt,*
2. *oder $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ gilt und $a \in H^0_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)^2$ die Strahlungsbedingungen*

$$\frac{x}{r} \wedge \tilde{a}_\pm \mp \sqrt{\frac{\gamma_\mp}{\gamma_\pm}}\tilde{a}_\mp \in H^0_{>-\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\Omega}\right)$$

   erfüllt.

Hierbei ist natürlich $\tilde{a}_\pm = W(a_\pm \circ W)$. Im zweiten Fall heißt a die Strahlungslösung zu $(M-\omega)a = f$.

Bemerkung 4.1 (Umformulierungen der Strahlungsbedingungen) *Transformiert man die Strahlungsbedingungen mittels Gleichung (2.6) nach Ω zurück, so ergeben sie sich folgende äquivalente Bedingungen:*

1. $\frac{W_{(\pm)}^{-1}X}{|W_{(\pm)}^{-1}X|} \wedge W_\pm a_\pm \mp W_\mp a_\mp \in H^0_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)$

2. $\det(W_\pm) W_\mp^{-1} W_\pm^{-1} \left(\frac{A_\pm^{-1}X}{|W_\pm^{-1}X|} \wedge a_\pm \right) \mp a_\mp \in H^0_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)$

3. $\det(W_\mp^{-1}) \frac{X}{|W_\mp^{-1}X|} \wedge W_\mp W_\pm a_\pm \mp a_\mp \in H^0_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)$

4. $\det(W_\pm^{-1}) W_\pm \left(\frac{X}{|W_\pm^{-1}X|} \wedge A_\pm a_\pm \right) \mp W_\mp a_\mp \in H^0_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)$

Hierbei kann man bei $(\pm)$ *sowohl* $+$ *als auch* $-$ *setzen. Wiederum sei* $X(x) := x$. *In dieser Bemerkung seien anders als im übrigen Text* $A_\pm := \gamma_\pm A$ *und* $W_\pm := A_\pm^{\frac{1}{2}}$.

Satz 4.2 (Eindeutige Lösbarkeit in $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$) *Das Problem* $(M-\omega)a = f$ *ist für alle* $\omega \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ *und* $f \in \mathcal{D}_0(\Omega)$ *eindeutig lösbar. Der Lösungsoperator ist stetig.*

Beweis
Da

$$\begin{array}{rcccc} M & : & D(M) \subset \mathcal{D}_0(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}_0(\Omega) \\ & & a & \longmapsto & Ma \end{array}$$

selbstadjungiert ist, existiert zu jedem $\omega \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ und $f \in \mathcal{D}_0(\Omega)$ genau ein $a \in D(M)$ mit $(M-\omega)a = f$. **q.e.d.**

Lemma 4.1 (Polynomiales und exponentielles Abklingen der Eigenlösungen)
Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ *ein Außengebiet,* $A_\pm$ *Matrizen, die die Bedingung 1 erfüllen,* $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ *und* a *die Strahlungslösung zu* $(M-\omega)a = 0$. *Dann gilt für alle* $m, t \in \mathbf{R}$ *und* Ξ *mit* $\overline{\Xi} \subset \Omega$

$$a \in H^2_m(\Xi)^2 \ \textit{und}\ \exp(tr)a \in H^1(\Xi)^2 .$$

Beweis
Aufgrund von Satz 3.1 und 3.2 reicht es $a \in H^0_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)^2$ zu zeigen. Dies folgt aus den Strahlungsbedingungen, denn für hinreichend große ρ gilt

$$\begin{aligned} \int_{S_\rho} \left|\frac{x}{r} \wedge \tilde{a}_+ - \sqrt{\frac{\gamma_-}{\gamma_+}}\tilde{a}_-\right|^2 do_x &= \int_{S_\rho} \left|\frac{x}{r} \wedge \tilde{a}_+\right|^2 + \frac{\gamma_-}{\gamma_+}|\tilde{a}_-|^2 \, do_x \\ &\quad -2\sqrt{\frac{\gamma_-}{\gamma_+}} \mathrm{Re} \int_{S_\rho} \underbrace{\left(\frac{x}{r} \wedge \tilde{a}_+\right)\overline{\tilde{a}}_-}_{=\frac{x}{r}(\tilde{a}_+ \wedge \overline{\tilde{a}}_-)} \, do_x \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.4 folgt $\tilde{a}_+ \in \overset{o}{R}_{loc}(\widetilde{\Omega})$ und deshalb mittels des Gaußschen Satzes und der Eigenwertgleichung

$$\int_{S_\rho} \frac{x}{r}(\tilde{a}_+ \wedge \overline{\tilde{a}}_-) \, do_x = \int_{\widetilde{\Omega}(\rho)} \mathrm{div}\,(\tilde{a}_+ \wedge \overline{\tilde{a}}_-) \, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\widetilde{\Omega}(\rho)} \text{rot }\tilde{a}_+ \,\overline{\tilde{a}}_- - \tilde{a}_+ \text{rot }\overline{\tilde{a}}_- \, dx \\
&= -i\omega \underbrace{\int_{\widetilde{\Omega}(\rho)} \tilde{A}_- \tilde{a}_- \overline{\tilde{a}}_- + \tilde{A}_+ \tilde{a}_+ \overline{\tilde{a}}_+ \, dx}_{\in \mathbf{R}} .
\end{aligned}
$$

Folglich

$$\text{Re} \int_{S_\rho} \frac{x}{r}(\tilde{a}_+ \wedge \overline{\tilde{a}}_-) \, do_x \;=\; 0$$

und damit

$$\frac{\gamma_-}{\gamma_+} \int_{S_\rho} |\tilde{a}_-|^2 \, do_x \;\leq\; \int_{S_\rho} |\frac{x}{r} \wedge \tilde{a}_+ - \sqrt{\frac{\gamma_-}{\gamma_+}} \tilde{a}_-|^2 \, do_x.$$

Multiplikation mit einer entsprechenden ρ-Potenz und Integration von ρ bis ∞ liefert $\tilde{a}_- \in H^0_{>-\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\Omega}\right)$ und mit der zweiten Strahlungsbedingung auch $\tilde{a}_+ \in H^0_{>-\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\Omega}\right)$. Die Rücktransformation ergibt $a \in H^0_{>-\frac{1}{2}}(\Omega)^2$. **q.e.d.**

Definition 4.2

$$\mathcal{P} := \{\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\} \;:\; (M-\omega)a = 0 \textit{ hat eine nichttriviale Lösung}\}$$

Für $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ sei weiterhin

$$\tilde{N}(M-\omega) := \{a \;:\; a \textit{ löst } (M-\omega)a = 0\}$$

Aus Lemma 4.1 folgt sofort

Bemerkung 4.2 *Für $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ gilt $N(M-\omega) = \tilde{N}(M-\omega)$.*

$\sigma_p(M)$ bezeichne das Punktspektrum des Operators M.

Bemerkung 4.3 *Im Falle $\alpha_\pm = 0$ in Ω_R für ein $R > 0$ folgt $\sigma_p(M) \subseteq \{0\}$ und $N(M-\omega) = \tilde{N}(M-\omega) = \{0\}$, falls $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$.*

Beweis
Aus $(M_A - \omega)a = 0$ folgt $(M_{\tilde{A}} - \omega)\tilde{a} = 0$. Nach Voraussetzung gilt $\tilde{\alpha}_\pm = 0$ in $\widetilde{\Omega}_{\tilde{R}}$ für ein $\tilde{R} > 0$. Folglich $-\Delta\tilde{a} - \mu^2 \det(A)\tilde{a} = 0$ in $\widetilde{\Omega}_{\tilde{R}}$ und nach Lemma 4.1 gilt $\tilde{a} \in L^2_s\left(\widetilde{\Omega}\right)^2$ für alle $s \in \mathbf{R}$. Die Rellichsche Abschätzung (siehe Leis ([6], S.59)) liefert $\tilde{a} = 0$ in $\widetilde{\Omega}_{\tilde{R}}$ für $\tilde{R}$ hinreichend groß und das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit (siehe Leis ([6], S.168)) $\tilde{a} = 0$ in $\widetilde{\Omega}$, also $a = 0$ in Ω. **q.e.d.**

Lemma 4.2 (Notwendige Bedingung zur Lösbarkeit) *Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein Außengebiet, $C_\pm$ reelle, symmetrische, beschränkte und gleichmäßig positiv definite $3 \times 3-$Matrizen, $\omega \in \mathbf{R}$, $s \in \mathbf{R}$, $a \in D_{loc}(M_C) \cap L^2_s(\Omega)^2$ sowie $M_C a \in L^2_s(\Omega)^2$. Dann gilt für alle $t \in \mathbf{R}$ mit $s + t \geq 0$ und alle $u \in D_{loc}(M_C) \cap L^2_t(\Omega)^2$ mit $M_C u \in L^2_t(\Omega)^2$*

$$\langle (M_C - \omega)a, u\rangle_C = \langle a, (M_C - \omega)u\rangle_C.$$

Beweis
Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R},[0,1])$ mit $\varphi|_{(-\infty,1)} = 1$ und $\varphi|_{(2,\infty)} = 0$. Mit $\varphi_R := \varphi(\frac{|\cdot|}{R})$ folgt, da a und u die Randbedingungen erfüllen,

$$\begin{array}{rcl} \langle (M_C-\omega)a, u\rangle_C & \longleftarrow & \langle (M_C-\omega)a, u\varphi_R\rangle_C \\ & = & \langle a\varphi_R, (M_C-\omega)u\rangle_C + \underbrace{\frac{1}{R}\langle ia, \varphi' \begin{pmatrix} \frac{x}{|x|}\wedge u_- \\ -\frac{x}{|x|}\wedge u_+ \end{pmatrix}\rangle_\Omega}_{|\cdot| \leq \frac{c}{R}||a||_{0,s,\Omega}||u||_{0,t,\Omega}\to 0} \\ & & \downarrow \\ & & \langle a, (M_C-\omega)u\rangle_C \end{array}$$

Die Integrale existieren nach Voraussetzung und die Konvergenzen folgen sofort aus dem Satz von Lebesgue. **q.e.d.**

Lemma 4.3 *Seien $N \in \mathbf{N}$, $t \in \mathbf{R}$ und $\Omega' \subset \Omega \subset \mathbf{R}^N$ zwei Gebiete. Gilt $a_n \rightharpoonup a$ in $L^2_t(\Omega)$ und $a_n \to b$ in $L^2_t(\Omega')$, so folgt $a = b$.*

Lemma 4.4 *Seien $N \in \mathbf{N}$, $t \in \mathbf{R}$ und $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ein Gebiet. Gilt $a_n \rightharpoonup a$ in $L^2_t(\Omega)$ und $a_n \rightharpoonup b$ in $L^2_{t_0}(\Omega)$ mit $t > t_0$, so folgt $a = b$.*

Lemma 4.5 *Seien $N \in \mathbf{N}$ und $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ein Außengebiet. Enthält $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ für alle R eine in $L^2(\Omega(R))$ konvergente Teilfolge, so enthält $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Teilfolge, die in $L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)$ konvergiert.*

Beweis
Nach wiederholter Teilfolgenauswahl und Übergang zur Diagonalfolge erhält man durch Lemma 4.3 eine Teilfolge, die für alle R in $L^2(\Omega(R))$ konvergiert. Dadurch wird ein $a \in L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)$ definiert, wogegen diese Teilfolge in $L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)$ konvergiert.
q.e.d.

Für den Existenzbeweis benötigt man nun noch dringend die Kompaktheitseigenschaft der beiden Inklusionen

$$\overset{o}{R}(B) \cap A_+^{-1} D(B) \hookrightarrow L^2(B) \tag{4.2}$$

$$R(B) \cap A_-^{-1} \overset{o}{D}(B) \hookrightarrow L^2(B) \tag{4.3}$$

in beschränkten Gebieten $B \subset \mathbf{R}^3$. Im Falle glatter Ränder kann man diese Aussagen auf den Rellichschen Auswahlsatz (siehe Leis ([6], S.154-157)) reduzieren, bei nichtglatten Rändern treten jedoch nicht unerhebliche Schwierigkeiten auf. Der erste Beweis für eine bestimmte Klasse von Gebieten mit nichtglatten Rändern wurde von Weck [13] gegeben. Einfachere Beweise für Gebiete mit *Kegeleigenschaft* (siehe auch Leis ([6], S.15 und 165)) wurden von Weber [11] und Picard [8] aufgezeigt. Eine weitere Verallgemeinerung findet man bei Witsch [16] für Gebiete mit *Spitzeneigenschaft*.

Definition 4.3 *Ein beschränktes Gebiet B habe die* Kompaktheitseigenschaft*, falls die Abbildungen (4.2) und (4.3) kompakt sind. Ein Außengebiet Ω habe die* Kompaktheitseigenschaft*, falls für alle $R > 0$ mit $\mathbf{R}^3 \backslash \Omega \subset\subset U(0,R)$ die Abbildungen*

$$\overset{o}{R}(\Omega(R)) \cap A_+^{-1} D(\Omega(R)) \longrightarrow L^2(\Omega(R))$$

$$R(\Omega(R)) \cap A_-^{-1} \overset{o}{D}(\Omega(R)) \longrightarrow L^2(\Omega(R))$$

kompakt sind. Dies ist z. B. für Gebiete mit Kegeleigenschaft erfüllt.

Nun kann das Hauptresultat dieser Arbeit formuliert werden. Die Ideen dazu stammen aus einer Arbeit von Weck, Witsch [14].

Satz 4.3 (Fredholmsche Alternative) *Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein Außengebiet mit Kompaktheitseigenschaft und $A_\pm$Matrizen, die die Bedingung 2 erfüllen. Dann folgt:*

i) $\mathcal{P}$ hat keinen Häufungspunkt in $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

ii) $N(M-\omega) = \tilde{N}(M-\omega)$ sind für $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ endlichdimensional.

iii) Für alle $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ und $f \in H^1_{>\frac{1}{2}}(\Omega)^2 \cap \mathcal{D}_0(\Omega)$ ist $(M-\omega)a = f$ genau dann lösbar, wenn $f \in \tilde{N}(M-\omega)^{\perp_A}$[1] gilt.
a kann dann so gewählt werden, daß $a \in \tilde{N}(M-\omega)^{\perp_A}$ gilt.

Beweis
Wären i) oder ii) falsch, so existierten Folgen $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}\backslash\{0\}$ und $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset D(M)$ mit $\omega_n \to \omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ und $(M-\omega_n)a_n = 0$, denn nach Lemma 4.1 gilt $a_n \in L^2_m(\Omega)^2$ für alle $m \in \mathbf{R}$. Da im Falle i) Eigenlösungen zu verschiedenen Eigenwerten aufeinander senkrecht stehen oder im Falle ii) $\dim \tilde{N}(M-\omega) = \infty$ gilt, kann man O.B.d.A. annehmen, daß (a_n) ein Orthonormalsystem in $L^2_A(\Omega)$ bildet und deshalb $a_n \rightharpoonup 0$ in $L^2_A(\Omega)$ folgt. Damit folgt auch $a_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(\Omega)^2$ und die Beschränktheit von (a_n) in $L^2(\Omega)^2$. Sei nun $R > 0$ mit $\mathbf{R}^3\backslash\Omega \subset\subset U(0,R)$ und $\varphi \in C^\infty_o(\mathbf{R}^3)$ mit $\varphi|_{\Omega(R)} = 1$ und $\varphi|_{\Omega_{R+1}} = 0$. Da (a_n) an $\partial\Omega$ die Randbedingungen erfüllt, gilt nun

$$a_n\varphi \in \left[\overset{o}{R}(\Omega(R+1)) \times R(\Omega(R+1))\right] \cap \left[A_+^{-1} D(\Omega(R+1)) \times A_-^{-1} \overset{o}{D}(\Omega(R+1))\right].$$

Aufgrund der Kompaktheitseigenschaft von $\Omega(R+1)$ folgt die Konvergenz einer Teilfolge $a_{\pi(n)}\varphi$ in $L^2(\Omega(R+1))^2$, denn $(a_n\varphi)$, $(\operatorname{rot}(a_n\varphi))$ und $(\operatorname{div}(A_\pm a_n^\pm\varphi))$ sind in $L^2(\Omega(R+1))^2$ beschränkt. Also konvergiert $a_{\pi(n)}$ in $L^2(\Omega(R))^2$. Lemma 4.5 liefert also O.B.d.A., daß (a_n) in $L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)^2$ gegen ein $a \in L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)^2$ konvergiert. Lemma 4.3 liefert $a_n \to 0$ in $L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)^2$ und Korollar 3.1 mit einem $R > 0$

$$||a_n||_{0,0,\Omega} \le c||a_n||_{0,0,\Omega(R)} \to 0.$$

[1]Mit $\perp_A$ wird hier das orthogonale Komplement bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ in $L^2_A(\Omega)$ bezeichnet.

Somit folgt
$$1 = ||a_n||_{A,0,0,\Omega} \leq c||a_n||_{0,0,\Omega} \to 0,$$
ein Widerspruch. □
Zu iii): Aufgrund von Lemma 4.1 und 4.2 ist die Bedingung $f \in \tilde{N}(M-\omega)^{\perp_A}$ natürlich notwendig für die Lösbarkeit. Sei nun $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$,
$$(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset H_s^1(\Omega)^2 \cap \mathcal{D}_0(\Omega)$$
mit einem $s > \frac{1}{2}$ und $f_n \to f$ in $H_s^1(\Omega)^2$, sowie
$$f_n \in \tilde{N}(M-\omega)^{\perp_A}. \tag{4.4}$$
$(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sei eine positive Nullfolge und $\lambda_n := \omega + i\sigma_n$. Dann existieren eindeutige $a_n \in D(M)$ mit
$$(M-\lambda_n)a_n = f_n. \tag{4.5}$$
Angenommen es gibt ein $t_0 < -\frac{1}{2}$, so daß $||a_n||_{0,t_0,\Omega}$ beschränkt ist. Damit wären dann $||a_n||_{0,0,\Omega(R)}$ und wegen der Differentialgleichung (4.5) auch $||\text{rot } a_n||_{0,0,\Omega(R)}$ für alle $R > 0$ beschränkt. Wie im ersten Teil des Beweises folgt O.B.d.A.
$a_n \to a$ in $L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)^2$. Wegen
$$\begin{aligned}
||M(a_n - a_m)||_{0,0,\Omega(R)} &= ||\lambda_n a_n - \lambda_m a_m + f_n - f_m||_{0,0,\Omega(R)} \\
&\leq |\lambda_n| \cdot ||a_n - a_m||_{0,0,\Omega(R)} + |\lambda_n - \lambda_m| \cdot ||a_m||_{0,0,\Omega(R)} \\
&\quad + ||f_n - f_m||_{0,0,\Omega(R)} \\
&\quad \longrightarrow 0
\end{aligned}$$
folgt die Konvergenz von (Ma_n) in $L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)^2$, d. h. (a_n) konvergiert in $R_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)^2$.

Um zu zeigen, daß a die Randbedingungen erfüllt, sei $\varphi \in C_o^\infty(\mathbf{R}^3)$ und $\Phi \in R(\Omega)$. Dann gilt
$$\begin{aligned}
\langle \text{rot } (a^+\varphi), \Phi\rangle_\Omega &= \langle \varphi \text{rot } a^+, \Phi\rangle_\Omega + \langle \nabla\varphi \wedge a^+, \Phi\rangle_\Omega \\
&\quad \uparrow \\
&\quad \langle \text{rot } a_n^+, \varphi\Phi\rangle_\Omega + \langle \nabla\varphi \wedge a_n^+, \Phi\rangle_\Omega \\
&= \langle a_n^+, \text{rot } (\varphi\Phi)\rangle_\Omega + \langle \nabla\varphi \wedge a_n^+, \Phi\rangle_\Omega \qquad (4.6)\\
&= \langle a_n^+\varphi, \text{rot } \Phi\rangle_\Omega \\
&\quad \downarrow \\
&\quad \langle a^+\varphi, \text{rot } \Phi\rangle_\Omega
\end{aligned}$$
Zeile (4.6) gilt, da $a_n \in D(M)$. Es folgt also $a^+ \in \overset{o}{R}_{loc}(\Omega)$, d. h.
$$a \in \mathcal{R}_{loc}(\Omega).$$

Sei nun $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$. Da $a_n \in D(M)$ ist, ergibt sich

$$\langle A_\pm a^\pm, \nabla\varphi\rangle_\Omega \;\leftarrow\; \langle A_\pm a_n^\pm, \nabla\varphi\rangle_\Omega \;=\; 0.$$

Ergo

$$a \in A_+^{-1} D_{0,loc}(\Omega) \times A_-^{-1} D_{0,loc}(\Omega).$$

Sei $\varphi \in C_o^\infty(\mathbf{R}^3)$ und $\Phi \in H^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\langle A_- a^- \varphi, \nabla\Phi\rangle_\Omega &\leftarrow \langle A_- a_n^- \varphi, \nabla\Phi\rangle_\Omega \\
&= \langle A_- a_n^-, \nabla(\Phi\varphi)\rangle_\Omega - \langle A_- a_n^-, \Phi\nabla\varphi\rangle_\Omega \\
&= \langle \underbrace{\operatorname{div}(A_- a_n^-)}_{=0}, \Phi\varphi\rangle_\Omega - \langle A_- a_n^- \nabla\varphi, \Phi\rangle_\Omega \qquad (4.7) \\
&\quad \downarrow \\
&\quad -\langle A_- a^- \nabla\varphi, \Phi\rangle_\Omega
\end{aligned}$$

In Zeile (4.7) wurde wiederum $a_n \in D(M)$ benutzt. Es folgt also
$a^- \in A_-^{-1} \overset{o}{D}_{loc}(\Omega)$ und somit

$$a \in D_{loc}(M).$$

Weiterhin erhält man natürlich

$$\begin{array}{ccccc}
(M-\lambda_n)a_n & = & f_n & & \\
\downarrow & & \downarrow & & in\ L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)^2 \\
(M-\omega)a & & f, & &
\end{array}$$

d. h. $(M-\omega)a = f$ in Ω.
Desweiteren gelte O.B.d.A. $a_n \rightharpoonup b$ in $L^2_{t_0}(\Omega)^2$. Lemma 4.3 liefert $a_n \rightharpoonup a$ in $L^2_{t_0}(\Omega)^2$, woraus

$$a \in D_{loc}(M) \cap L^2_{t_0}(\Omega)^2$$

folgt. Sei nun $u \in \tilde{N}(M-\omega)$ beliebig. Mit Lemma 4.1 folgt $u, Mu \in L^2_s(\Omega)^2$ für alle $s \in \mathbf{R}$. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \langle f_n, u\rangle_A \\
&= \langle (M-\omega)a_n - i\sigma_n a_n, u\rangle_A \\
&= -i\sigma_n \langle a_n, u\rangle_A. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Zeile (4.8) folgt aus Lemma 4.2. Da $(\sigma_n) \subset \mathbf{R}^+$ ist, erhält man

$$a_n \in \tilde{N}(M-\omega)^{\perp_A}.$$

Aufgrund des polynomialen Abklingens von u ist $\langle\cdot,u\rangle_A$ ein stetiges lineares Funktional auf $L^2_{t_0}(\Omega)^2$ und somit

$$0 \;=\; \langle a_n, u\rangle_A \to \langle a,u\rangle_A,$$

d. h.

$$a \in \tilde{N}(M-\omega)^{\perp_A}.$$

Sei nun $T>0$, $t<-\frac{1}{2}$ und O.B.d.A. $s\leq 1$. Mit

$$\begin{aligned}\lambda_n^2 &= \omega^2-\sigma_n^2+2i\omega\sigma_n\\ &= \omega^2-\sigma_n^2+\frac{2i\omega\sigma_n}{\sqrt{\omega^2-\sigma_n^2}}\sqrt{\omega^2-\sigma_n^2},\end{aligned}$$

falls n hinreichend groß ist, folgt nach Korollar 4.1

$$\begin{gathered}||a||_{0,t,\Omega(T)}+\sum_{l\in\{+,-\}}||\mathrm{rot}\;(\exp(i\mu\det(W)r)\tilde{a}^l)||_{0,\hat{s}-1,\tilde{\Omega}_R^T}\\ \uparrow \qquad n\to\infty\\ ||a_n||_{0,t,\Omega(T)}+\sum_{l\in\{+,-\}}||\mathrm{rot}\;(\exp(i\sqrt{\gamma_+\gamma_-}\det(W)\sqrt{\omega^2-\sigma_n^2}r)\tilde{a}_n^l)||_{0,\hat{s}-1,\tilde{\Omega}_R^T}\\ \leq\; c\left(||a_n||_{0,t,\Omega}+|||\exp(i\sqrt{\gamma_+\gamma_-}\det(W)\sqrt{\omega^2-\sigma_n^2}r)\tilde{a}_n|||_{1,\hat{s}-2,\tilde{\Omega}_R}\right)\\ \leq\; c(||f_n||_{1,s,\Omega}+||a_n||_{0,0,\Omega(R)})\\ \downarrow \qquad n\to\infty\\ c(||f||_{1,s,\Omega}+||a||_{0,0,\Omega(R)})\end{gathered}$$

Da c unabhängig von a_n, f_n und σ_n, sowie $T>0$ beliebig ist, folgt

$$a\in H^0_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)^2$$

und

$$\begin{aligned}H^0_{\hat{s}-1}\left(\tilde{\Omega}\right) &\ni \mathrm{rot}\;(\exp(i\det(W)\mu r)\tilde{a}^{\pm})\\ &= \exp(i\det(W)\mu r)[\mathrm{rot}\;\tilde{a}^{\pm}+i\det(W)\mu\frac{x}{r}\wedge\tilde{a}^{\pm}]\\ &= \exp(i\det(W)\mu r)[\mp i\omega\gamma_{\mp}\det(W)\tilde{a}^{\mp}\mp i\omega\tilde{\alpha}_{\mp}\tilde{a}^{\mp}\\ &\quad \mp i\tilde{A}_{\mp}\tilde{f}^{\mp}+i\det(W)\mu\frac{x}{r}\wedge\tilde{a}^{\pm}].\end{aligned}$$

Aufgrund der Abklingeigenschaften der $\tilde{\alpha}_{\pm}$ und der Integrierbarkeitsbedingung der $\tilde{f}^{\pm}$ folgt

$$\mp i\omega\gamma_{\mp}\det(W)\tilde{a}^{\mp}+i\det(W)\mu\frac{x}{r}\wedge\tilde{a}^{\pm}\;\;\in\;\; H^0_{\hat{s}-1}\left(\tilde{\Omega}\right)$$

und somit

$$\frac{x}{r} \wedge \tilde{a}^{\pm} \mp \sqrt{\frac{\gamma_{\mp}}{\gamma_{\pm}}} \tilde{a}^{\mp} \quad \in \quad H^0_{\hat{s}-1}\left(\widetilde{\Omega}\right).$$

Da $\hat{s} - 1 > -\frac{1}{2}$ ist, erfüllt a also die Strahlungsbedingungen. Folglich löst a

$$(M - \omega)a = f$$

im Sinne von Definition 4.1 und es gilt

$$a \in \tilde{N}(M - \omega)^{\perp_A}.$$

Um den Beweis zu beenden sei nun für alle $t < -\frac{1}{2}$

$$||a_n||_{0,t,\Omega}$$

unbeschränkt. O.B.d.A. sei $||a_n||_{0,t_0,\Omega} \to \infty$ mit einem $t_0 < -\frac{1}{2}$. Mit den Definitionen

$$b_n := \frac{a_n}{||a_n||_{0,t_0,\Omega}} \qquad \text{und} \qquad g_n := \frac{f_n}{||a_n||_{0,t_0,\Omega}}$$

folgt $||b_n||_{0,t_0,\Omega} = 1$ und $||g_n||_{1,s,\Omega} \to 0$ sowie

$$(M - \lambda_n)b_n \;=\; g_n.$$

Analog zum obigen Beweis erhält man $b_n \rightharpoonup b$ in $H^0_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)^2$ und, daß b

$$(M - \omega)b = 0$$

mit $b \in \tilde{N}(M - \omega)^{\perp_A}$ löst. Damit gilt $b \in \tilde{N}(M - \omega) \cap \tilde{N}(M - \omega)^{\perp_A}$, d. h. $b = 0$. Desweiteren folgt $b_n \to 0$ in $L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)^2$. Schließlich liefert Korollar 4.1

$$1 \;=\; ||b_n||_{0,t_0,\Omega} \;\leq\; c\left(||g_n||_{1,s,\Omega} + ||b_n||_{0,0,\Omega(R)}\right) \;\to 0,$$

offensichtlich ein Widerspruch.
Mit $f_n := f$ folgt nun die Existenz einer Lösung in iii). **q.e.d.**

Kapitel 5

Verbesserungen nach dem Diplom

5.1 Einige weitere Sätze

Hier werden die Sätze 2.2 und 2.3 sowie die Korollare 2.4, 2.5 und 2.6 verallgemeinert. Desweiteren wird eine Version von Satz 3.1 für komplexe ω bewiesen.

Satz 5.1 (Regularität im $\mathbf{R}^3$) *Seien $k \in \mathbf{N}$ und $C \in C^{k+1}(\mathbf{R}^3)$ eine die Grundvoraussetzung erfüllende matrixwertige Funktion.*
Gilt desweiteren $a, \mathrm{rot}\ a, \mathrm{div}\ Ca \in H^k(\mathbf{R}^3)$, so folgt $a \in H^{k+1}(\mathbf{R}^3)$ und es existiert eine Konstante $c > 0$ unabhängig von a mit

$$||a||_{k+1,0,\mathbf{R}^3} \ \leq \ c\,(||a||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{rot}\ a||_{k,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{div}\ Ca||_{k,0,\mathbf{R}^3})\,.$$

Beweis
Satz 2.2 liefert den Induktionsanfang. Für den Schritt seien $C \in C^{k+2}(\mathbf{R}^3)$ und $a, \mathrm{rot}\ a, \mathrm{div}\ Ca \in H^{k+1}(\mathbf{R}^3)$. Für $j \in \{1,2,3\}$ folgt dann
$\partial_j a, \mathrm{rot}\ \partial_j a, \mathrm{div}\ C\partial_j a \in H^k(\mathbf{R}^3)$, da $\mathrm{div}\ C\partial_j a \ = \ \partial_j \mathrm{div}\ Ca - \mathrm{div}\ (\partial_j C)a$ gilt.

Die Induktionsbehauptung liefert $\partial_j a \in H^{k+1}(\mathbf{R}^3)$, d. h. $a \in H^{k+2}(\mathbf{R}^3)$. Zusätzlich erhält man

$$\begin{aligned} ||\partial_j a||_{k+1,0,\mathbf{R}^3} &\leq c\,(||\partial_j a||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{rot}\ \partial_j a||_{k,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{div}\ C\partial_j a||_{k,0,\mathbf{R}^3}) \\ &\leq c\,(||a||_{k+1,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{rot}\ a||_{k+1,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{div}\ Ca||_{k+1,0,\mathbf{R}^3}) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} ||a||_{k+2,0,\mathbf{R}^3} &\leq c\,(||a||_{k+1,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{rot}\ a||_{k+1,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{div}\ Ca||_{k+1,0,\mathbf{R}^3}) \\ &\leq c\,(||a||_{0,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{rot}\ a||_{k+1,0,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{div}\ Ca||_{k+1,0,\mathbf{R}^3}) \end{aligned}$$

q.e.d.

Analog zu den Korollaren 2.4, 2.5 und 2.6 beweist man leicht

Korollar 5.1 *Seien $s \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, $C \in C^{k+1}(\mathbf{R}^3)$ eine die Grundvoraussetzung erfüllende Matrix und $a, \mathrm{rot}\ a, \mathrm{div}\ Ca \in H_s^k(\mathbf{R}^3)$. Dann gilt $a \in H_s^{k+1}(\mathbf{R}^3)$ und die Abschätzung*

$$||a||_{k+1,s,\mathbf{R}^3} \leq c\left(||a||_{0,s,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{rot}\ a||_{k,s,\mathbf{R}^3} + ||\mathrm{div}\ Ca||_{k,s,\mathbf{R}^3}\right).$$

Korollar 5.2 (Regularität in Außengebieten) *Seien $k \in \mathbf{N}$, Ω_i zwei Gebiete im $\mathbf{R}^3$ mit $\Omega_1 \subset \Omega_2$ und $\mathrm{dist}\,(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2) > 0$ sowie $C \in C^{k+1}(\Omega_2)$ eine Matrix, die die Grundvoraussetzung erfüllt. Desweiteren seien $a, \mathrm{rot}\ a, \mathrm{div}\ Ca \in H_s^k(\Omega_2)$ mit einem $s \in \mathbf{R}$. Dann folgt $a \in H_s^{k+1}(\Omega_1)$ und es existiert eine positive Konstante $c > 0$, so daß*

$$||a||_{k+1,s,\Omega_1} \leq c\left(||a||_{0,s,\Omega_2} + ||\mathrm{rot}\ a||_{k,s,\Omega_2} + ||\mathrm{div}\ Ca||_{k,s,\Omega_2}\right).$$

Bemerkung 5.1 *Korollar 5.2 liefert sofort eine viel allgemeinere Version von Satz 2.3. Man muß dort also weder eine spezielle Form der Koeffizientenmatrizen noch verschwindende Divergenz der Lösung fordern.*

Satz 5.2 (Polynomiales Abklingen) *Seien $s > m \in \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein Außengebiet und $A_\pm$ Matrizen, die die Bedingung 1 erfüllen.*
Desweitern löse $a \in R_{loc}(\Omega)^2 \cap \left[A_+^{-1}D_{0,loc}(\Omega) \times A_-^{-1}D_{0,loc}(\Omega)\right] \cap H_m^0(\Omega)^2$ die Gleichung $(M - i\omega)a = f$ mit einem $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ und $f \in H_s^1(\Omega)^2$. Dann gilt $a \in H^2_{\frac{[s-m-1]}{2}+m}(\Xi)^2$ für alle Ξ mit $\overline{\Xi} \subset \Omega$ und es existieren $R > 0$ und $c = c(\Omega, m, s, R) > 0$, so daß

$$||a||_{2,\frac{[s-m-1]}{2}+m,\Omega_R} \leq c(||a||_{0,m,\Omega} + ||f||_{1,s,\Omega})$$

gilt.

Beweis
Gleichung (3.7) ließt sich nun

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\rho} \sum_{l=1}^{3} |\partial_l b_\pm|^2 + \mu^2 |b_\pm|^2\ dx \quad &\leq \quad \delta(\rho) \int_{\Omega_{\rho-1}} B\ dx + c\int_{S_\rho} B\ do_x \\ &\quad +c\int_{\Omega_\rho} F r^m |b_\pm|\ dx + c||f||^2_{1,m,\Omega_{\rho-1}}.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun analog zum Beweis von Satz 3.1. **q.e.d.**

5.2 Verschärfung des Hauptresultates

Nun wird das Hauptresultat Satz 4.3 wesentlich verbessert, indem die störende Voraussetzung $f \in H^1_{>\frac{1}{2}}(\Omega)^2$ durch die natürlichere $f \in H^0_{>\frac{1}{2}}(\Omega)^2$ ersetzt werden kann. Die Idee hierzu stammt von Herrn Witsch.

Satz 5.3 (Fredholmsche Alternative) *Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein Außengebiet mit Kompaktheitseigenschaft und $A_\pm$Matrizen, die die Bedingung 2 erfüllen. Dann folgt:*

i) *$\mathcal{P}$ hat keinen Häufungspunkt in $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.*

ii) *$\tilde{N}(M-\omega)$ sind für $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ endlichdimensional.*

iii) *Für alle $\omega \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ und $f \in H^0_{>\frac{1}{2}}(\Omega)^2 \cap \mathcal{D}_0(\Omega)$ ist $(M-\omega)a = f$ genau dann lösbar, wenn $f \in \tilde{N}(M-\omega)^{\perp_A}$ gilt.*
a kann dann so gewählt werden, daß $a \in \tilde{N}(M-\omega)^{\perp_A}$ gilt.

Beweis
Mit einem festen Ξ, welches $\overline{\Xi} \subset \Omega$ erfüllt ($\Xi := \operatorname{supp}\varphi$ in Satz 4.1), überlegt man sich leicht folgende drei Modifikationen :

1. Modifikation von Satz 4.1 :

$$\begin{aligned} &||(M-\lambda)^{-1}f||_{0,t,\Omega} + |||\exp(i\mu r)(M-\lambda)^{-1}f|||_{1,\hat{s}-2,\Omega_R} \\ &\leq\ c\left(||f||_{0,s,\Omega} + ||f||_{1,s,\Xi} + ||(M-\lambda)^{-1}f||_{0,0,\Omega(R)}\right) \end{aligned}$$

2. Modifikation von Korollar 4.1 :

$$\begin{aligned} &||a||_{0,t,\Omega} + |||\exp(i\mu\det(W)r)\tilde{a}|||_{1,\hat{s}-2,\widetilde{\Omega}_R} \\ &\leq\ c\left(||f||_{0,s,\Omega} + ||f||_{1,s,\Xi} + ||a||_{0,0,\Omega(R)}\right) \end{aligned}$$

3. Modifikation von Satz 4.3 iii) :
$f \in H^1_{>\frac{1}{2}}(\Omega)^2 \cap \mathcal{D}_0(\Omega)$ geht über in $f \in H^0_{>\frac{1}{2}}(\Omega)^2 \cap H^1_{>\frac{1}{2}}(\Xi)^2 \cap \mathcal{D}_0(\Omega)$

Sei nun $f \in H^0_{>\frac{1}{2}}(\Omega)^2 \cap \mathcal{D}_0(\Omega) \cap \tilde{N}(M-\omega)^{\perp_A}$, d. h. $f \in L^2_s(\Omega)^2$ mit einem o.B.d.A. $\frac{1}{2} < s \leq 1$.

Es folgt $b := (M-i)^{-1}f \in D(M) \cap H^1(\Xi)^2$ und

$$(M-i)(r^s b) \;=\; \underbrace{r^s\underbrace{(M-i)b}_{=f}}_{\in L^2(\Omega_1)^2} \;+\; \underbrace{isr^{s-1}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -A_+^{-1} \\ A_-^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{X}{r}\wedge b_+ \\ \frac{X}{r}\wedge b_- \end{pmatrix}}_{\in L^2(\Omega_1)^2}}_{\in L^2(\Omega_1)^2,\ da\ s-1\leq 0} =: g.$$

Da $g \in L^2(\Omega_1)^2$ ist, findet sich ein $\hat{b} \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ mit $(M-i)\hat{b} = g$, d. h.

$$(M-i)(r^s b - \hat{b}) = 0.$$

Folglich erhält man
$r^s b - \hat{b} \in \left[A_+^{-1}D_{0,loc}(\Omega_1) \times A_-^{-1}D_{0,loc}(\Omega_1)\right] \cap R_{loc}(\Omega_1)^2 \cap H^0_{-s}(\Omega_1)^2$ und somit auch

$\operatorname{rot}(r^s b - \hat{b}) \in H^0_{-s}(\Omega_1)^2$. Aus Korollar 5.2 folgt $r^s b - \hat{b} \in H^2_{-s}(G)^2$ für alle G mit $\overline{G} \subset \Omega_1$. Satz 5.2 liefert $r^s b - \hat{b} \in L^2(\Omega_1)^2$ und somit $b \in H^0_s(\Omega)^2$. Korollar 2.6 liefert $b \in H^1_s(\Xi)^2$. Schließlich folgt

$$b \in D(M) \cap H^0_{>\frac{1}{2}}(\Omega)^2 \cap H^1_{>\frac{1}{2}}(\Xi)^2 \cap \tilde{N}(M-\omega)^{\perp_A},$$

denn für $u \in \tilde{N}(M-\omega)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f, u\rangle_A \\ &= \langle (M-i)b, u\rangle_A \\ &= \langle (M-\omega)b, u\rangle_A + (\omega - i)\langle b, u\rangle_A \\ &= \underbrace{(\omega - i)}_{\neq 0}\langle b, u\rangle_A. \end{aligned}$$

Mittels Modifikation 3 findet sich ein $d \in D_{loc}(M) \cap H^0_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)^2 \cap \tilde{N}(M-\omega)^{\perp_A}$, welches die Strahlungsbedingungen und $(M-\omega)d = (\omega - i)b$ erfüllt. Dann löst $a := d + b$ das Problem $(M-\omega)a = f$, denn $a \in D_{loc}(M) \cap H^0_{<-\frac{1}{2}}(\Omega)^2 \cap \tilde{N}(M-\omega)^{\perp_A}$ erfüllt die Strahlungsbedingungen und es gilt

$$\begin{aligned} (M-\omega)a &= (M-\omega)d + (M-\omega)b \\ &= (M-\omega)d + (M-i)b + (i-\omega)b \\ &= f. \end{aligned}$$

q.e.d.

Bemerkung 5.2 *Stellt man in Satz 5.3 die Zusatzvoraussetzung, daß Ω ein C^1-Gebiet sei, so braucht man die drei Modifikationen nicht vorzunehmen. Dann erhält man nämlich mit Satz 2.1 $b \in H^1_{>\frac{1}{2}}(\Omega)^2$ und kann somit Satz 4.3 iii) sofort anwenden.*

Literaturverzeichnis

[1] Agmon, Sh., *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, van Nostrand, New York, (1965).

[2] Eidus, D.M., "The Principle of Limiting Absorption", *Math. Sb.* 57 (99) (1962), 13-44 und *AMS Transl.* 47 (2) (1965), 157-191.

[3] Eidus, D.M., "On the spectra and eigenfunctions of the Schrödinger and Maxwell operators", *J. Math. Anal. Appl.*, 106, (1985), 540-568.

[4] Jawtusch, H., "Zur Theorie der zeitunabhängigen Maxwellschen Gleichungen im Außengebiet mit anisotropen inhomogenen Medien", *Diplomarbeit*, Universität Bonn, (1975).

[5] Lander, M., "Das Dirichletsche Randwertproblem zur Helmholtzschen Schwingungsgleichung mit Inhomogenitäten bei Unendlich", *Diplomarbeit*, Uni.-GHS-Essen, (1997).

[6] Leis, R., *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics*, Teubner, Stuttgart, (1986).

[7] Leis, R., "Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien", *Math. Z.*, 106, (1968), 213-224.

[8] Picard, R., "An elementary proof for a compact imbedding result in generalized electromagnetic theory", *Math. Z.*, 187, (1984), 151-164.

[9] Rellich, F., "Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten", *Jahresb. Dt. Math.-Verein.*, 53, (1943), 57-65.

[10] Vogelsang, V., "Die absolute Stetigkeit des positiven Spektrums der Schwingungsgleichung mit oszillierendem Hauptteil", *Math. Z.*, 181, (1983), 201-213.

[11] Weber, C., "A local compactness theorem for Maxwell's equations", *Math. Meth. in the Appl. Science*, 2, (1980), 12-25.

[12] Weber, C., "Regularity Theorems for Maxwell's Equations", *Math. Meth. in the Appl. Science*, 3, (1981), 523-536.

[13] Weck, N., "Maxwell's boundary value problems on Riemannian manifolds with nonsmooth boundaries", *J. Math. Anal. Appl.*, 46, (1974), 410-437.

[14] Weck, N., Witsch, K.J., "Generalized Linear Elasticity in Exterior Domains I", *Math. Meth. in the Appl. Science*, (to appear).

[15] Wilcox, C.H., *"Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains"*, Lecture Notes in Mathematics, 442, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1975).

[16] Witsch, K.J., "A remark on a compactness result in electromagnetic theory", *Math. Meth. in the Appl. Science*, 16, (1993), 123-129.

[17] Yee, K.S., "Uniqueness Theorems for an Exterior Electromagnetic Field", *Siam J. Appl. Math.*, 18, (1970), 77-83.