

Differentialgleichungen

Aufgabe 4.1:

(16 Punkte)

Betrachten Sie die Dynamik eines Teilchens beschrieben durch die dimensionslose Hamiltonfunktion $H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + V(x, t)$ im angetriebenen Doppelmuldenpotential $V(x, t) = x^4 - x^2 + x[A + B \sin(\omega t)]$ mit $A = 0,2$ und $B = 0,1$ sowie $\omega = 1$ für 200 Perioden des Antriebs.

- Leiten Sie zunächst die zugehörigen Differentialgleichungen her.
- Stellen Sie in einem ersten Plotbereich die Trajektorie $(x(t), p(t))$ im Phasenraum dar.
- Stellen Sie in einem zweiten Plotbereich nur die Phasenraumpunkte $(x(t_n), p(t_n))$ der Trajektorie zu den Zeiten $t_n = \frac{2\pi}{\omega}n$, mit $n \in \mathbb{N}_0$, dar (stroboskopische Darstellung).
- Zeichnen Sie in beiden Phasenräumen Konturlinien von $H(x, p)$ für $B = 0$ zu ca. 8 geeigneten Energien. Verwenden Sie hierfür `contour`.
- Der Startpunkt $(x(0), p(0))$ soll mit der Maus in beiden Phasenräumen wählbar sein.
- Testen Sie Ihr Programm zunächst für den Fall ohne Antrieb ($B = 0$).

Diskutieren Sie im Kommentar am Ende des Programms:

a) Welche Arten von Bewegungen erwarten Sie im Phasenraum? Was ist deren Entsprechung im Ortsraum?

- Geben Sie Ihr Programm nur für $B = 0,1$ ab.

Diskutieren Sie im Kommentar am Ende des Programms:

b) Welche Arten von Bewegungen beobachten Sie?

c) Geben Sie die Startkoordinaten einer periodischen Trajektorie und deren Periode auf 3 Nachkommastellen genau an. Nutzen Sie hierfür den Zoom im stroboskopischen Phasenraum.

Anmerkung: Eine Trajektorie des angetriebenen Systems ist periodisch, wenn $p(t^*) = p(0)$, $x(t^*) = x(0)$ und $t^* = \frac{2\pi}{\omega}m$, $m \in \mathbb{N}$. Das kleinste $t^* > 0$ ist die Periode.

Vorgaben und Hinweise:

- ❶ Arbeiten Sie als erstes die Einführung in Python II, Abschnitte 1 und 2, durch.
- ❶ Für die Lösung der Differentialgleichungen soll die Funktion `odeint` aus dem Paket `scipy` benutzt werden:

```
from scipy.integrate import odeint
y = odeint(abl, y0, zeiten)
```

wobei `abl` eine Funktion ist, die die rechte Seite der Differentialgleichungen 1. Ordnung berechnet. Die Funktion `abl` muss vorher definiert werden. Beispielsweise für $\dot{y} = y \sin(t)$:

```
def abl(y, t):
    return y * np.sin(t)
```

In der Routine `odeint` ist `zeiten` ein Array von Zeiten, zu denen jeweils der Lösungsvektor bestimmt werden soll und `y0` ist der Vektor der Anfangswerte. Es gibt viele weitere wichtige optionale Argumente, siehe `help("scipy.integrate.odeint")`.

❶ Als Beispiel dient ein minimales Testprogramm für das Pendel:

$$\ddot{\varphi} = c \cdot \sin(\varphi + \alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\varphi} &= v \\ \dot{v} &= c \cdot \sin(\varphi + \alpha) \end{aligned}$$

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint          # Integrationsroutine fuer DGL
4
5
6 def abl(y, t, C, A):
7     """Rechte Seite der DGL des Pendels.
8
9     Hierbei ist y = [phi, v] und t muss auch dann uebergeben werden,
10    wenn die rechte Seite der DGL zeitunabhaengig ist.
11    C und A sind Parameter.
12    """
13    return np.array([y[1], C * np.sin(y[0]+A)])    # (\dot{\phi}, \dot{v})
14
15 def main():
16     """Hauptprogramm"""
17     a, c = 1.0, 2.0                                # Parameter des Pendels
18     y0 = np.array([1.0, 0.9])                      # Anfangsbedingung: (phi(0), v(0))
19     zeiten = np.linspace(0.0, 20.0, 200)          # Zeiten
20     y_t = odeint(abl, y0, zeiten, args=(c, a))    # Integration der DGL
21     phi_t = y_t[:, 0]                             # Auslesen der Spalten mit phi
22     v_t = y_t[:, 1]                               # und v
23
24     fig = plt.figure()
25     ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
26     ax.plot(phi_t, v_t, marker="", ms=1, ls="-")
27     plt.show()
28
29 if __name__ == "__main__":
30     main()
```

In Zeile 20 werden durch `args=(c, a)` die Parameter von `abl` bereitgestellt.

❶ Initialisieren Sie zunächst zwei Plotbereiche mit `ax_pr = fig.add_subplot(...)` und verwenden Sie dann zum Darstellen z.B. `ax_pr.plot(...)`.