Appell an die wissenschaftliche Ehrlichkeit:
Schreiben Sie Ihre Programme und Diskussion eigenständig!

Computational Physics
Sommersemester 2024
Blatt 5, Abgabe: Montag, 27. Mai, 8:00

Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. A. Bäcker

Differentialgleichungen II: SIR-Modell

Aufgabe 5.1: **(16 Punkte)**

Simulieren Sie den Verlauf einer Epidemie mit Hilfe des einfachen SIR-Modells! Lösen Sie dazu das folgende Differentialgleichungssystem numerisch:

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta S(t) I(t) \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \beta S(t) I(t) - \gamma I(t) \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma I(t) \ . \tag{3}$$

Dabei ist S der Anteil der ansteckbaren Personen (susceptible), I der Anteil der infizierten Personen (infected) und R der Anteil der genesenen oder gestorbenen Personen (removed), so dass $S + I + R = 1$. Der Parameter β ist die Wahrscheinlichkeit der Übertragung und γ ist der Anteil der Personen, die an einem Tag genesen. Aus diesen Parametern ergibt sich die Basisreproduktionszahl $\mathcal{R}_0 = \beta/\gamma$.
Verwenden Sie als Parameter zunächst $\beta = \beta_0 = 0{,}5$ und $\gamma = 0{,}1$. Betrachten Sie den Fall, dass zur Zeit $t = 0$ genau eine Person infiziert ist (und noch keine genesen/verstorben sind) bei einer Gesamtpopulation von 80.000.000.

- Stellen Sie den Verlauf von S, I und R in Abhängigkeit von der Zeit t nach Beginn der Pandemie mit verschiedenen Farben grafisch in einem Plotbereich dar. Betrachten Sie Zeiten bis $t = 150$.

  Variieren Sie β, um ein Gefühl für die Abhängigkeit der Lage und der Höhe des Maximums von $I(t)$ zu erhalten.

- Gehen Sie nun davon aus, dass maximal 10% der Menschen infiziert sein dürfen, damit das Gesundheitssystem nicht überlastet wird. Stellen Sie in einem zweiten Plotbereich den maximalen Anteil infizierter Personen in Abhängigkeit von $\mathcal{R}_0$ dar. Fixieren Sie dazu γ und variieren Sie β von 0,11 bis 0,5. Stellen Sie zum Vergleich im selben Plot die Belastbarkeitsgrenze grafisch dar.

- Berücksichtigen Sie nun die Einführung eines Lockdown am Tag $t_{\text{hammer}} = 20$, durch den β zunächst auf $\beta_{\text{hammer}} = 0{,}3\beta_0$ sinkt und das anschließende Lockern am Tag $t_{\text{dance}} = 60$, durch das ein Anstieg von β auf $\beta_{\text{dance}} = 0{,}5\beta_0$ erfolgt. Stellen Sie den daraus resultierenden Verlauf von S, I und R für $\beta_0 = 0{,}5$ zusätzlich im ersten Plotbereich dar.

- Diskutieren Sie in einem Kommentar am Ende des Programms:
  (a) Beschreiben Sie, wie β die Lage und Höhe des Maximums von $I(t)$ beeinflusst. Wie ändern β und γ die Steigungen von $I(t)$ in der halb-logarithmischen Darstellung (Taste `l` im Matplotlib Fenster)?
  (b) Lesen Sie grafisch ab, bei welchem Wert von $\mathcal{R}_0$ das Gesundheitssystem gerade noch nicht überlastet ist.
  (c) Beschreiben Sie die Auswirkungen des simulierten Lockdowns auf den Verlauf der Pandemie. Welche Auswirkungen hätte das vollständige Aufheben der Maßnahmen anstelle einer Lockerung?

Vorgaben und Hinweise:

- Verwenden Sie wie bereits auf Blatt 4 die Funktion `odeint` zur Lösung der Differentialgleichung.
- Verwenden Sie auch bei der Implementierung des Lockdowns nur einen Aufruf von `odeint`.

Aufgabe 5.2: **(Optional, 6 Bonuspunkte)**

Schlagen Sie eine mögliche Erweiterung des SIR-Modells vor, welche eine realistischere Beschreibung ermöglicht.
Implementieren Sie diese und diskutieren Sie kurz das Ergebnis.

Alternativ können Sie gerne auch einen beliebigen anderen numerischen Aspekt im Zusammenhang mit der Beschreibung der Ausbreitung von Epidemien untersuchen - wir sind gespannt!

Reichen Sie dieses Programm als `5_2_vorname_nachname.py` ein!

All models are wrong but some are useful (George Box).